TRIGONOMÉTRIE (MONS 2018)

① Résoudre et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$\sin^3 x + 2.\cos^3 x = 3.\sin^2 x.\cos x \qquad (*)$$

Idée : diviser les deux membres de l'équation par $\cos^3 x$ afin de faire apparaître des tangentes.

Précaution : comme on divise par une expression contenant l'inconnue, il faut s'assurer que l'on ne perd pas de solutions.
Donc, vérifions d'abord si $\cos x = 0$ correspond à des solutions de l'équation $(*)$.

Ce n'est pas le cas, car si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, on a :

$$(\pm 1)^3 + 2.0 \neq 3.(\pm 1)^2.0.$$

Donc, divisons : $\dfrac{\sin^3 x + 2.\cos^3 x}{\cos^3 x} = \dfrac{3.\sin^2 x.\cos x}{\cos^3 x}$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^3 x + 2 = 3.\tan^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \tan^3 x - 3.\tan^2 x + 2 = 0$$

Pour la facilité d'écriture, posons $u = \tan x$ et utilisons ensuite la méthode des diviseurs du terme indépendant :

$$p(u) = u^3 - 3u^2 + 2 = 0 \longrightarrow div(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \longleftarrow p(1) = 0$$

Donc $(u-1)(u^2 - 2u - 2) = 0$

$u = 1$ ou $u = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$

$u = 1 \pm \sqrt{3}$

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

ou $\tan x = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x \simeq 1{,}22 + k\pi$

ou $\tan x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x \simeq -0{,}63 + k\pi$

D'où la représentation ci-contre