PROBLÈME DE TRIGONOMÉTRIE : LE MÂT PENCHÉ - UMONS 2016

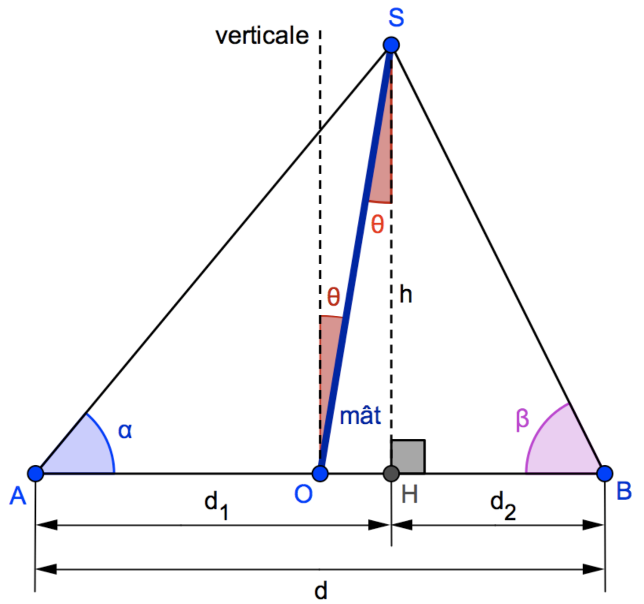
Dans un plan perpendiculaire au sol horizontal, soit un mât rectiligne fixé rigidement au point O et incliné d'un angle θ par rapport la verticale.
Un premier observateur situé au niveau du sol au point A appartenant au plan précité voit le mât, du point O à son sommet, sous un angle α.
Un second observateur situé au point B de l'autre côté du mât, dans l'alignement avec les points O et A de telle sorte que OA est égal à OB, voit le mât (toujours du point O au sommet) sous un angle β supérieur à α.
Exprimer l'angle θ en fonction des angles α et β, de la distance d entre les deux observateurs et de la hauteur h abaissée du sommet du mât perpendiculairement au sol.
Calculer ensuite la valeur numérique de l'angle θ si $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ et le rapport $d / h = 4 / \sqrt{3}$.

Solution

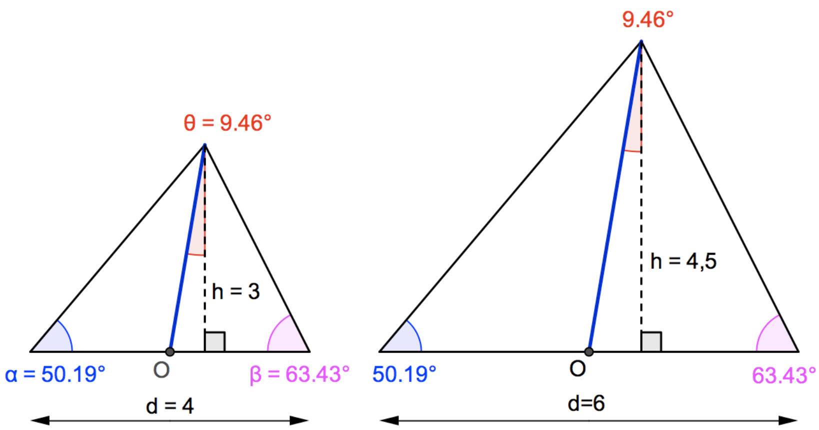
Dans la figure ci-contre, le segment [OS] représente le mât.
Le segment [SH] est la hauteur issue de S et sa longueur est h.
Cette hauteur étant verticale, elle fait aussi un angle θ avec le mât.

Comme l'angle β est supérieur à α, le mât penche vers l'observateur situé en B.

Ce qui est intrigant dans la deuxième partie du problème, c'est la donnée du rapport d / h.
En effet, lorsque les angles α, β et θ sont fixés, ce rapport est constant quelle que soit la valeur de d.
Si d varie, la hauteur h varie en proportion.



Ci-dessous, un exemple pour illustrer cela. La distance d est différente, mais les triangles sont semblables et dans les deux cas le rapport $d / h = 4 / 3$.
Bien sûr, les longueurs des mâts sont différentes, mais le problème ne porte pas sur la longueur du mât mais bien sur son inclinaison θ par rapport à la verticale.



Le rapport d/h ne dépend donc que de α et β selon la relation suivante (voir première figure) :

$$\boxed{\frac{d}{h} = \frac{d_1}{h} + \frac{d_2}{h} = \cot\alpha + \cot\beta} \quad (1)\ .$$

Cherchons maintenant une expression pour θ. Dans le triangle rectangle OHS, nous avons :

$$\tan\theta = \frac{|OH|}{|HS|} = \frac{\frac{d}{2} - d_2}{h} = \frac{d}{2h} - \frac{d_2}{h} \overset{(1)}{=} \frac{\cot\alpha + \cot\beta}{2} - \cot\beta = \frac{\cot\alpha - \cot\beta}{2}\ .$$

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{\cot\alpha - \cot\beta}{2}\right)} \quad (2)\ .$$

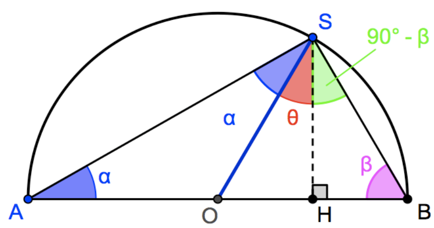
Application numérique

Quelle est l'amplitude de l'angle θ si $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$?
Il est inutile de savoir que le rapport $d/h = 4/\sqrt{3}$, la formule (2) suffit :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\cot 30° - \cot 60°}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°\ .$$

Remarque

Cette dernière question peut être résolue assez facilement sans effectuer tout le travail précédent. En effet, si $\alpha = 30°$ et $\beta = 60°$, le triangle ABS est rectangle en S et il est donc inscriptible dans un demi cercle de diamètre [AB].
Les segments [AO] et [SO] ont donc pour longueur $d/2$ ce qui signifie que le triangle AOS est isocèle et que $A\hat{S}O = \alpha$.



Sachant que $A\hat{S}O + O\hat{S}H + H\hat{S}B = 90°$, nous obtenons : $\alpha + \theta + 90° - \beta = 90° \rightarrow \theta = \beta - \alpha = 30°$.

Commentaires sur l'énoncé du problème

La donnée du rapport d/h est sans doute fournie pour aider les étudiants qui auraient emprunté une autre voie et obtenu une réponse où d/h apparaît. Voici un exemple de démarche (en abrégé).

$$h = d_1.\tan\alpha = \left(\frac{d}{2} + |OH|\right).\tan\alpha \quad \text{et} \quad h = d_2.\tan\beta = \left(\frac{d}{2} - |OH|\right).\tan\beta$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{d}{2} + |OH|\right).\tan\alpha = \left(\frac{d}{2} - |OH|\right).\tan\beta$$

Or $|OH| = h.\tan\theta$, donc :

$$\frac{d}{2}.\tan\alpha + h.\tan\theta.\tan\alpha = \frac{d}{2}.\tan\beta - h.\tan\theta.\tan\beta \rightarrow h.\tan\theta.(\tan\alpha + \tan\beta) = \frac{d}{2}.(\tan\beta - \tan\alpha)\ .$$

Finalement : $\tan\theta = \dfrac{d}{2h}.\dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha + \tan\beta} \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\dfrac{d}{2h}.\dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha + \tan\beta}\right)$.