Synthèse d'analyse

Avril 2011

Cette synthèse d'analyse a été rédigée suite à une suggestion de M. le Professeur E. Delhez. Elle est destinée à aider les étudiants à préparer l'examen d'admission aux études d'ingénieur civil.
Son objectif est de proposer une synthèse des définitions et propriétés utiles. Aucun résultat énoncé n'est démontré. Si un étudiant souhaite obtenir une preuve des énoncés annoncés, nous le renvoyons à ses cours de l'enseignement secondaire.

Il ne faut pas considérer ce document comme une bible ! D'une part, il ne s'agit pas de notes de cours. Les notions ne sont pas toujours abordées dans le même ordre que lors de leur approche en classe. C'est ainsi que les fonctions logarithmiques et exponentielles sont présentées sur le même pied que les polynômes, fractions rationnelles, etc.... D'autre part, il est certainement pourvu de nombreux défauts : lacunes, imprécisions, manque d'exemples ou d'exercices, illustrations omises, lapsus ou fautes de frappe,...

Une étude par coeur du contenu de ce recueil n'est pas une bonne méthode pour se préparer et ne garantit en rien la réussite de l'examen.

La pratique de la résolution d'exercices et de problèmes est également indispensable. Nous renvoyons le lecteur aux questions/réponses publiées ailleurs.

Toutes nos excuses pour ces défauts. Nous espérons profiter des commentaires et remarques des utilisateurs pour perfectionner cette première version pour les années ultérieures.

Tous mes remerciements au Professeur Delhez pour ses relectures et ses nombreux conseils avisés. Yvan Haine

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Définitions

- Une *fonction* f réelle d'une variable x réelle est une loi qui à tout x réel associe au plus un réel noté $f(x)$.
- On dit que $f(x)$ est l'*image* du réel x par la fonction f ou la *valeur de la fonction* f en x.
- L'ensemble des valeurs de x qui ont une image par f est le *domaine de définition* de la fonction f. On le note généralement dom f.
- L'ensemble $\{f(x) : x \in \text{ dom } f\}$ est appelé l'*ensemble image* de f ou l'*ensemble des valeurs* de f. Certains l'appellent aussi *codomaine* de f.
- Dans le plan muni d'un repère (généralement orthonormé ou au moins orthogonal), on représente l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$. On obtient ainsi une courbe d'équation $y = f(x)$. C'est le *graphique* de la fonction f.
- Un *zéro* de la fonction f est une valeur de x telle que $f(x) = 0$.

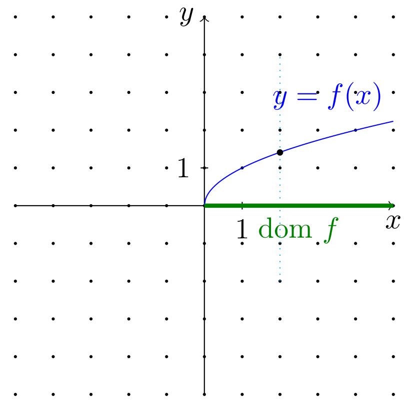
1.2 Lecture de graphique

On peut facilement lire plusieurs caractéristiques d'une fonction sur son graphique.

- Un point de l'axe des abscisses appartient au domaine de définition d'une fonction si la perpendiculaire à l'axe des abscisses issue de ce point rencontre le graphique de la fonction en un point.

Exemple

Soit une fonction dont le graphique est ci-dessous :



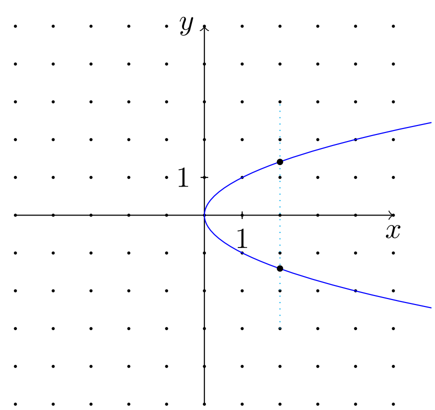
Le point $x = 2$ appartient au domaine de f. Par contre la fonction n'est pas définie au point $x = -1$.

Le domaine de définition de f est $[0, +\infty[$.

Remarque

Si une perpendiculaire à l'axe des abscisses rencontre un graphique en plus d'un point, alors ce graphique n'est pas celui d'une fonction.

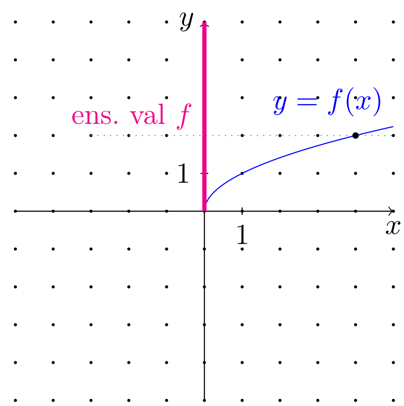
Exemple



- Un point de l'axe des ordonnées appartient à l'ensemble des valeurs d'une fonction si la perpendiculaire à l'axe des ordonnées issue de ce point rencontre le graphique de la fonction en au moins un point.

Exemple

Soit une fonction dont le graphique est ci-dessous :



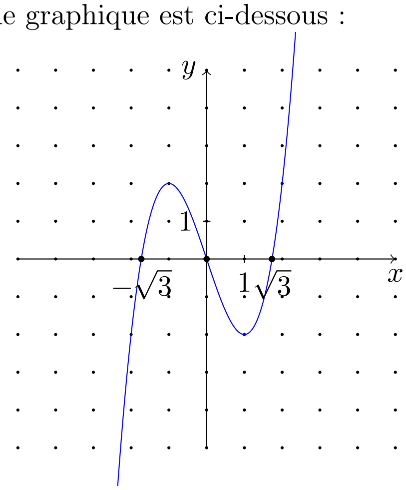
La valeur $y = 2$ appartient à l'ensemble des valeurs de f, au contraire de la valeur $y = -1$.

L'ensemble des valeurs de f est $[0, +\infty[$.

- Les zéros d'une fonction sont les abscisses des points d'intersection du graphique avec l'axe des abscisses.

Exemple

Soit la fonction f dont le graphique est ci-dessous :



Les zéros de f sont $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ et $x = \sqrt{3}$.

- Une fonction est positive (négative) sur un intervalle I ssi son graphique est au-dessus (en-dessous) de l'axe des x lorsque $x \in I$.

Exemple

La fonction f de l'exemple précédent est positive sur $]-\sqrt{3},0[\cup]\sqrt{3},\infty[$ et négative sur $]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]0,\sqrt{3}[$.

1.3 Fonctions paires et impaires

1.3.1 Définition

- Une fonction f est *paire* si $\forall x \in \mathrm{dom}\ f, -x \in \mathrm{dom}\ f$ et $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est *impaire* si $\forall x \in \mathrm{dom}\ f, -x \in \mathrm{dom}\ f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Remarque

Une condition nécessaire pour qu'une fonction soit paire ou impaire est donc que son domaine de définition soit symétrique par rapport à l'origine.
Insistons sur le fait qu'il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante. Il existe des fonctions dont le domaine est symétrique par rapport à 0 mais qui ne sont ni paires, ni impaires.

Exemple

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = x + 1$ est $\mathbb{R}$.
Mais comme $f(-x) = -x + 1$, la fonction n'est ni paire $(f(-x) \neq f(x))$ ni impaire $(f(-x) \neq -f(x))$.

Par contraposition, si le domaine de définition d'une fonction n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction n'est ni paire, ni impaire.

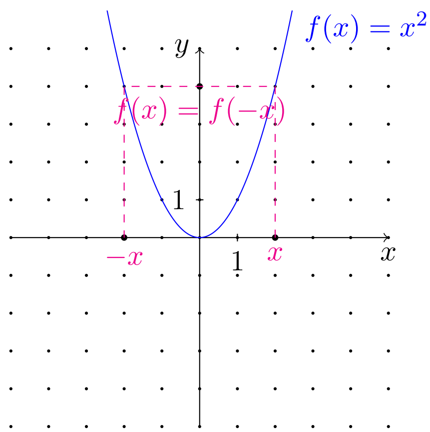
Exemple

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est $[0, +\infty[$.
Cet ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0.
Par conséquent, la fonction $\sqrt{x}$ n'est ni paire, ni impaire.

1.3.2 Propriétés du graphique

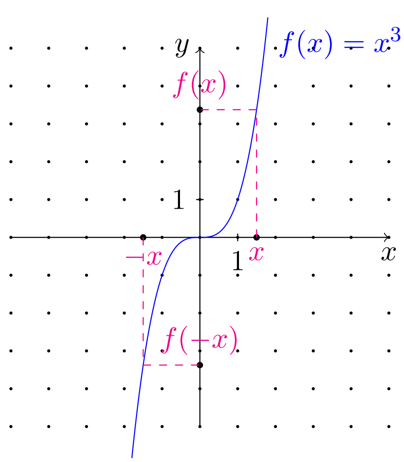
Le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple



Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des axes.

Exemple



1.3.3 Fonctions fondamentales

Si $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{R}$, les fonctions $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = |x|$ et $f(x) = k$ sont des fonctions paires.
Si $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ sont des fonctions impaires.

1.3.4 Propriétés

Si f est impaire et définie en $x = 0$, alors $f(0) = 0$.

La somme ou différence de deux fonctions paires (impaires) est paire (impaire).
Le produit ou quotient de deux fonctions de même parité (de parités différentes) est paire (impaire).

Conséquences

Toute fonction dont l'expression est un polynôme ne contenant que des puissances paires (impaires) de x est une fonction paire (impaire).

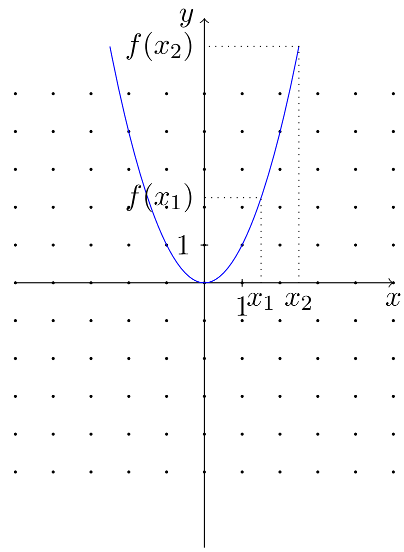
1.4 Variations et extrema

1.4.1 Croissance et décroissance

- Une fonction réelle f est *croissante* sur un intervalle $[a, b]$ si
  $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Une fonction réelle f est *décroissante* sur un intervalle $[a, b]$ si
  $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, +\infty]$.



- Une fonction réelle f est *strictement croissante* sur un intervalle $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Une fonction réelle f est *strictement décroissante* sur un intervalle $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

1.4.2 Extrema d'une fonction

Appelons *voisinage* de x_0 un intervalle (non réduit à x_0) contenant x_0.

Soit une fonction f réelle, définie sur un ensemble I et $x_0 \in I$.

- On dit que f admet un *maximum local* en x_0 si il existe un voisinage $V \subset I$ de x_0 tel que

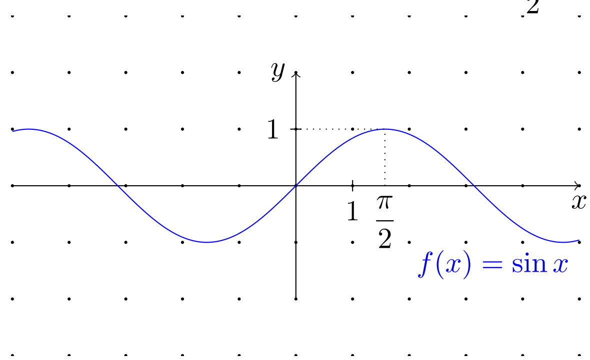
$$\forall x \in V, f(x) \leq f(x_0)$$

- On dit que f admet un *minimum local* en x_0 si il existe un voisinage $V \subset I$ de x_0 tel que

$$\forall x \in V, f(x) \geq f(x_0)$$

Exemple

La fonction $f(x) = \sin x$ admet un maximum local en $x = \dfrac{\pi}{2}$.



- On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si

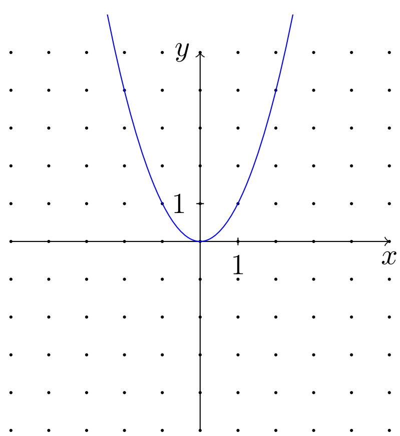
$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$$

- On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$$

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet un minimum global en $x = 0$.



Remarque

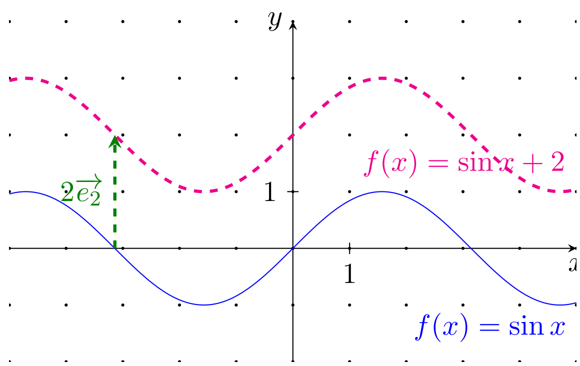
La maximum ou minimum est dit *strict* si $\forall x \in V, x \neq x_0, f(x) < f(x_0)$ ou $f(x) > f(x_0)$.

1.5 Transformations graphiques

1.5.1 $f(x) + k$

Si $k \in \mathbb{R}$, le graphique de la fonction $f(x) + k$ est obtenu en translatant le graphique de la fonction $f(x)$ de k unités selon l'axe des ordonnées .

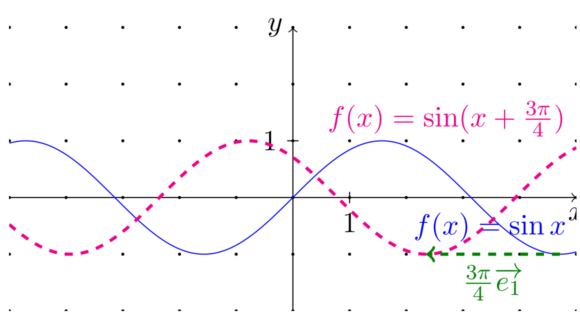
Exemple



1.5.2 $f(x + k)$

Si $k \in \mathbb{R}$, le graphique de la fonction $f(x+k)$ est obtenu en translatant le graphique de la fonction $f(x)$ de $-k$ unités selon l'axe des abscisses.

Exemple

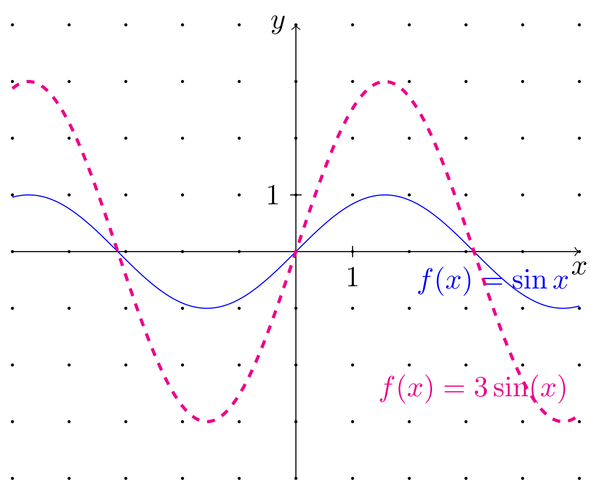


1.5.3 $k \cdot f(x)$

Si $k \in \mathbb{R}$, le graphique de la fonction $k \cdot f(x)$ est obtenu en multipliant les ordonnées des points du graphique de la fonction $f(x)$ par k. Cette transformation géométrique s'appelle une affinité.

Cela a pour effet d' « étirer »le graphique de f parallèlement à l'axe Oy si $k > 1$ ou de l'« aplatir »si $k < 1$.

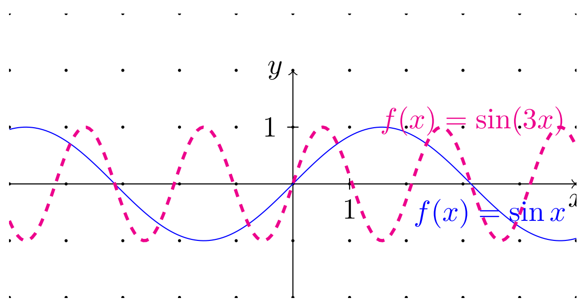
Exemple



1.5.4 $f(k \cdot x)$

Si $k \in \mathbb{R}$, le graphique de la fonction $\cdot f(k \cdot x)$ est obtenu en « étirant »le graphique de f parallèlement à l'axe Ox si $k < 1$ ou en « compressant »le graphique de f parallèlement à l'axe Ox si $k > 1$. Cette transformation géométrique s'appelle une affinité.

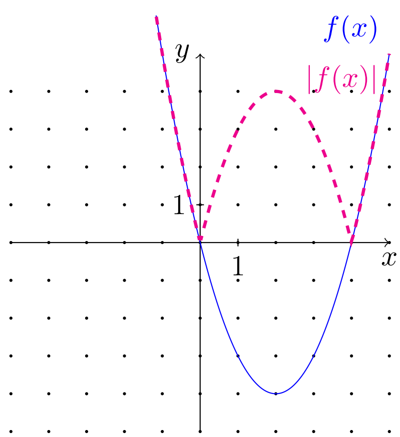
Exemple



1.5.5 $|f(x)|$

Le graphique de la fonction $|f(x)|$ est obtenu par l'union du graphique de f lorsque $f(x)$ est positif et du graphique de $-f$ lorsque $f(x)$ est négatif.

Exemple



Chapitre 2

Limites

La notion de limite est fort compliquée et toute en nuances. Définir cette notion avec rigueur (définitions en ε, η) demande beaucoup de temps et de précision tant le nombre de cas à envisager est important. Nous omettons donc volontairement ces définitions rigoureuses dans cette synthèse.

Par contre, nous en donnerons des définitions "intuitives" et les illustrerons par des exemples et des interprétations graphiques.

Maitriser le concept de limite demande deux choses :

- interpréter la limite obtenue pour comprendre comment la fonction se comporte au "voisinage" des bornes ouvertes de son domaine de définition,
- être capable de calculer une limite

Ces deux aspects sont abordés dans cet ordre dans cette synthèse.

2.1 Point adhérent

Un point est *adhérent* à un ensemble s'il appartient à cet ensemble ou s'il est une borne ouverte de cet ensemble.
Par extension intuitive de cette définition, nous admettrons de dire que $+\infty$ ($-\infty$) est adhérent à un intervalle du type $]a, +\infty[$ ($]-\infty, b[$).

2.2 Définitions intuitives

2.2.1 Limite finie à l'infini

- Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

  La *limite de f quand x tend vers* $+\infty$ est égale à α si la différence $|f(x) - \alpha|$ prend des valeurs aussi petites que l'on veut pour autant que x soit suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha.$$

  On dit aussi que f tend vers α lorsque x tend vers $+\infty$.

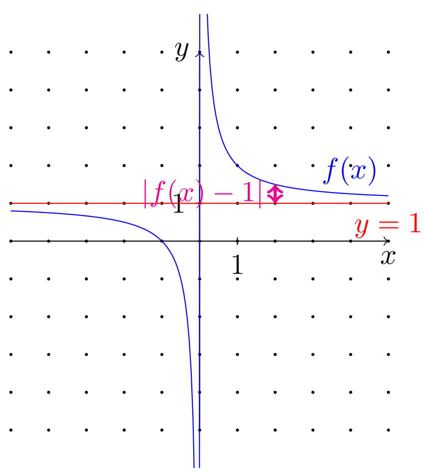
Exemple

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

On peut prouver (voir paragraphe relatif au calcul des limites) que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Graphiquement, on a



Interprétation graphique

Dans ce cas, la différence $|f(x) - 1|$ représente la différence entre l'ordonnée d'un point du graphique de f d'abscisse x et le nombre 1.

Cette différence devient aussi petite que l'on veut pour autant que x s'éloigne suffisamment de l'origine vers la droite.

- Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]-\infty, b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

  La *limite de f quand x tend vers $-\infty$* est égale à α si la différence $|f(x) - \alpha|$ prend des valeurs aussi petites que l'on veut pour autant que x soit négatif, suffisamment grand en valeur absolue. On note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha.$$

  On dit aussi que f tend vers α lorsque x tend vers $-\infty$.

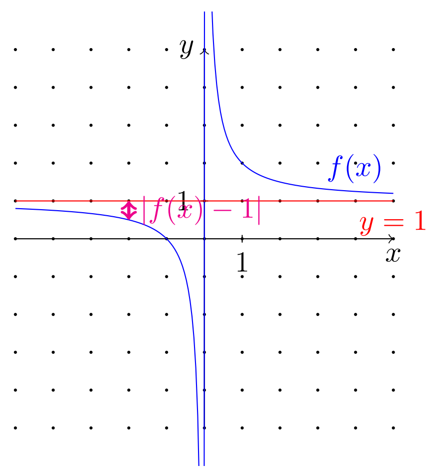
Exemple

Soit la fonction $f = \dfrac{x+1}{x}$.

On peut prouver (voir paragraphe relatif au calcul des limites) que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

Graphiquement, on a



Interprétation graphique

Dans ce cas, la différence $|f(x) - 1|$ représente la différence entre l'ordonnée d'un point du graphique de f d'abscisse x et l'ordonnée du point de la droite d'équation $y = 1$ qui a la même abscisse.

Cette différence d'ordonnées devient aussi petite que l'on veut pour autant que x s'éloigne suffisamment de l'origine vers la gauche.

Remarques

- Il est possible -comme dans l'exemple ci-dessus- que les limites de la fonction quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$ soient égales. Dans ce cas, on utilisera couramment la notation

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha.$$

en étant conscient que l'on écrit deux limites en même temps.

- Il est indispensable que $+\infty$ (-∞) soit une borne ouverte du domaine de définition de f pour que la notion de limite en $+\infty$ ($-\infty$) ait un sens.

Exemple

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x}$ n'a pas de sens puisque dom $\sqrt{x} = [0, +\infty[$.

2.2.2 Limite infinie à l'infini

Limite en $+\infty$

- Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, +\infty[$. La *limite de f quand x tend vers* $+\infty$ est égale à $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour autant que x soit suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

On dit aussi que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, +\infty[$. La *limite de f quand x tend vers* $+\infty$ est égale à $-\infty$ si $f(x)$ est négative et $|f(x)|$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour autant que x soit suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

On dit aussi que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

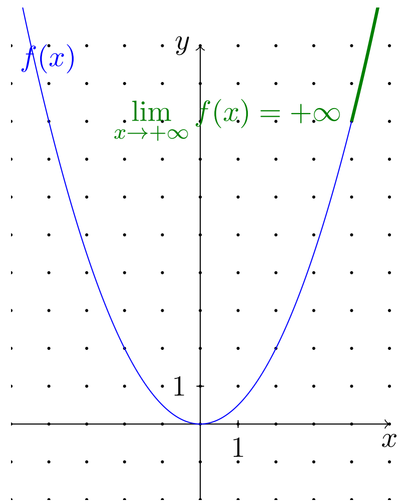
Exemple

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

On peut prouver que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Graphiquement, on a



Interprétation graphique

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors le graphique de f "se dirige" vers le coin supérieur droit du plan.

Limite en $-\infty$

- Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]-\infty, b[$. La *limite de f quand x tend vers $-\infty$* est égale à $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour autant que x soit négatif et $|x|$ suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

On dit aussi que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

- Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]-\infty, b[$. La *limite de f quand x tend vers $+\infty$* est égale à $-\infty$ si $f(x)$ est négative et $|f(x)|$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour autant que x soit négatif et $|x|$ suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

On dit aussi que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

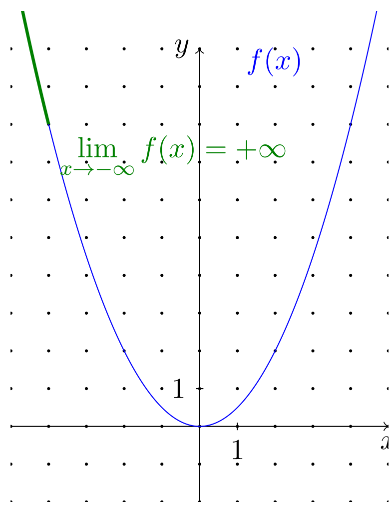
Exemple

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

On peut prouver que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Graphiquement, on a



Interprétation graphique

Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, alors le graphique de f "se dirige" vers le coin supérieur gauche du plan.

2.2.3 Limite infinie en un réel

Limite à droite et à gauche

Limite à droite

Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, b[, a \in \mathbb{R}$.

- La *limite à droite de f quand x tend vers a* est égale à $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour autant que $x > a$ soit suffisamment proche de a. On note

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$

On dit aussi que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par la droite.

- La *limite à droite de f quand x tend vers a* est égale à $-\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs négatives, en valeur absolue aussi grandes que l'on veut pour autant que $x > a$ soit suffisamment proche de a. On note

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

  On dit aussi que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a par la droite.

Limite à gauche

Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, b[, b \in \mathbb{R}$.

- La *limite à gauche de f quand x tend vers b* est égale à $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour autant que $x < b$ soit suffisamment proche de b. On note

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty.$$

  On dit aussi que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b par la gauche.
- La *limite à gauche de f quand x tend vers b* est égale à $-\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs négatives, en valeur absolue aussi grandes que l'on veut pour autant que $x < b$ soit suffisamment proche de a. On note

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty.$$

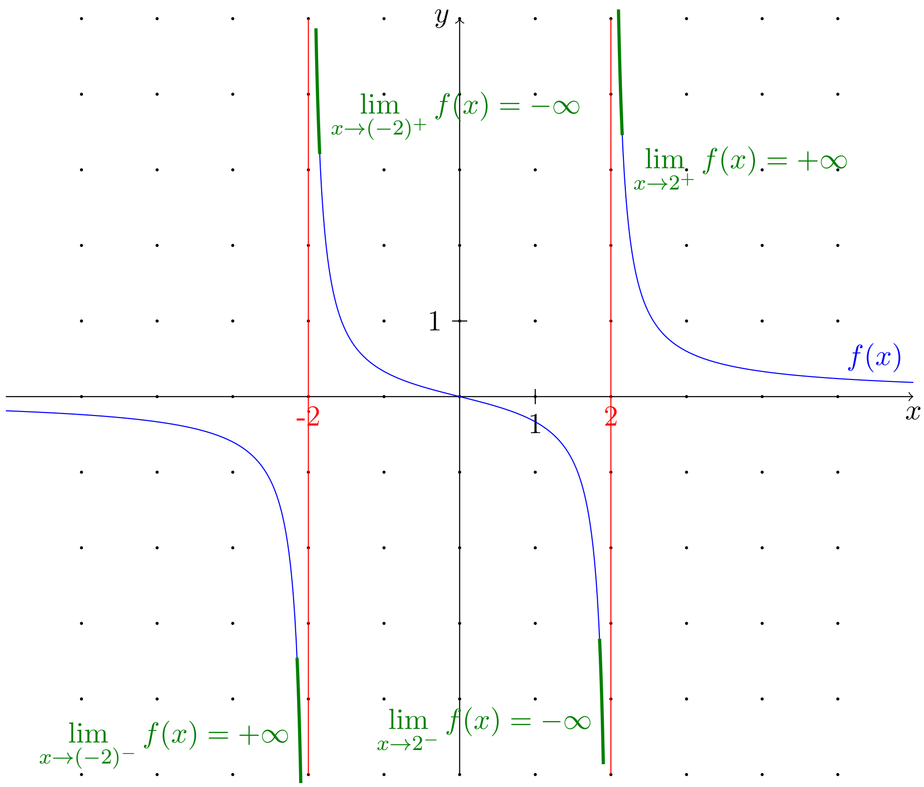
  On dit aussi que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers b par la gauche.

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

On peut prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to (-2)^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to (-2)^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$

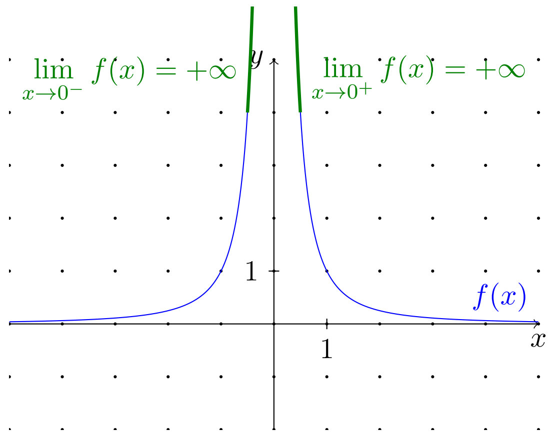


Limite infinie en un réel

Si f une fonction définie sur un ensemble contenant un ensemble du type $]a,b[\cup]b,c[$, la *limite de f quand x tend vers b* est égale à $+\infty(-\infty)$ si les limites de f quand x tend vers b à gauche et à droite sont égales à $+\infty(-\infty)$.

Exemple

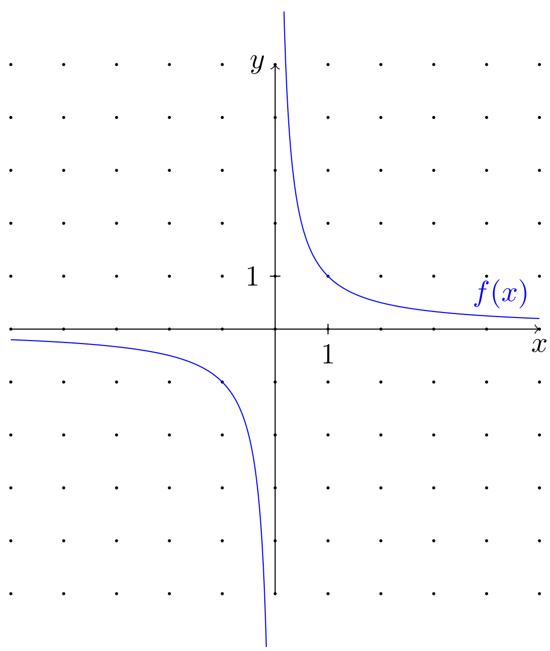
Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On peut prouver que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.



Si les limites de f à droite et à gauche de b existent et sont différentes, la limite de f quand x tend vers b n'existe pas.

Exemple

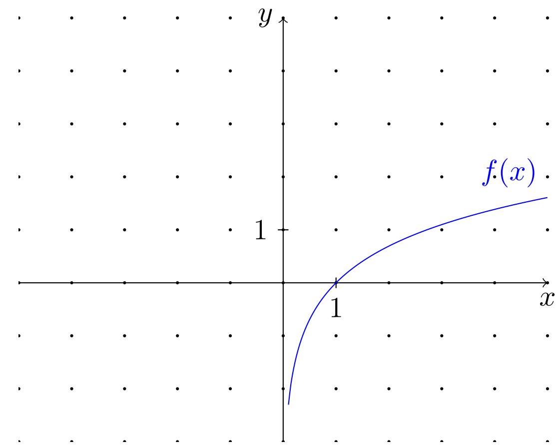
Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On peut prouver que $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas car les limites à gauche et à doite existent mais sont différentes.



Si f est une fonction définie à droite (à gauche) d'un réel b et pas à gauche (pas à droite), alors la limite de f quand x tend vers b est égale à la limite de f quand x tend vers b par la droite (gauche).

Exemple

Soit $f(x) = \ln x$. On sait que que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. La limite à gauche n'a pas de sens. Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.



2.2.4 Limite finie en un réel

Limite à droite

Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, b[, a \in \mathbb{R}$. La *limite à droite de f quand x tend vers a* est égale à $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de α pour autant que $x > a$ soit suffisamment proche de a. On note

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \alpha.$$

On dit aussi que f tend vers α lorsque x tend vers a par la droite.

Limite à gauche

Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, b[, b \in \mathbb{R}$. La *limite à gauche de f quand x tend vers b* est égale à β si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de β pour autant que $x < b$ soit suffisamment proche de a. On note

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \beta.$$

On dit aussi que f tend vers β lorsque x tend vers b par la gauche.

Limite finie en un réel

Si f est une fonction définie sur un ensemble contenant un ensemble du type $]a, b[\cup]b, c[$. La *limite de f quand x tend vers b* est égale à $\alpha(\alpha \in \mathbb{R})$ si les limites de f quand x tend vers b à gauche et à droite sont égales à α.

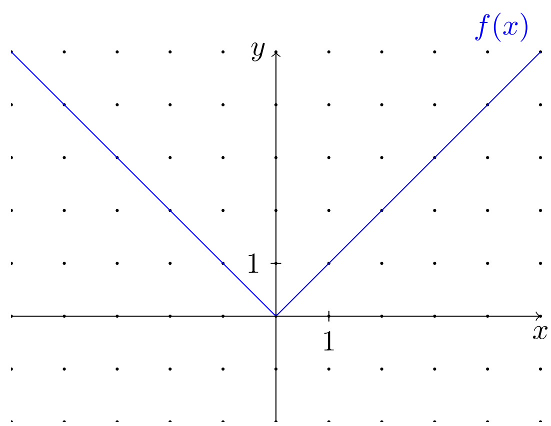
Si f est une fonction définie à droite (à gauche) d'un réel b et pas à gauche (droite), alors la limite de f quand x tend vers b est égale à la limite de f quand x tend vers b par la droite (gauche).

Dans les deux cas, on dit aussi que f tend vers α lorsque x tend vers b.

Exemple

Soit $f(x) = |x|$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

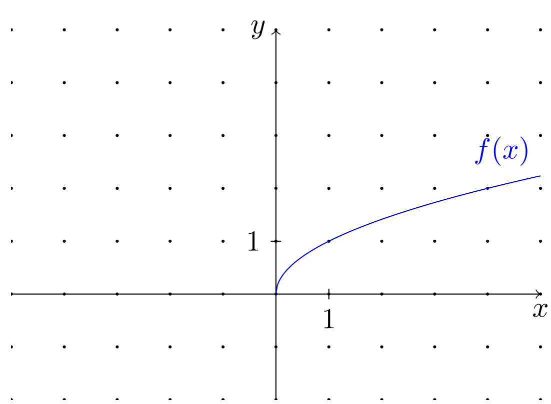
On a $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} |x| = 0$. Les limites à gauche et à doite de 0 sont égales. Donc $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.



Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Cette fonction est définie sur $[0, +\infty[$.

On a $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \sqrt{x} = 0$. La limite à gauche de 0 n'a pas de sens. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.



2.3 Calcul de limites

Le calcul de la limite d'une fonction se fait à l'aide de deux éléments :

- des limites de fonctions fondamentales
- des théorèmes relatifs aux limites de somme, produit, quotient et composition de fonctions

2.3.1 Limites fondamentales

Limites à l'infini

Lorsqu'on calcule la limite d'une fonction en $\pm\infty$, on est souvent amené à envisager les mêmes limites. Il est donc indispensable de connaître les résultats suivants (qui sont tous démontrables).

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k = k, \forall k \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ \pm\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{p}{q}} = +\infty, \forall p > 0, q > 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{p}{q}} = 0, \forall p < 0, q > 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Limites infinies

- $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ si $n \in \mathbb{N}$ est impair
- $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ si $n \in \mathbb{N}$ est pair
- $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ pour tout n naturel
- $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^q} = +\infty$ pour tout $q \in \mathbb{Q}_0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Limites finies

- Pour tout polynôme $P(x)$, $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$
- $\forall a \in \mathbb{R}_0^+$, $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$
- $\forall a \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{x \to a} \arcsin x = \arcsin a$
- $\forall a \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{arcos} x = \operatorname{arcos} a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$

2.3.2 Limites et opérations

Pour évaluer la limite d'une fonction en $\pm\infty$, on peut utiliser les théorèmes suivants. Ils permettent de donner la valeur de la limite d'une somme, d'un produit,... de deux fonctions. Certaines configurations ne donnent cependant pas toujours le même résultat. Ce sont les cas dits "d'indétermination". Ils figurent entre [et] dans les énoncés suivants.

Deux limites finies

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = \alpha - \beta$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} \text{ si } \beta \neq 0 \\ \infty \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta = 0 \\ \left[\dfrac{0}{0}\right] \text{ si } \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0 \end{cases}$

Une limite finie et une limite infinie

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \alpha \in \mathbb{R}$ alors

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{cases} \infty \text{ si } \alpha \neq 0 \\ [0 \cdot \infty] \text{ si } \alpha = 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$

Deux limites infinies

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$ alors

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = [\infty - \infty]$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

2.3.3 Limite d'une fonction de fonction

Si f est une fonction définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ et si g est une fonction définie sur un intervalle dont α est adhérent est telle que $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = A$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$ est la composée des fonctions $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0^+$ ($a = +\infty$ et $\alpha = 0$).

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ ($A = 0$).

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x+2}} = 0^+$

2.4 Cas d'indétermination

Trouver la vraie valeur d'une limite lorsque celle-ci est une indétermination s'appelle "lever l'indétermination".

Il n'est pas possible d'expliquer ici toutes les configurations possibles et toutes les méthodes correspondantes. Nous nous contenterons d'expliquer les plus fréquentes. [1]

2.4.1 Polynômes : cas $[\infty - \infty]$

La limite à l'infini d'un polynôme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $a_n \neq 0$ se calcule à l'aide du théorème suivant

La limite à l'infini d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haute puissance.

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

1. Les cas d'indétermination nécessitant le théorème de l'Hospital sont abordés dans le chapitre des dérivées.

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

2.4.2 Fonction rationnelle : $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k x^k}$ où $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ se calcule à l'aide du théorème suivant

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haute puissance du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

Conséquence

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à

- 0 si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur
- $\dfrac{a_n}{b_n}$ si le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur
- $\pm\infty$ si le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{3x^4 - x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^4} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{3x^3 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{3x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^2} = +\infty$$

2.4.3 Fonctions irrationnelles

cas $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Si une indétermination $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ apparaît dans une expression faisant apparaître une fonction irrationnelle, l'indétermination peut généralement être levée en mettant en évidence la plus haute puissance du radicand.

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

$$\text{On a } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x| \cdot \overbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}^{\to 1}}{x}$$
$$= \pm 1$$

cas $[\infty - \infty]$

Les cas d'indétermination $[\infty-\infty]$ faisant apparaître une expression irrationnelle se lèvent généralement en multipliant et en divisant l'expression par le binôme conjugué.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$.

$$\text{On a } \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = [\infty - \infty]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$
$$= 0$$

Remarque

Si le cas d'indétermination $[\infty-\infty]$ se présente avec une expression irrationnelle faisant intervenir une racine cubique, c'est par le "trinôme conjugué" qu'il faut multiplier afin d'utiliser le produit remarquable

$$a \pm b = \frac{a^3 \pm b^3}{a^2 \mp ab + b^2}.$$

2.4.4 Fonction rationnelle : $\left[\frac{0}{0}\right]$

La limite quand x tend vers a d'une fonction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ présente l'indétermination $\left[\frac{0}{0}\right]$ lorsque a est à la fois un zéro de $P(x)$ et de $Q(x)$.

On en déduit la méthode de levée de l'indétermination : on factorise $P(x)$ et $Q(x)$ en divisant ces deux polynômes par $x - a$, puis on simplifie la fonction rationelle.

Exemple

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)}{(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}$$

Remarque

Comme le montre l'exemple ci-dessus, la limite d'une fonction rationnelle en un des zéros du dénominateur peut donc être finie. Il est donc faux de dire qu'une fonction rationnelle admet une asymptote verticale au(x) zéro(s) de son dénominateur.

2.4.5 Fonctions irrationnelles

cas $\left[\frac{0}{0}\right]$

Si une indétermination $\left[\frac{0}{0}\right]$ apparaît dans une expression faisant apparaître une fonction irrationnelle, l'indétermination peut généralement être levée

- soit en multipliant et divisant la fraction par le binôme conjugué de l' (les) expression(s) irrationnelle(s)
- soit par simplification.

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

2.5 Limites et inégalités

Si f et g sont deux fonctions telles que $f(x) < g(x)$ dans un voisinage de a (sauf éventuellement en a) admettant chacune une limite quand x tend vers a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemple

Soient $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Ces deux fonctions vérifient $g(x) < f(x)$ pour tout $x > 1$. Par suite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} \leq \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$$

De même, les deux fonctions vérifient $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in]0,1[$. Par suite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}.$$

Théorème de l'étau [a]

Si f, g et h sont trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dans un voisinage de a (sauf éventuellement en a), et si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha,$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = \alpha.$$

[a] Les bricoleurs l'appellent "théorème de l'étau", les gourmands "théorème du sandwich" et les autres "théorème des gendarmes".

Exemple

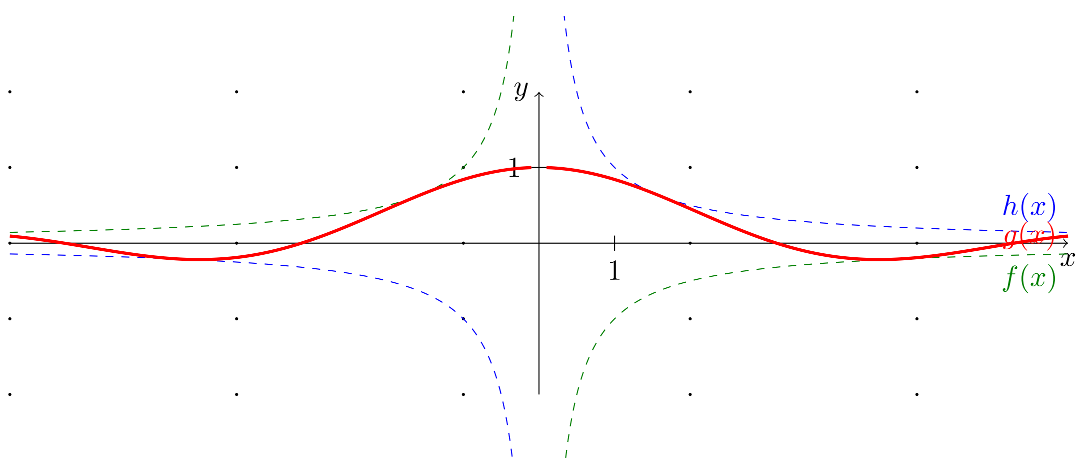
Soient les fonctions $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.
Pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. De plus,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} h(x) = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

On peut faire le même raisonnement en $-\infty$.



Chapitre 3

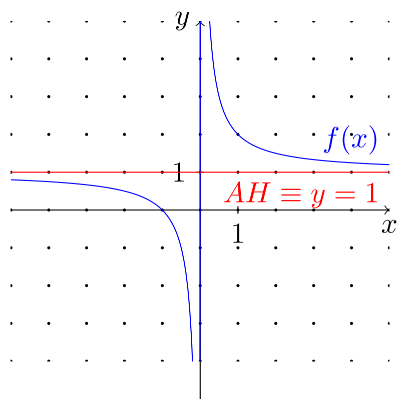
Asymptotes

3.1 Asymptote horizontale

Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, +\infty[$ $(]-\infty, b[)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que la droite d'équation $y = \alpha$ est une *asymptote horizontale* au graphique de f en $+\infty$ $(-\infty)$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha.)$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, le graphique de f admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale.



La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale au graphique de f aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$.

3.2 Asymptote oblique

3.2.1 Définition

Soit une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a,+\infty[$ ($]-\infty,b[$).

On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est une *asymptote oblique* au graphique de f en $+\infty$ ($-\infty$) ssi il existe m et p réels tels que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx+p)) = 0 \qquad (\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+p)) = 0)$$

3.2.2 Critère d'existence d'une asymptote oblique

Le graphique de la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ $(-\infty)$ ssi il existe m et p réels tels que

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

et

$$p = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right).$$

Exemple

Soit la fonction $f = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Comme

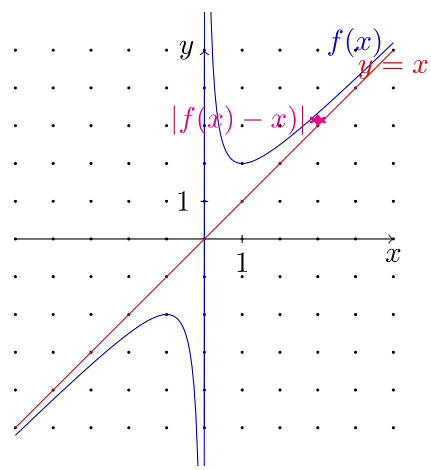
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

et

$$p = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0,$$

le graphique de f admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique.

Graphiquement, on a



Interprétation graphique

Dans ce cas, la différence $|f(x) - x|$ représente la différence entre l'ordonnée d'un point du graphique de f d'abscisse x et l'ordonnée du point de la droite d'équation $y = x$ qui a la même abscisse.

Cette différence d'ordonnées devient aussi petite que l'on veut pour autant que x s'éloigne suffisamment de l'origine vers la droite.

Ici, la même droite est également asymptote au graphique de f en $-\infty$.

Remarques

- L'existence d'un m réel tel que $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ne garantit pas l'existence d'un p réel tel que $p = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$.

  Exemple

  Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 0$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

- Une asymptote horizontale est un cas particulier d'asymptote oblique. Elle correspond au cas $m = 0$.
- Le graphique d'une fonction ne peut admettre une asymptote oblique (non horizontale) en $+\infty$ que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$. La réciproque n'est pas vraie : il existe des fonctions admettant une limite infinie et dont le graphique n'admet pas d'asymptote oblique.

  Exemple

  $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

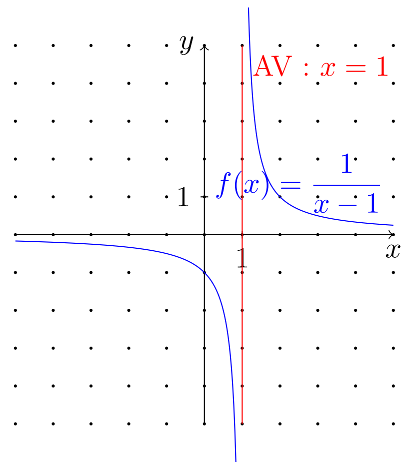
3.3 Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un ensemble contenant un intervalle du type $]a, b[$, alors la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale à droite* au graphique de f si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ et la droite d'équation $x = b$ est *asymptote verticale à gauche* au graphique de f si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$.

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale au graphique de f.

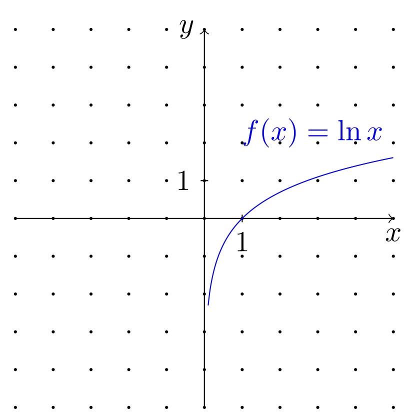


Remarques

Une droite d'équation $x = a$ peut être asymptote verticale au graphique d'une fonction à droite, à gauche ou des deux côtés.

Exemple

Comme $\ln x$ est définie uniquement sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à droite au graphique de la fonction $f(x) = \ln x$.



3.4 Co-existence d'asymptotes

3.4.1 Asymptotes horizontales et obliques

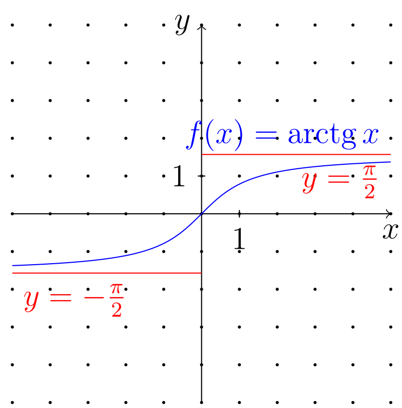
Soit f une fonction dont le domaine contient un intervalle du type $]a, +\infty[$ ($]-\infty, b[$).

Le graphique d'une fonction ne peut admettre aucune des configurations suivantes

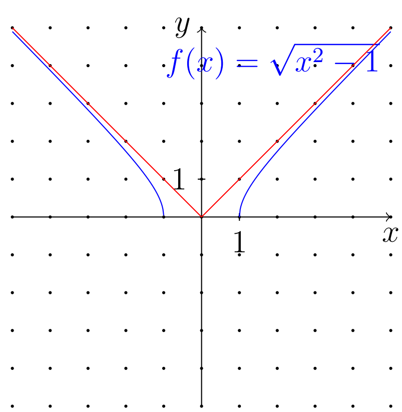
- une asymptote horizontale et une asymptote oblique en $+\infty$ ($-\infty$),
- deux horizontales en $+\infty$ ($-\infty$),
- deux obliques en $+\infty$ ($-\infty$).

Par contre, le graphique d'une fonction peut admettre

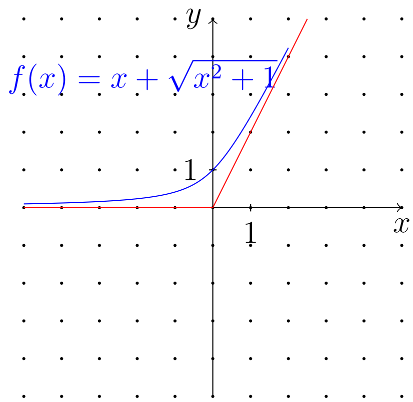
- deux asymptotes horizontales différentes en $+\infty$ et $-\infty$,



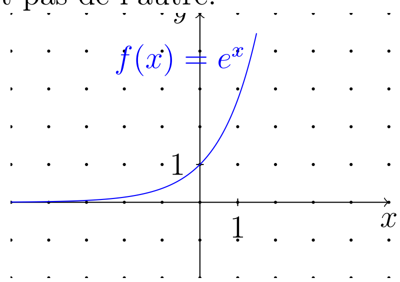
- deux asymptotes obliques différentes en $+\infty$ et $-\infty$



- une symptote oblique d'un côté et une asymptote horizontale de l'autre



- une asymptote d'un côté et pas de l'autre.

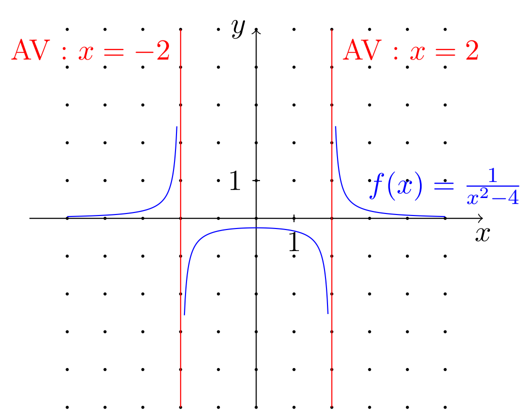


3.4.2 Asymptotes verticales

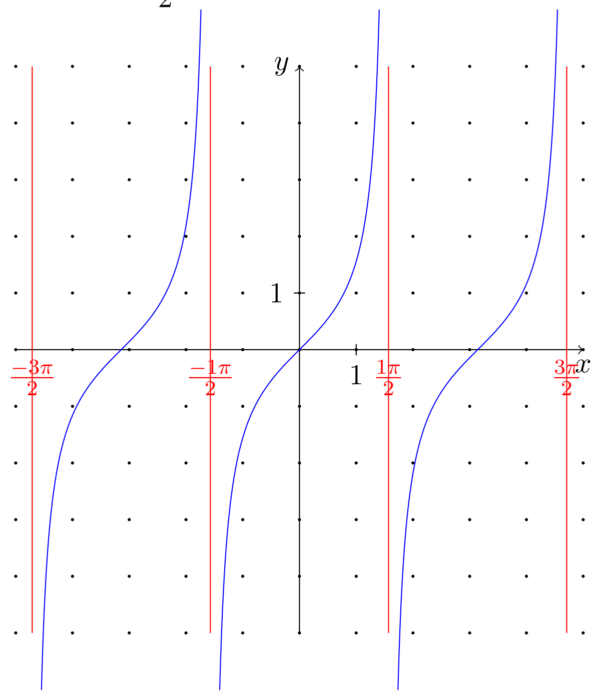
> Le graphique d'une fonction peut admettre plusieurs asymptotes verticales.

Exemple

- Le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, admet les deux droites d'équation $x = 2$ et $x = -2$ comme asymptotes verticales tant à gauche qu'à droite.



- Le graphique de la fonction $f(x) = \operatorname{tg} x$ en admet une infinité d'asymptotes verticales d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



3.5 Limites par valeurs supérieures et inférieures

3.5.1 Définitions

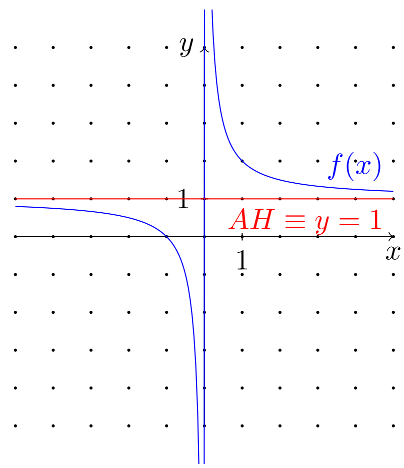
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha$ et que $f(x) > \alpha, \forall x$ suffisamment grand (en valeur absolue), on dit que f tend vers α par des valeurs supérieures. On note
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha^+.$$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha$ et que $f(x) < \alpha, \forall x$ suffisamment grand (en valeur absolue), on dit que f tend vers α par des valeurs inférieures. On note
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha^-.$$

3.5.2 Interprétation graphique

Graphiquement, le graphique de f est au-dessus de l'asymptote horizontale d'équation $y = \alpha$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha^+$ et le graphique de f est en-dessous de l'asymptote horizontale d'équation $y = \alpha$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha^-$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1^-$.
Donc le graphique de f est au-dessus de la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en-dessous en $-\infty$.

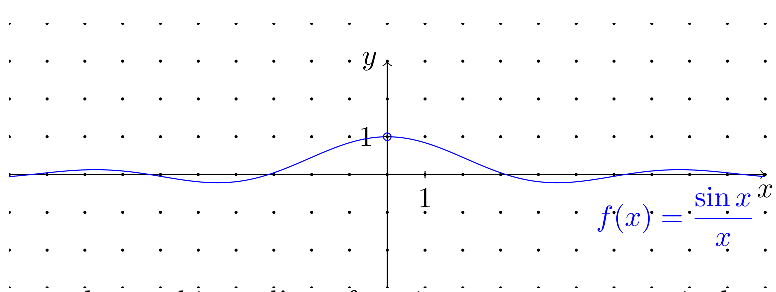


Remarques

- Il existe des fonctions telles que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha$ sans qu'on ne puisse préciser si elles tendent par des valeurs supérieures ou inférieures à α.

  Exemple

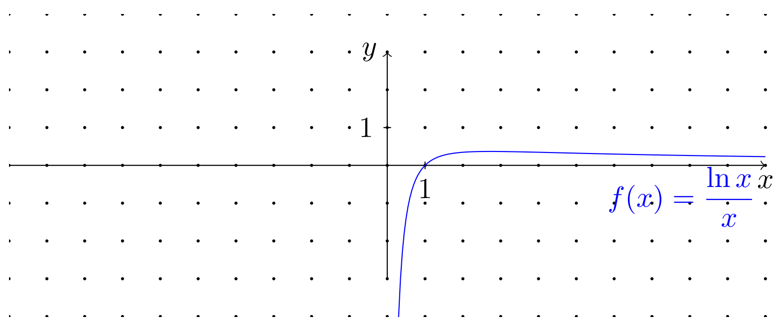
  Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, mais f change périodiquement de signe. Le graphique oscille de part et d'autre de l'axe des abscisses.



- Il est faux de dire que le graphique d'une fonction ne peut pas avoir de point d'intersection avec une asymptote horizontale.

Exemple

La fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $f(1) = 0$.



3.5.3 Position d'un graphique par rapport à une asymptote oblique

Si le graphique d'une fonction admet une asymptote oblique, on peut déterminer la position du graphique par rapport à cette asymptote oblique de la même façon que pour les asymptotes horizontales.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = p^+$, le graphique de f est au-dessus de l'asymptote oblique.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = p^-$, le graphique de f est en-dessous de l'asymptote oblique.

Remarque

Il est parfois difficile de prouver que la limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = p^\pm$. Dans ce cas, on peut utiliser les conditions équivalentes suivantes

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0^+$, le graphique de f est au-dessus de l'asymptote oblique.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0^-$, le graphique de f est en-dessous de l'asymptote oblique.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x}$.

Comme

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

et

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1-x^2}{x} = 2,$$

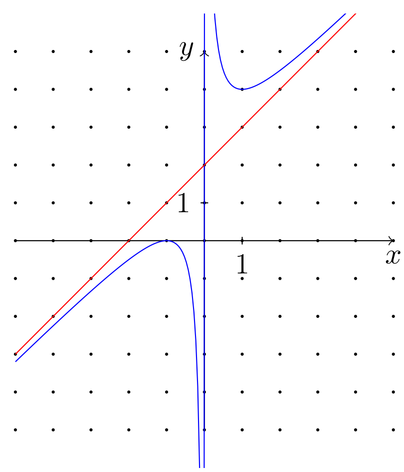
la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique au graphique de f.

Pour déterminer la position du graphique de f par rapport à l'asymptote oblique, on calcule

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1-(x^2+2x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^{\pm}.$$

Le graphique de f est situé au-dessus de l'asymptote en $+\infty$ et en-dessous de l'asymptote en $-\infty$.

Graphiquement, on a



Chapitre 4

Fonctions continues

4.1 Définitions

Une fonction f est *continue en un point* x_0 de son domaine si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Une fonction f est *continue sur un intervalle* $[a, b]$ si elle est continue en tout point de $[a, b]$.
L'ensemble des points où la fonction est continue est le *domaine de continuité* de la fonction.

Remarque

Pour qu'une fonction soit continue en un point x_0, il faut donc que 3 conditions soient réalisées :

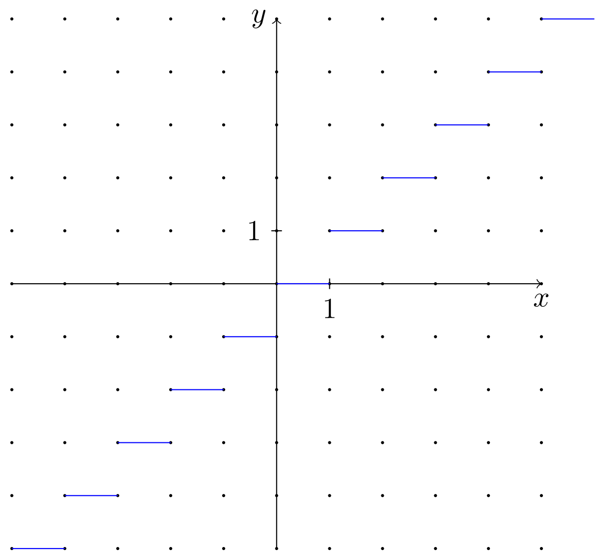
- $f(x_0)$ doit exister. La fonction f doit être définie en x_0.
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ doit exister et être finie
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ doit être égale à $f(x_0)$.

Notation

Soit un intervalle I. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $C_0(I)$.
Une fonction continue sur I appartient donc à $C_0(I)$.

Exemple

La fonction $f(x) = E(x)$ (fonction partie entière) n'est pas continue en chaque entier. En effet, comme $\lim_{x\to 1^-} E(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1^+} E(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} E(x)$ n'existe pas.

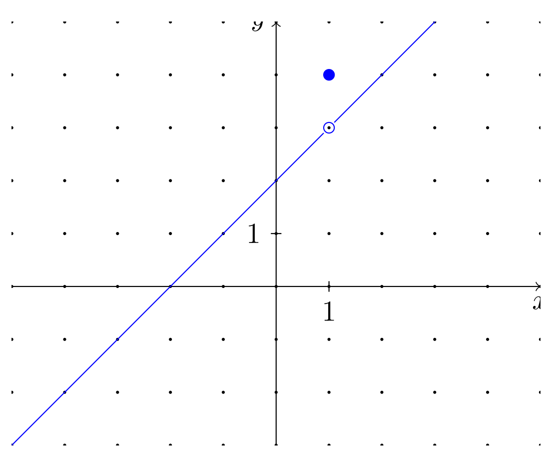


Exemple

La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

n'est pas continue en $x = 1$. En effet, comme $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ et $f(1) = 4$, $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.



4.2 Propriétés

4.2.1 Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, alors

- $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $f \cdot g$ est continue en x_0
- si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

4.2.2 Continuité d'une fonction de fonction

Si f est une fonction continue en x_0 et si g est une fonction continue en $f(x_0)$ alors $g(f(x))$ est continue en x_0.

4.3 Exemples fondamentaux

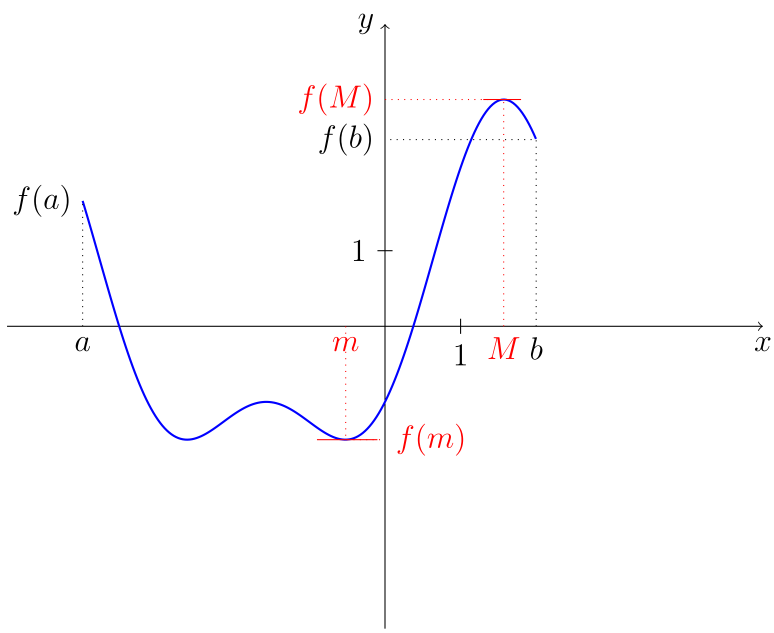
- Tout polynôme est continu sur R
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- Les fonctions $|x|$, $\sqrt{x}$, $\ln x$ et e^x sont continues sur leur domaine de définition.
- Les fonctions $\sin x$, $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$ sont continues sur leur domaine de définition.
- Les fonctions $\arcsin x$, $\operatorname{arcos} x$ et $\operatorname{arctg} x$ sont continues sur leur domaine de définition.

4.4 Théorèmes des fonctions continues

4.4.1 Théorème des bornes atteintes

Une fonction f réelle, continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ réalise ses bornes supérieures et inférieures sur $[a, b]$.

$$\text{Si } f \in C_0[a, b], \exists m \text{ et } M \in [a, b] \text{ tels que } f(m) \leq f(x) \leq f(M), \forall x \in [a, b].$$



Remarque

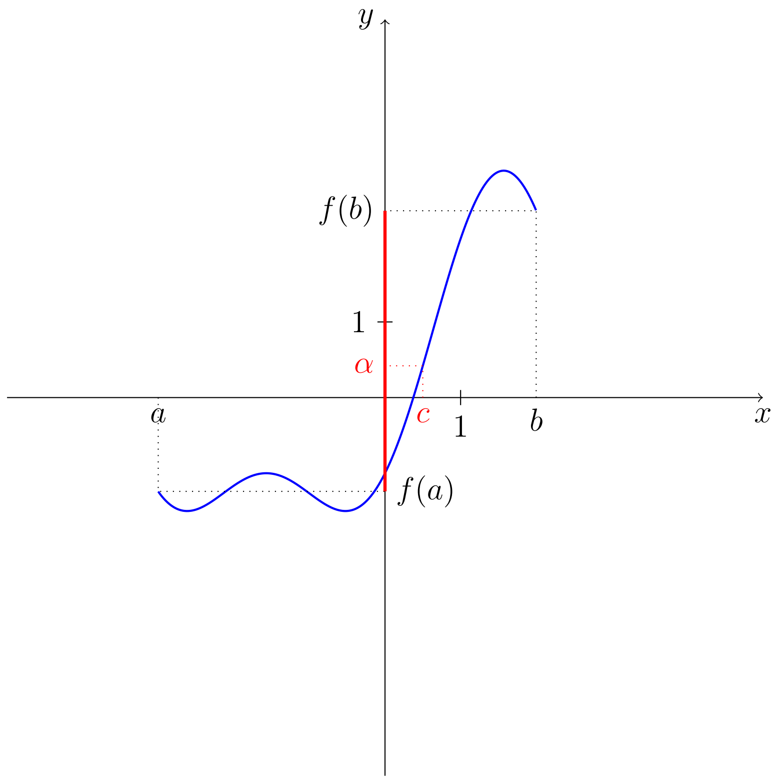
$f(m)$ et $f(M)$ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de f sur $[a, b]$.

On traduit aussi ce théorème en disant

Une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ est bornée.

4.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction réelle, continue sur l'intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a) \neq f(b)$, alors, pour tout réel α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.



Remarques

- Le point c n'est pas nécessairement unique.
- Le point c est unique ssi la fonction f est strictement monotone (croissante ou décroissante).
- Toute fonction continue qui change de signe entre a et b s'annule au moins une fois entre a et b. Cette propriété est à la base de la méthode de résolution d'une équation $f(x) = 0$ par la méthode de dichotomie.

Cette version du théorème des valeurs intermédiaires peut être élargie :

Si f est une fonction réelle, continue sur l'intervalle $]a, b[$ et telle que $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existent et sont différentes, alors, pour tout réel α compris entre $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x)$, il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \alpha$.

Cet énoncé a pour conséquence la propriété suivante :

Tout polynôme de degré impair admet au moins un zéro réel.

En effet, les limites d'un polynôme de dégré impair en $+\infty$ et $-\infty$ sont de signes différents et tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Définitions

- Le *nombre dérivé* de la fonction f au point x_0 (appartenant au domaine de définition de f) est le nombre noté $f'(x_0)$ tel que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  si cette limite existe et est finie. On le note aussi

$$\frac{df}{dx}(x_0).$$

- La fonction f est *dérivable* en x_0 si $f'(x_0)$ existe.
- Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ n'existe pas ou si elle est infinie, la fonction est dite non dérivable en x_0.
- Si f est dérivable en chacun des points d'un ensemble E, elle est dite dérivable sur E.
- Si f est dérivable sur E, la fonction f' qui à chaque point x de E associe son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée f*onction dérivée* de f.
- Si cette fonction dérivée est continue, on dit que f est *continument dérivable.*

Remarques

- Pour que $f'(x_0)$ existe, il faut évidemment que f soit définie en x_0 mais aussi dans un voisinage de x_0 (pour que $f(x_0 + h)$ existe). On ne peut donc pas calculer la dérivée d'une fonction en un point isolé de son domaine de définition.

- On utilise aussi la définition équivalente

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dérivable à droite en $x = a$ si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. On appelle cette limite le nombre dérivé à droite de f en $x = a$. De même, f est dérivable à gauche en $x = b$ si

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

existe et est finie. On appelle cette limite le nombre dérivé à gauche de f en $x = b$.

- L'expression

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est appelée *quotient différentiel* ou *taux d'accroissement* de f entre x_0 et $x_0 + h$.

5.2 Formules de dérivabilité

Le calcul des dérivées des fonctions peut se faire à l'aide des formules et propriétés suivantes :

5.2.1 Dérivées immédiates

- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$
- $(\exp x)' = \exp(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1,1[$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1,1[$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(|x|)' = \begin{cases} 1, \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -1, \forall x \in \mathbb{R}_0^- \end{cases}$

Remarque

La formule de dérivation d'une puissance $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ peut être étendue aux exposants entiers à condition alors que $x \in \mathbb{R}_0$.

Exemple

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

De même, elle peut être étendue aux exposants rationnels $q = \dfrac{m}{p}$ où $m, p \in \mathbb{Z}_0$ sont premiers entre eux. Suivant les valeurs de m et p, la formule est alors vraie dans $\mathbb{R}_0$ ou $\mathbb{R}_0^+$.

Exemple

En particulier,

- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$
- $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}_0$

5.2.2 Propriétés

Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions

- Si f et g sont dérivables en x, alors $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ est dérivable en x, quels que soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ et
$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x) = \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x).$$
- Si f et g sont dérivables en x, alors $f \cdot g$ est dérivable en x et
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$
- Si f et g sont dérivables en x tel que $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exemple

- $\left(3x^2 - \dfrac{2}{x^2}\right)' = 3(x^2)' - 2\left(x^{-2}\right) = 3(2x) - 2(-2)x^{-3} = 6x + \dfrac{4}{x^3}$
- $(x \cdot e^x)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Conséquences

- Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition

Dérivation d'une fonction composée

Si f est une fonction dérivable en x, si g est dérivable en $u = f(x)$, alors la fonction $g(f(x))$ est dérivable en x et

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Conséquences

- Les fonctions sin, cos, exp sont dérivables sur le domaine de dérivabilité de leur argument.
- Les fonctions irrationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition sauf les zéros du radicand.
- Les fonctions valeur absolue sont dérivables sur leur domaine de définition sauf les zéros de l'argument.
- Les fonctions arcsin et arcos sont dérivables sur leur domaine de définition, sauf les valeurs de x qui donnent à l'argument une valeur égale à 1 ou -1.

Exemple

- La fonction $h(x) = (3x^2 - 1)^5$ est la composée de la fonction $f(x) = 3x^2 - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $g(x) = x^5$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction $h(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

  $$\left((3x^2 - 1)^5\right)' = 5(3x^2 - 1)^4 \cdot (3x^2 - 1)' = 5(3x^2 - 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 1)^4.$$

- La fonction $h(x) = e^{\sqrt{x}}$ est la composée de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et de la fonction $g(x) = e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction $h(x)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et

  $$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- La fonction $h(x) = \arcsin(1-x^2)$ est la composée de la fonction $f(x) = 1-x^2$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $g(x) = \arcsin x$ définie et dérivable sur $]-1,1[$.
  La fonction $h(x)$ est donc dérivable sur $\{x : -1 < 1-x^2 < 1\}$.
  Comme

  $$-1 < 1-x^2 < 1 \Leftrightarrow -2 < -x^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < 0 \text{ ou } 0 < x < \sqrt{2},$$

  la fonction $h(x)$ est dérivable sur $]-\sqrt{2}, 0, [\cup]0, \sqrt{2}[$
  et

  $$\big(\arcsin(1-x^2)\big)' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}.$$

  Par suite,

  $$\big(\arcsin(1-x^2)\big)' = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}, \text{ sur }]0, \sqrt{2}[$$

  et

  $$\big(\arcsin(1-x^2)\big)' = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}, \text{ sur }]-\sqrt{2}, 0[$$

Remarque

Il arrive qu'une fonction soit dérivable en un point alors qu'une des expressions qui y interviennent ne soit pas dérivable.

Exemple

Soit $f(x) = |x| \cdot \sin x$ et étudions la dérivabilité de f en $x = 0$.
On a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h \cdot \sin h}{h} = 0^+$$

et

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h \cdot \sin h}{h} = 0^+$$

Par conséquent, f est dérivable en $x = 0$.

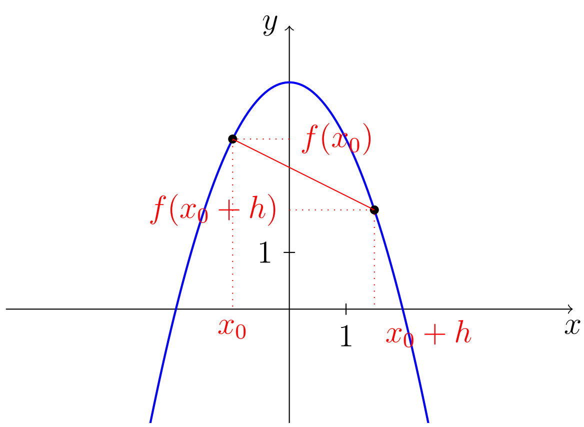
5.3 Interprétation géométrique du nombre dérivé

5.3.1 Tangente au graphique d'une fonction en un de ses points

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$ et $x_0 \in]a, b[$.

Si h est suffisamment petit, $x_0 + h \in]a, b[$.

Les points de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0+h, f(x_0+h))$ sont des points du graphique de f.



La droite qui les unit a pour équation

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

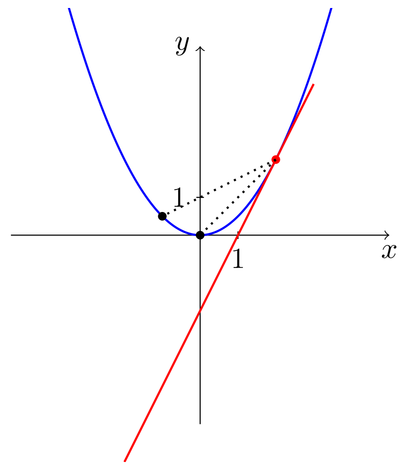
Si h tend vers 0, la droite "pivote" autour du point $(x_0, f(x_0))$. On appelle *tangente* au graphique de f au point d'abscisse x_0 la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On a $f(2) = 2$, $f'(x) = x$ et $f'(2) = 2$.
L'équation de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $x = 2$ est donc

$$y - 2 = 2(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$



Le nombre dérivé d'une fonction en un point est donc le coefficient directeur de la tangente au graphique de la fonction en ce point.
Par conséquent, si la dérivée d'une fonction f est un point x_0 est nulle, alors la tangente au graphique de f au point d'abscisse x_0 est horizontale.

Remarque

Si le graphique de f est représenté dans un repère orthonormé, on peut appeler aussi le coefficient directeur "coefficient angulaire" ou "pente".

5.3.2 Points de non dérivabilité

Point à tangente verticale

Le graphique d'une fonction admet une tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$ si

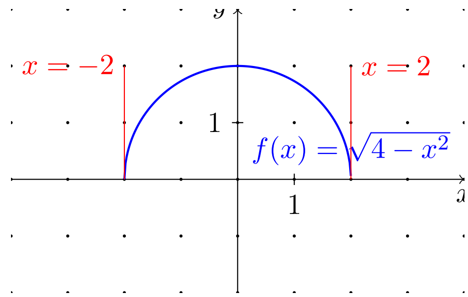
- x_0 appartient au domaine de définition de f
- f n'est pas dérivable en x_0
- $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont des points à tangente verticale car $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

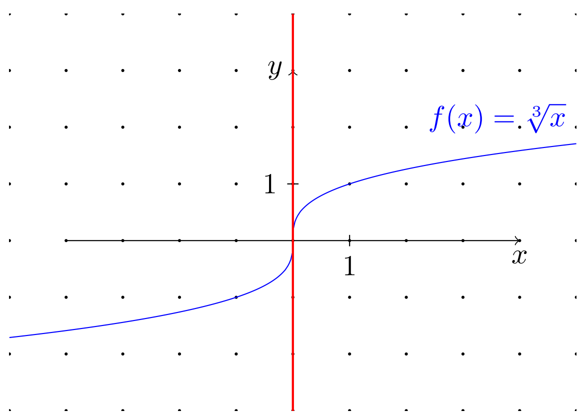


Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_0$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Le point $(0, 0)$ est un point à tangente verticale car $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f'(x) = +\infty$



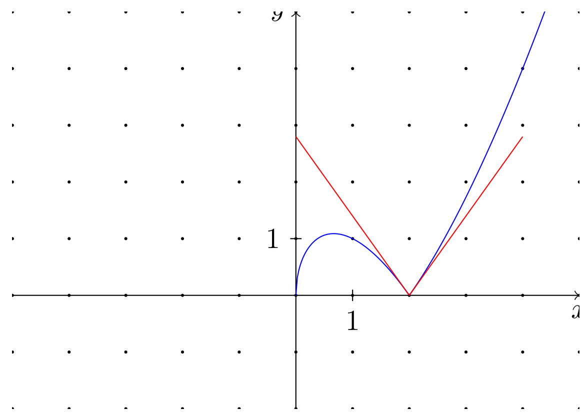
Point anguleux

Le graphique d'une fonction admet un *point anguleux* au point $(x_0, f(x_0))$ si

- x_0 appartient au domaine de définition de f
- f n'est pas dérivable en x_0
- les limites $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ existent, sont finies et différentes.

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{x(x-2)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0,2[\cup]2,+\infty[$.
Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{(x-2)(3x-2)}{2\sqrt{x(x-2)^2}}$.
Le point $(2,0)$ est un point anguleux car $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = -\sqrt{2}$



Le graphique de f admet une tangente à gauche d'équation $y = -\sqrt{2}(x-2)$ et une tangente à droite d'équation $y = \sqrt{2}(x-2)$.

Remarque

Le point (0,0) est un point à tangente verticale.

Remarque

Une deuxième possibilité pour avoir un point anguleux est qu'une des deux limites soit finie et l'autre infinie. Mais il est peu fréquent avec des fonctions "conventionnelles".

Point de rebroussement

Le graphique d'une fonction admet un *point de rebroussement* au point $(x_0, f(x_0))$ si

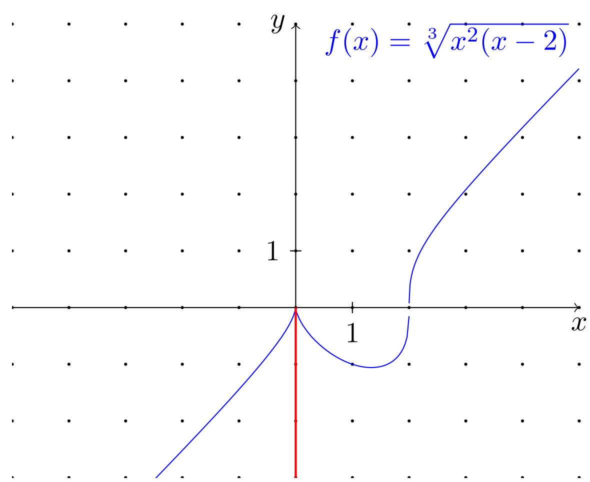
- x_0 appartient au domaine de définition de f
- f n'est pas dérivable en x_0
- les limites $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ existent et sont infinies et différentes.

Exemple

La fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$.
Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{x(3x-4)}{\sqrt[3]{(x^2(x-2))^2}}$.
Le point $(0,0)$ est un point de rebroussement car $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty$



Remarque

Le point (2,0) est un point à tangente verticale.

5.4 Théorèmes des fonctions dérivables

5.4.1 Lien entre continuité et dérivabilité

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Remarque

La réciproque n'est pas vraie. La fonction $|x|$ est continue en $x = 0$, mais pas dérivable en ce point.

5.4.2 Condition nécessaire pour avoir un extremum

Si f est réelle, dérivable sur $]a, b[$ et si il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ (ou } f(x_0) \leq f(x)), \forall x \in]a, b[,$$

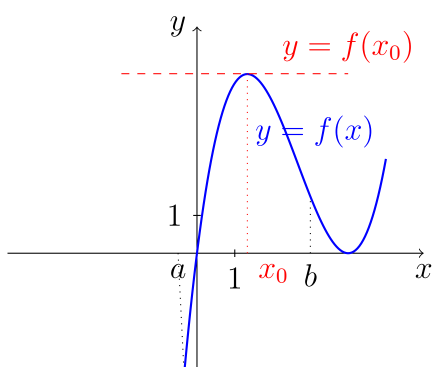
alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

- On peut formuler cette énoncé de façon plus littéraire :

  Si une fonction f dérivable sur un intervalle $]a, b[$ admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in]a, b[$, alors le nombre dérivé de f en x_0 est nul.

  Cela a pour conséquence que si f admet un maximum ou un minimum en un point x_0 où f est dérivable, la tangente au graphique de f en $(x_0, f(x_0))$ est horizontale.



- Ce n'est pas une condition suffisante : une fonction peut admettre un maximum ou un minimum en un point où la fonction n'est pas dérivable.

  Exemple

  $f(x) = |x|$ admet un minimum en $x = 0$, mais n'est pas dérivable en $x = 0$. Donc sa dérivée n'y est pas nulle !

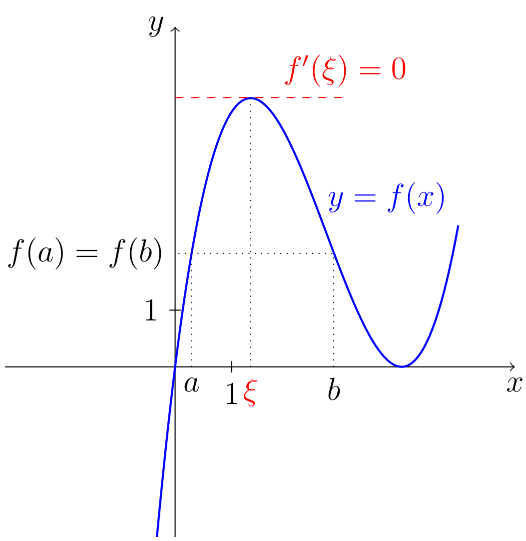
- La réciproque de cette propriété n'est pas vraie. Il existe des points où la dérivée d'une fonction est nulle sans que la fonction n'y admette un extremum.

Exemple

La fonction $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$. Pourtant la fonction n'admet ni maximum, ni minimum en $x = 0$.

5.4.3 Théoreme de Rolle

Si f est réelle, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.

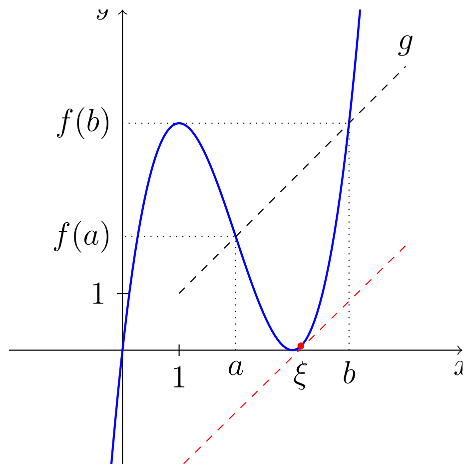


Cela veut donc dire que si une fonction vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, son graphique admet une tangente horizontale en (au moins) un de ses points dont l'abscisse est dans l'intervalle.

5.4.4 Théorème des accroissements finis

Si f est réelle, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Remarques

- La thèse peut aussi s'écrire

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(\xi)$$

.

- Cela veut donc dire que si une fonction vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis (TAF), son graphique admet une tangente parallèle à la droite joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ en (au moins) un de ses points dont l'abscisse est dans l'intervalle.

5.4.5 Théorème de l'Hospital

Si f et g sont réelles et dérivables sur $]a, b[$,

si $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$,

si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ ou ∞

si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

alors $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Remarques

- Plusieurs applications successives du théorème peuvent être nécessaires pour lever certaines indéterminations.

Exemple

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\\ &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

- Le théorème de l'Hospital ne s'applique que pour des indéterminations de type $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ou $\left[\frac{0}{0}\right]$. Cependant, il permet aussi de lever des indéterminations de type $[0\cdot\infty]$ à condition de transformer l'expression.

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(e^x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

- Le théorème de l'Hospital donne la bonne valeur de la limite de la fonction, mais pas nécessairement la façon dont la fonction converge vers sa limite.

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1.$$

On constate cependant que comme $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} > 1$, la limite initiale est supérieure à 1, alors que comme $x < x+1$, la limite du quotient des dérivées est inférieure à 1.

- Si les hypothèses ne sont pas vérifiées, le théorème de l'Hospital peut donner un résultat faux.

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \text{"}\dfrac{\infty}{0}\text{"} = 0$ n'est pas un cas d'indétermination.

Si on lui applique erronément le théorème de l'Hospital, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = -\infty$.

Chapitre 6

Variations et extrema d'une fonction

6.1 Lien entre dérivée et croissance

6.1.1 Définition

Etudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les ensembles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante.
Généralement, le but est de déterminer ensuite les extrema de la fonction.

6.1.2 Propriétés

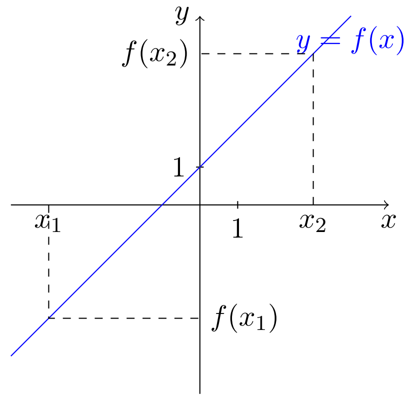
La fonction f réelle est croissante (décroissante) sur l'intervalle I ssi le taux d'accroissement

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

est positif (négatif) pour tous $x_1, x_2 \in I$.

Exemple

La fonction $f(x) = x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Si f désigne une fonction réelle, dérivable sur l'intervalle ouvert I, alors f est monotone croissante (décroissante) sur I ssi $f' \geq 0 (f' \leq 0)$ sur I

Si f désigne une fonction réelle, dérivable sur l'intervalle ouvert I et si $f' > 0 (f' < 0)$ sur I alors f est strictement croissante (décroissante) sur I

Exemple

La fonction $f(x) = \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
Comme $\dfrac{1}{x} > 0$ sur R_0^+, $\ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_0^+$.

Remarque

La réciproque de cette propriété n'est pas vraie.

Exemple

La fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$.

6.2 Extrema

6.2.1 Point stationnaire

On appelle *point stationnaire* d'une fonction f dérivable un zéro de f'.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2 - x$.
Sa dérivée est $f'(x) = 2x - 1$. f n'admet qu'un seul point stationnaire en $x = \frac{1}{2}$.

6.2.2 Condition suffisante pour avoir un extremum local

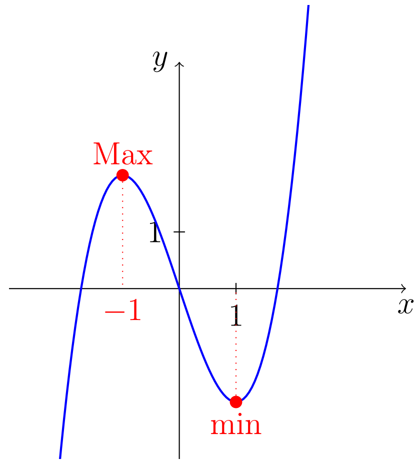
Si f est réelle, dérivable sur un intervalle ouvert I et s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f'(x) \geq 0 (f' \leq 0)$ à droite de x_0 et $f'(x) \leq 0 (f' \geq 0)$ à gauche de x_0, alors la fonction admet un maximum (minimum) local en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

Par conséquent, si f présente un extremum local en un point, sa dérivée y est nulle.
La recherche des extrema d'une fonction se fera donc en cherchant les points stationnaires de f.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x$.
Sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 3$. Les points stationnaires de f sont donc situées en $x = -1$ et $x = 1$.
On peut alors construire le tableau de signe de f' et de variation de f suivant

x		-1		1	
$f'(x) = 3(x^2 - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

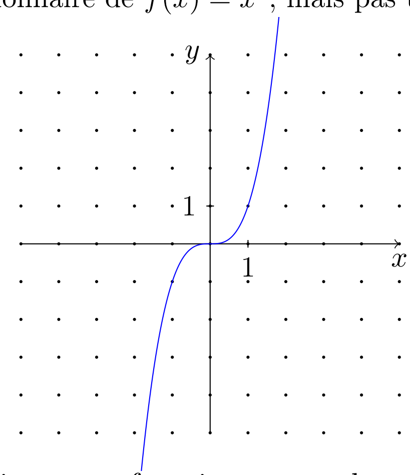


Remarques

- Si x_0 est un point stationnaire de f, cela ne signifie pas que x_0 est un extremum de f. Pour cela, il faut que f' change de signe de part et d'autre de x_0.

  Exemple

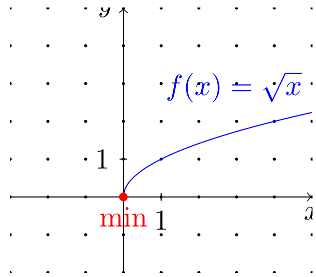
  $x_0 = 0$ est un point stationnaire de $f(x) = x^3$, mais pas un extremum.

- La condition n'est pas nécessaire : une fonction peut admettre un extremum en un point où elle n'est pas dérivable.

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ admet un minimum en $x = 0$ alors qu'elle n'est pas dérivable en $x = 0$.



6.2.3 Détermination de la nature de l'extremum

A l'aide de la dérivée première

On dispose des critères de détermination d'extrema suivants :

- f présente un minimum local en x_0 si

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x) < 0, \forall x < x_0, x \in V(x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x > x_0, x \in V(x_0) \end{cases}$$

ou encore sous forme de tableau

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- f présente un maximum local en x_0 si

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x) > 0, \forall x < x_0, x \in V(x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x > x_0, x \in V(x_0) \end{cases}$$

ou encore, sous forme de tableau

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

A l'aide de la dérivée seconde

Pour certaines fonctions, l'étude du signe de la dérivée première peut se révéler ardue (souvent, alors la recherche des points stationnaires n'est pas évidente non plus).
On peut alors, si la fonction est dérivable deux fois sur un voisinage d'un point stationnaire x_0, déterminer la nature de ce point stationnaire à l'aide de la valeur de la dérivée seconde en ce point.

Si f est une fonction est dérivable deux fois sur un voisinage d'un point x_0, alors f admet

- un maximum en x_0 si $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$
- un minimum en x_0 si $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = xe^x - x$.
On constate facilement que sa dérivée $f'(x) = (x+1)e^x - 1$ s'annule en $x = 0$, mais l'étude du signe de f' est délicate.
Calculons $f''(x) = (x+2)e^x$. On a $f''(0) = 2$.
La fonction f admet donc un minimum local en $x = 0$.

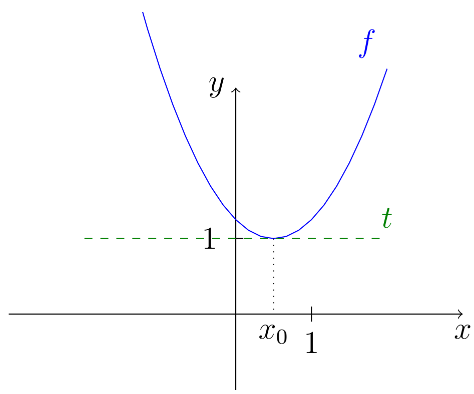
Remarques

- Si $f''(x_0) = 0$, on ne sait rien dire. Il faudrait utiliser des dérivées d'ordre supérieur pour déterminer la nature du point stationnaire.
- Cette méthode s'applique également aux fonctions dont on peut étudier le signe de la dérivée première.
  Par exemple, on peut l'appliquer à une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$.
  Elle admet un seul point stationnaire $x = -\dfrac{b}{2a}$.
  La dérivée seconde étant $f''(x) = 2a$, la fonction admet un minimum si $a > 0$ ou un maximum si $a < 0$.
- La propriété peut se justifier à l'aide de la concavité du graphique (voir paragraphe

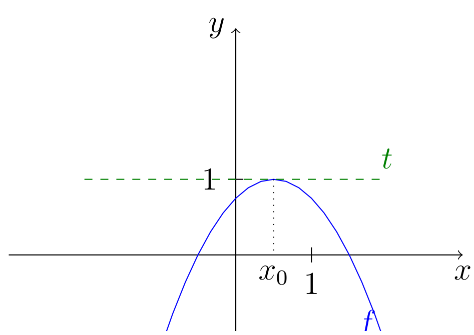
suivant).

Ainsi, si x_0 est un point stationnaire, la tangente t au graphique au point d'abscisse x_0 est horizontale.

Si en plus $f''(x_0) > 0$, le graphique a sa concavité tournée vers le haut ; la tangente est située en-dessous du graphique, la fonction admet un minimum.



Si au contraire, $f''(x_0) < 0$, le graphique a sa concavité tournée vers le bas ; la tangente est située en-dessous du graphique, la fonction admet un maximum.



6.3 Concavité et point d'inflexion

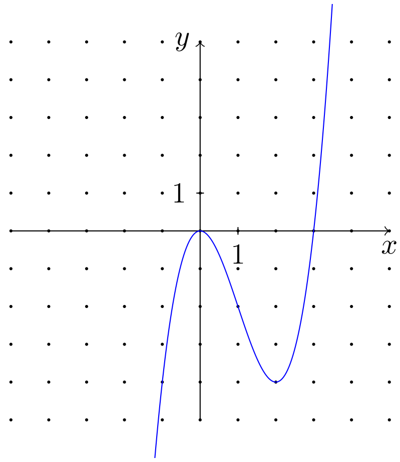
6.3.1 Définitions

On dit que le graphique d'une fonction f est *convexe* sur un intervalle I lorsqu'il y tourne sa concavité vers le haut.

On dit que le graphique d'une fonction f est *concave* sur un intervalle I lorsqu'il y tourne sa concavité vers le bas.

Exemple

Etudier la concavité du graphique de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2$.



Le graphique est concave sur $]-\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.

Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, alors le graphique de f *tourne sa concavité vers le haut* (bas)

- ssi f' est croissante (décroissante) sur I
- ssi f'' est positive (négative) sur I

Ces deux conditions étant équivalentes.

Si f est deux fois continument dérivable sur un intervalle ouvert I, si $x_0 \in I$ et si $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) dans un voisinage de x_0, alors f est convexe (concave).

6.3.2 Point d'inflexion

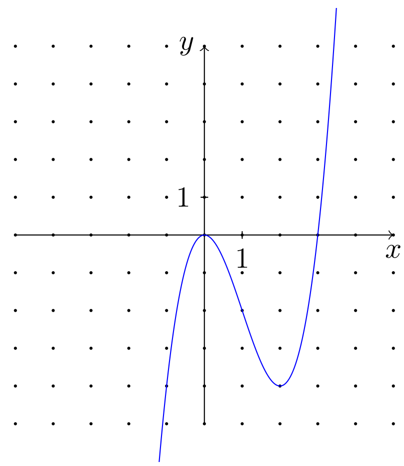
Le graphique d'une fonction f admet un *point d'inflexion* au point d'abscisse x_0 si le graphique change de concavité de part et d'autre de x_0.

Condition suffisante pour obtenir un point d'inflexion

Si f est deux fois dérivable sur I et si $x_0 \in I$, alors le graphe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 si f'' change de signe de part et d'autre de x_0.

Exemple

Rechercher les éventuels points d'inflexion du graphique de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2$.



On a $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$.

On construit alors le tableau de signe de $f''(x)$ et de variation de f.

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

Remarque

- La plupart des fonctions deux fois dérivables étant deux fois continûment dérivables, la dérivée seconde s'annule donc en un point d'inflexion.

- Mais il existe des zéros de la dérivée seconde qui ne sont pas des abscisses de point d'inflexion.

Exemple

La dérivée seconde de $f(x) = x^4$ est $f''(x) = 12x^2$.

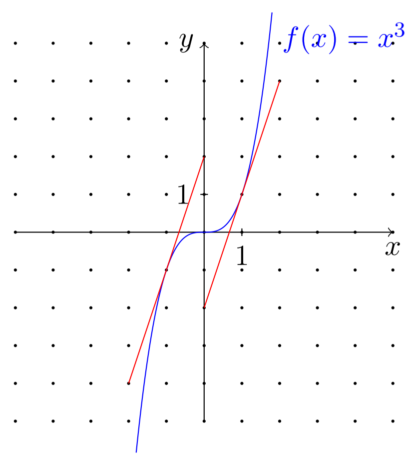
Elle s'annule en $x = 0$, mais le graphique de f n'admet pas de point d'inflexion en $x = 0$ car $f''(x)$ ne change pas de signe de part et d'autre de $x = 0$.

6.3.3 Tangente et concavité d'un graphique

Si f est une fonction dérivable en x_0. Le graphique d'une fonction f a sa concavité tournée vers le haut (bas) sur un intervalle I ssi la tangente au graphique de f en tout point de I est en-dessous (au-dessus) du graphique de f.

Exemple

Le graphique de la fonction $f(x) = x^3$ tourne sa concavité vers la haut sur R^+ et vers le bas sur R^-.



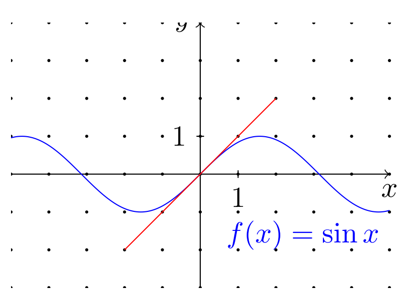
La tangente au graphique de f en $x = 1$ est en-dessous du graphique de f.

La tangente au graphique de f en $x = -1$ est au-dessus du graphique de f.

Conséquence

Si f est dérivable et si x_0 est un point d'inflexion, la tangente au graphique de la fonction en x_0 traverse le graphique.

Exemple

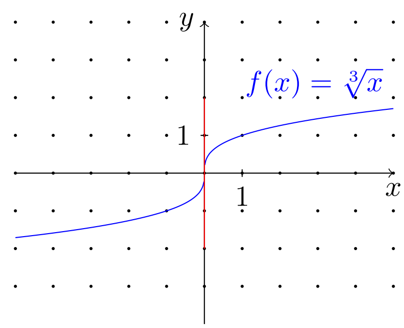


Remarque

Il s'agit d'une condition suffisante, pas d'une condition nécessaire. Le graphique d'une fonction peut admettre un point d'inflexion en un point où la fonction n'est pas dérivable. Il s'agit alors d'un point à tangente verticale.

Exemple

Le graphique de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ admet un point d'inflexion à tangente verticale en $x = 0$.



Chapitre 7

Fonctions trigonométriques

7.1 Convention

On dit qu'une fonction est *trigonométrique* lorsque la variable y apparaît comme argument d'une fonction sin, cos, ... Une somme, un produit, ... de fonctions trigonométriques est également une fonction trigonométrique.
La variable est alors généralement exprimée en radians.

7.2 Période

7.2.1 Définition

Une fonction f est *périodique* s'il existe un nombre T tel que

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in \text{dom } f.$$

La *période* d'une fonction f périodique est le plus petit nombre strictement positif tel que

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in \text{dom } f.$$

Exemple

La fonction $f(x) = \sin x$ est périodique de période 2π.

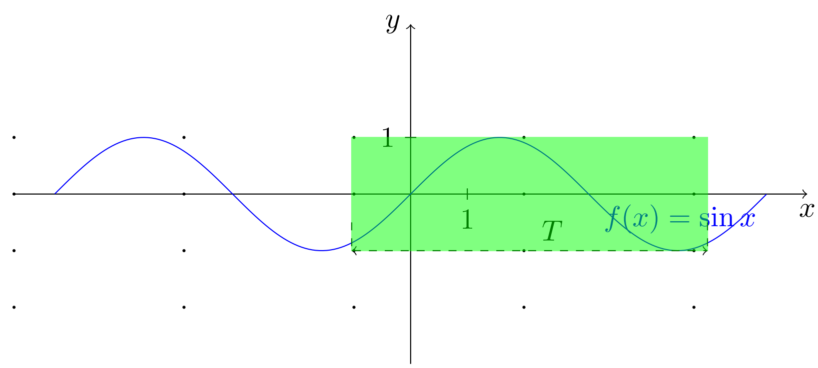
En effet, $\sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

7.2.2 Interprétation graphique

Le graphique d'une fonction périodique a donc la particularité de comporter des "séquences" de longueur T qui sont identiques à une translation horizontale de longueur T.

Exemple

Soit $f(x) = \sin x$.



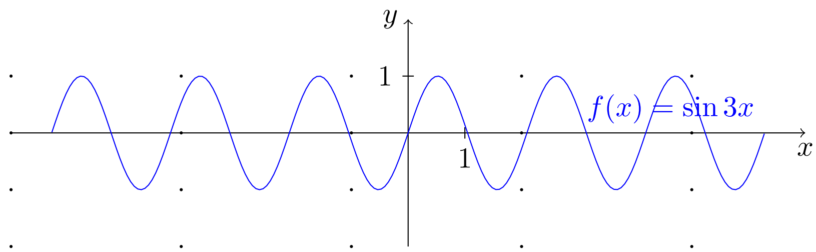
Pour cette raison, lorsqu'on étudie une fonction périodique, on se contente de l'étudier sur un intervalle de longueur égale à sa période.

7.2.3 Période des principales fonctions trigonométriques

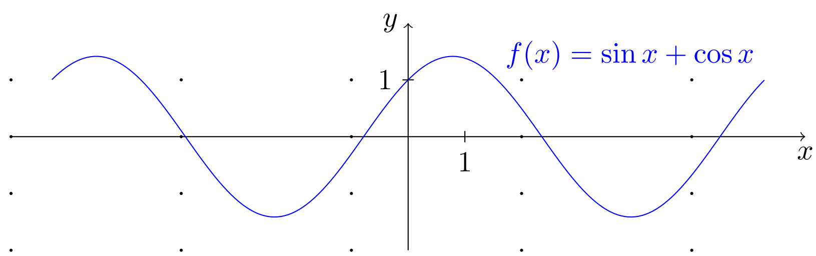
- Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques de période 2π.
- Les fonctions $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ sont périodiques de période π.
- Si f est périodique de période T, alors $f(kx), k \in \mathbb{R}$ est périodique de période $\dfrac{T}{|k|}$
- Si f et g sont deux fonctions périodiques de périodes respectives T_1 et T_2 telles que $\dfrac{T_1}{T_2}$ est rationnel, alors $f + g$ est périodique de période égale au $\operatorname{ppcm}(T_1, T_2)$.

Exemple

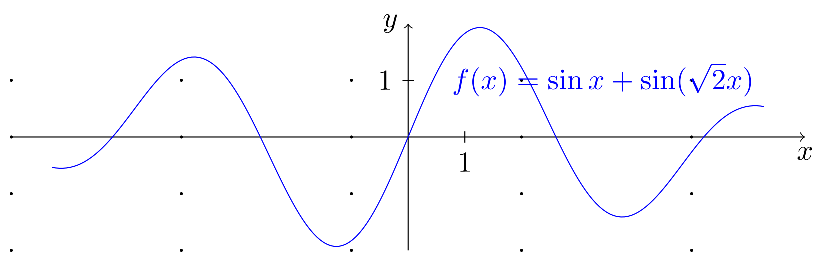
La fonction $f(x) = \sin 3x$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.



La fonction $f(x) = \sin x + \cos x$ est périodique de période 2π.



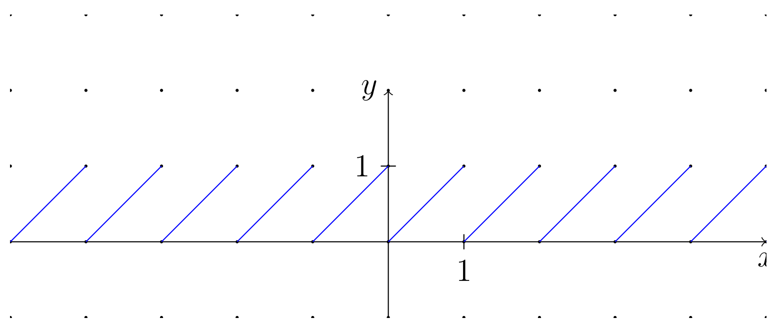
La fonction $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$ n'est pas périodique.



Remarque

Il existe des fonctions non trigonométriques qui sont périodiques :

- une fonction constante (mais il n'est pas possible de trouver sa période)
- des fonctions du type $f(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x.



7.2.4 Trouver la période d'une fonction trigonométrique

Pour trouver la période d'une fonction trigonométrique, on peut utiliser les propriétés ci-dessus ou encore résoudre l'équation

$$f(x+T) = f(x)$$

par rapport à T et de conserver la plus petite solution strictement positive, indépendante de x.

Exemple

Déterminons la période de la fonction $f(x) = \sin^2 x$.

On doit trouver le plus petit T strictement positif tel que $\sin^2(x+T) = \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Or,

$$\begin{aligned}
\sin^2(x+T) = \sin^2 x &\Leftrightarrow \sin(x+T) = \sin x \text{ ou } \Leftrightarrow \sin(x+T) = -\sin x \\
&\Leftrightarrow x+T = x+2k\pi \text{ ou } x+T = \pi - x + 2k\pi \\
&\text{ou } x+T = -x+2k\pi \text{ ou } x+T = \pi + x + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow T = 2k\pi \text{ ou } \underbrace{T = \pi - 2x + 2k\pi}_{\text{dépend de } x} \text{ ou } \underbrace{T = -2x + 2k\pi}_{\text{dépend de } x} \text{ ou } T = \pi + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow T = k\pi
\end{aligned}$$

La plus petite solution strictement positive est donc $T = \pi$.

7.2.5 Asymptotes

Une fonction périodique n'admet pas d'asymptote horizontale ou oblique. Mais elle peut admettre une infinité d'asymptotes verticales.

7.3 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Remarque

A partir de cette limite remarquable, on peut calculer les limites suivantes

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

  On a
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$

  On a
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \cdot \frac{\alpha x}{\beta x} \cdot \frac{\beta x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

  Vu les formules de Carnot, on a
  $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}_{\to 1} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

  Vu les formules de Carnot, on a
  $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}} = \frac{2}{4} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}_{\to 1} = \frac{1}{2}$$

Chapitre 8

Fonctions réciproques

8.1 Bijection

8.1.1 Injection

Définition

Une fonction $f : A \to B$ est une *injection* de A dans B si deux points distincts quelconques de A ont des images différentes dans B.
On peut écrire

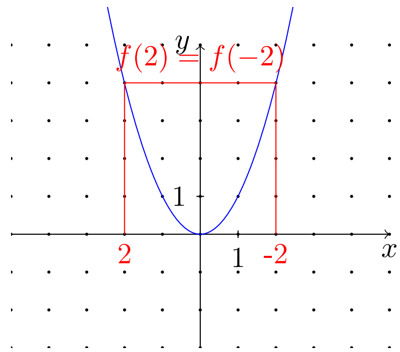
$$f \text{ est une injection de } A \text{ dans } B \text{ si } \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou encore, en contraposant,

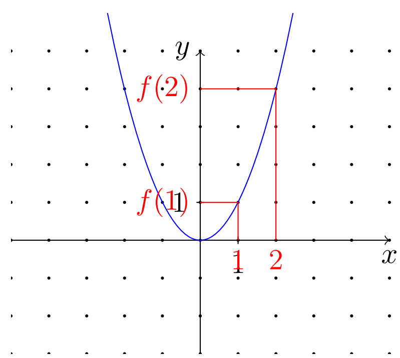
$$f \text{ est une injection de } A \text{ dans } B \text{ si } \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemple

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$. Cette fonction n'est pas une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car deux points distincts (par exemple $x = -2$ et $x = 2$) ont la même image.



Par contre, la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est une injection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.



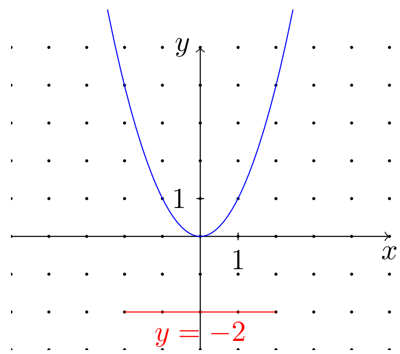
De même, la restriction de f à $\mathbb{R}^-$ est une injection de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}$.

8.1.2 Surjection

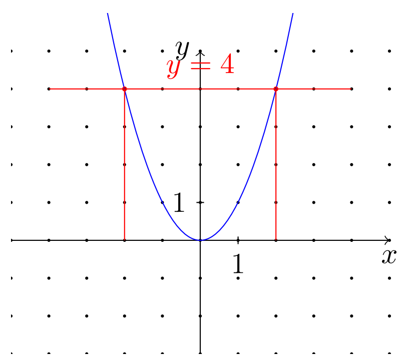
Une fonction $f : A \to B$ est une *surjection* de A dans B si tout point de B est l'image d'au moins un point de A. On peut écrire
f est une surjection de A dans B si $\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$.

Exemple

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$. Cette fonction n'est pas une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car le point $y = -2$ (entre autres) n'est l'image d'aucun point de $\mathbb{R}$.



Par contre, la fonction f est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.



Le point $y = 4$ appartenant à $\mathbb{R}^+$ est l'image d'au moins un point ($x = 2$ ou $x = -2$) de $\mathbb{R}$.

8.1.3 Bijection

Une fonction $f : A \to B$ est une *bijection* de A dans B si elle est à la fois une injection et une surjection de A dans B. Par conséquent, si f est une bijection de A dans B, tout point de B est l'image d'un et un seul point de A.

Exemple

La fonction $f(x) = \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_0^+$.

Condition suffisante pour être une bijection

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b] \subset$ dom f, alors f est une injection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$.

Par conséquent, lorsqu'une fonction n'est pas une bijection, il est généralement possible de considérer une restriction de cette fonction à un intervalle où elle est strictement monotone. La restriction est alors une bijection de cet intervalle dans l'image de l'intervalle.
Cette restriction n'est pas unique. Une fonction peut donc être une bijection entre plusieurs couples d'ensembles.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Mais elle est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ ou encore de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^+$.

Convention

En général, on prend un intervalle d'étendue maximale sur lequel la fonction est strictement monotone.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ est aussi une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Mais sauf cas exceptionnel, on considère plutôt la bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Remarques

Des versions étendues de cette condition suffisante existent :

- Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b] \subset$ dom f, alors f est une injection de $[a, b]$ dans $[f(b), f(a)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[\subset$ dom f, alors f est une injection de $]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)]$ dans $[f(a), f(b)]$.

Il s'agit bien de conditions suffisantes, pas de conditions nécessaires. Il existe des fonctions non strictement (dé)croissantes ou non continues qui sont des bijections.

Exemple

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_0$ dans $\mathbb{R}_0$.

8.2 Fonction réciproque

8.2.1 Définition

Si $f : A \mapsto B : x \to f(x)$ est une bijection de A dans B, alors la *fonction réciproque* de f est la fonction, notée f^{-1}, de B dans A telle que

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), x \in A, y \in B.$$

Il est indispensable de bien comprendre que le domaine de définition de f^{-1} est l'ensemble des valeurs de f et que l'ensemble des valeurs de f^{-1} est le domaine de définition de f. Pour trouver l'expression de f^{-1}, il suffit de résoudre l'équation $y = f(x)$ par rapport à x.

Néanmoins, afin de retrouver des notations usuelles, il est courant donner l'expression de la fonction réciproque en appelant la variable x.

Exemple

Considérons la fonction $f(t) = t + 273$ qui, à chaque température t exprimée en degrés celsius, associe la température T exprimée en Kelvin.
Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour des raisons physiques, le domaine de f est $[-273, +\infty[$ et son ensemble des valeurs est $[0, +\infty]$. f est donc une bijection entre ces deux intervalles.
La fonction réciproque de f est la fonction f^{-1}, définie sur $[0, +\infty[$ et dont l'ensemble des valeurs est $[-273, +\infty[$ dont l'expression est

$$f^{-1}(T) = T - 273.$$

car

$$T = t + 273 \Leftrightarrow t = T - 273$$

Cette définition a les conséquences suivantes :

- $\forall x \in A : f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Son ensemble des valeurs est $[2, +\infty[$.

Elle est donc une bijection entre ces deux ensembles. Elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[2, +\infty[$ et à valeurs dans $[1, +\infty[$ dont l'expression est

$$f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1.$$

car $y = \sqrt{x-1} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y - 2 \Leftrightarrow x = (y-2)^2 + 1$.

On peut vérifier que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x-1} + 2 - 2)^2 + 1 = x$$

et que, pour tout $y \in [2, +\infty[$, on a

$$f(f^{-1}(y)) = \sqrt{(y-2)^2 + 1 - 1} + 2 = y.$$

Remarque

Bien que la fonction $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$ soit définie sur $\mathbb{R}$, seule sa restriction à l'intervalle $[2, +\infty[$ est la réciproque de f.

La restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 2[$ est la réciproque d'une autre fonction (à savoir $g(x) = 2 - \sqrt{x-1}$).

8.2.2 Limites

Si f, bijection de A dans B, admet f^{-1} comme fonction réciproque et si a et b sont respectivement adhérents à A et B alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to b} f^{-1}(x) = a.$$

Exemple

La fonction $f(x) = \ln x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est la fonction exponentielle $f^{-1}(x) = \exp(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et dont l'ensemble des valeurs est $]0, +\infty[$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0^+.$$

8.2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Si f est une bijection de l'intervalle I dans $f(I)$, dérivable sur l'intervalle I alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I) \backslash \{f(x) : f'(x) = 0\}$ et

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Cette propriété est essentielle lorsqu'il faut établir le domaine de dérivabilité et la dérivée d'une nouvelle fonction.

Exemple

La fonction $f(x) = \sin x$ est une bijection de $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $f(I) = [-1, 1]$. De plus, $\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa réciproque, la fonction $\arcsin x$ est donc dérivable sur $f(I) \backslash \{\sin x : \cos x = 0\}$ càd sur $]-1, 1[$. De plus,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exemple

Reprenons l'exemple de la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \ln x$: comme $f'(x) = \frac{1}{x}$, on a $f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{\exp(x)}$ et

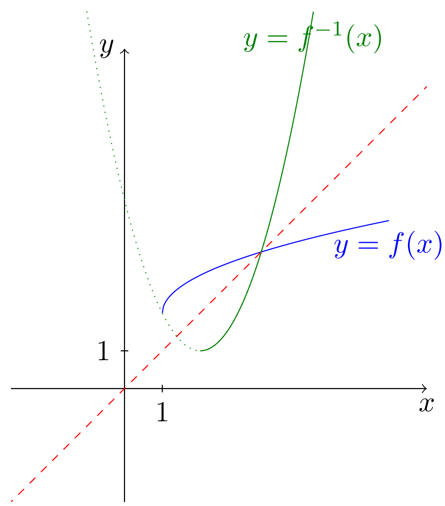
$$\exp(x)' = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

8.2.4 Graphique

Les graphiques de deux fonctions réciproques $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ dans un repère orthonormé sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple

Reprenons l'exemple de $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ et $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$.



8.3 Fonctions cyclométriques

On appelle *fonctions cyclométriques* les fonctions $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ et $\operatorname{arcotg} x$.

8.3.1 $f(x) = \arcsin x$

La fonction $\sin x$ est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Son ensemble des valeurs est $[-1, 1]$.

Elle est donc une bijection entre ces deux intervalles. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\arcsin x$, définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y, \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y \in [-1, 1]$$

ou encore

$$\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

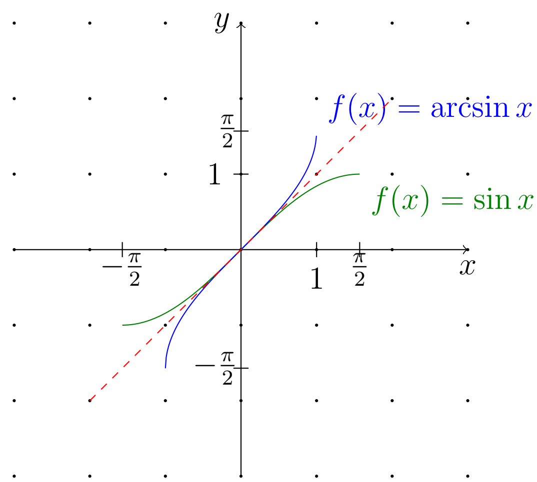
et

$$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1, 1].$$

Grâce à la formule de dérivation des fonctions réciproques, on peut démontrer que $\arcsin x$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Son graphique est



Remarques

- Ces dernières relations ne sont pas correctes si on sort de leur domaine de validité. Ainsi,

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

- La fonction $\sin x$ est aussi strictement monotone sur d'autres intervalles que $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On aurait donc pu définir la fonction $\arcsin x$ autrement.
  On peut toutefois prouver que la réciproque de la restriction de la fonction $\sin x$ à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ est la fonction $\pi - \arcsin x$.

8.3.2 $f(x) = \arccos x$

La fonction $\cos x$ est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Son ensemble des valeurs est $[-1, 1]$.
Elle est donc une bijection entre ces deux intervalles. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\arccos x$, définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$ telle que

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y, \qquad x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]$$

ou encore

$$\arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0, \pi]$$

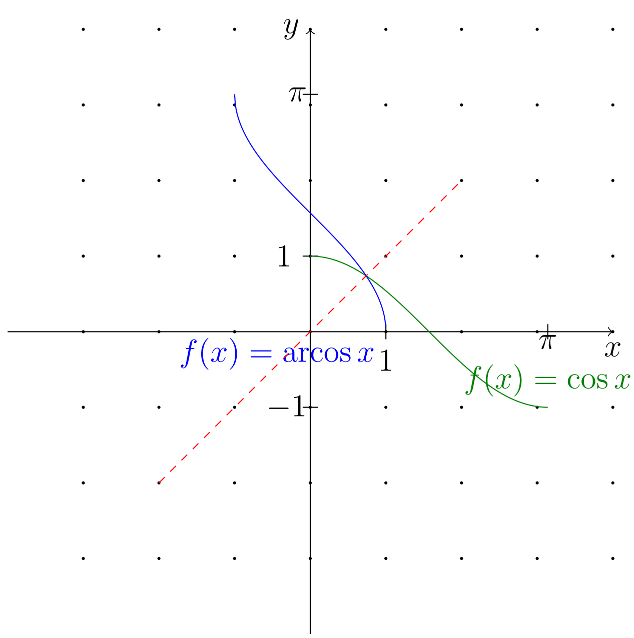
et

$$\cos(\arccos x) = x, \forall x \in [-1, 1].$$

Grâce à la formule de dérivation des fonctions réciproques, on peut démontrer que $\arccos x$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Son graphique est



8.3.3 $f(x) = \textbf{arctg}\, x$

La fonction $\operatorname{tg} x$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Son ensemble des valeurs est $\mathbb{R}$.

Elle est donc une bijection entre ces deux intervalles. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\operatorname{arctg} x$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$y = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y, \qquad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

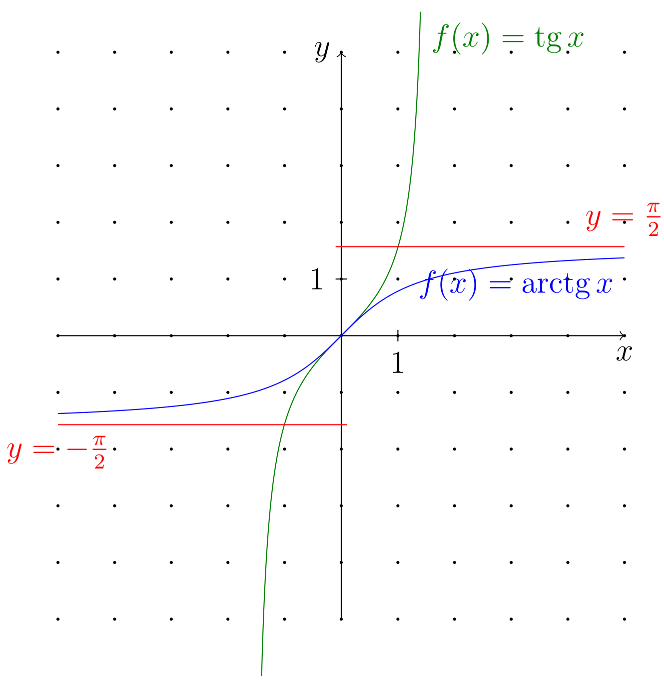
et

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \forall x \in [-1, 1].$$

Grâce à la formule de dérivation des fonctions réciproques, on peut démontrer que $\operatorname{arctg} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Son graphique est



8.3.4 $f(x) = \textbf{arcotg}\, x$

La fonction $\operatorname{cotg} x$ est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Son ensemble des valeurs est $\mathbb{R}$.

Elle est donc une bijection entre ces deux intervalles. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\operatorname{arcotg} x$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0,\pi[$ telle que

$$y = \operatorname{cotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcotg} y, \qquad x \in]0,\pi[, y \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\operatorname{arcotg}(\operatorname{cotg} x) = x, \forall x \in]0,\pi[$$

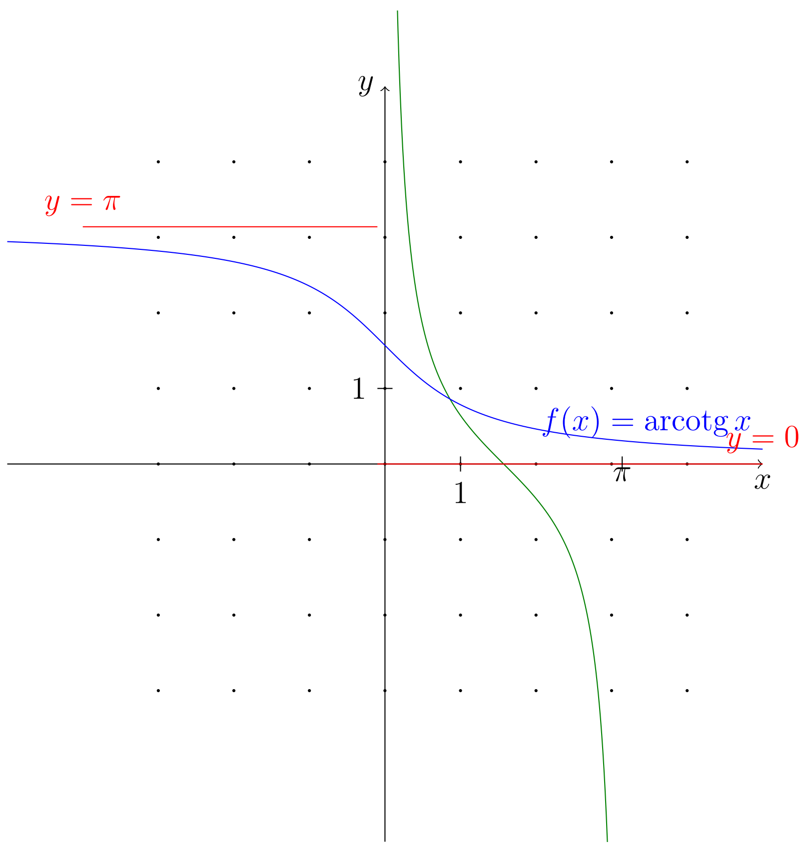
et

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arcotg} x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Grâce à la formule de dérivation des fonctions réciproques, on peut démontrer que $\operatorname{arcotg} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\operatorname{arcotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Son graphique est



Chapitre 9

Primitives

9.1 Définition

Si f est une fonction définie sur $]a, b[$, on appelle *primitive* de f sur $]a, b[$ toute fonction F, dérivable sur $]a, b[$ telle que

$$F'(x) = f(x)$$

sur $]a, b[$.

On la note

$$F(x) = \int f(x)\ dx.$$

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ admettant F comme primitive. Une fonction G est aussi une primitive de f sur $]a, b[$ ssi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + C$ sur $]a, b[$.

On parle donc d'une primitive de f et non de la primitive de f. Une fonction qui admet une primitive en admet une infinité.
Toutes les primitives d'une fonction f sont donc égales à une constante additive près.

Exemple

Si $f(x) = 2x$, alors les fonctions $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 + C$ sont des primitives de f, quelle que soit la valeur de C.

9.2 Primitives immédiates

- $\displaystyle\int x^m \; dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \forall m \in \mathbb{Q}, m \neq 1.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \; dx = \ln x + C$
- $\displaystyle\int e^x \; dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \sin x \; dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x \; dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \arcsin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \; dx = \operatorname{arctg} x + C$
- $\displaystyle\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

9.3 Méthodes de primitivation

Même si un théorème (voir le chapitre du calcul intégral) affirme l'existence d'une primitive pour toute fonction continue sur un intervalle, on ne peut pas déterminer l'expression analytique de la primitive de toutes les fonctions.
La recherche d'une primitive est généralement basée sur une ou plusieurs des méthodes suivantes.

9.3.1 Combinaisons linéaires

Si f et g admettent respectivement les fonctions F et G comme primitives sur $]a, b[$, alors

$$\int \alpha f + \beta g \; dx = \alpha F + \beta G, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple
Calculer $P = P = \int x - e^x + 3\sqrt[3]{x}\ dx$.
On a $P = \int x\ dx - \int e^x\ dx + 3\int \sqrt[3]{x}\ dx = \dfrac{x^2}{2} - e^x + \dfrac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

9.3.2 Par artifice

La méthode par artifice est basée sur l'idée de transformer l'expression à primitiver pour obtenir une ou des primitives plus simples.

Exemple
Calculer $P = \int \dfrac{x^2}{x^2+1}\ dx$.
On a

$$\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\ dx = \int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}\ dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

9.3.3 Par substitution

La méthode de primitivation par substitution a pour but de transformer une primitive en une primitive plus simple. Nous nous contenterons d'en expliquer le mécanisme formel, sachant qu'elle trouve sa justification dans le théorème de dérivation d'une fonction de fonction.

Si f et g sont deux fonctions dérivables telles que $f(g(x))$ existe, alors

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = f(g(x)) + C.$$

La méthode consiste à poser $t = g(x)$. On "calcule" alors $dt = g'(x)dx$.
La primitive

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f'(t)dt = f(t) + C = f(g(x)) + C.$$

Exemple
Calculer $P = \displaystyle\int \cos 2x \; dx$.
Posons $t = 2x$. On a $dt = 2dx$.
D'où $P = \displaystyle\int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Exemple
Calculer $P = \displaystyle\int x \cdot (1-x)^4 \; dx$.
Posons $t = 1 - x$. On a $x = 1 - t$ et $dt = -dx$.
D'où

$$P = -\int (1-t) \cdot t^4 dt = -\int t^4 - t^5 \; dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{6} + C = -\frac{(1-x)^5}{5} + \frac{(1-x)^6}{6} + C$$

Exemple
Calculer $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \; dx$.
Posons $x = \sin t$. On a $dx = \cos t \; dt$.
D'où

$$P = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \; dt = \int \cos^2 t \; dt.$$

La méthode utilisée pour obtenir cette dernière primitive est expliquée dans les paragraphes suivants. On trouve

$$P = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

D'où

$$P = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

9.3.4 Par parties

La méthode de primitivation par parties ne permet pas d'obtenir directement l'expression de la primitive recherchée. Elle permet juste de remplacer le calcul de la primitive par le calcul d'une autre primitive, que l'on espère plus simple.
La primitivation par parties s'applique principalement au calcul de la primitive du produit de deux fonctions. Elle trouve d'ailleurs sa justification dans le théorème de dérivation du

produit de deux fonctions.

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a, b[$, alors

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx.$$

Exemple

Calculer $P = \displaystyle\int x \cdot e^x dx$.

Posons $\begin{cases} f = x & f' = 1 \\ g' = e^x & g = e^x \end{cases}$.

On en déduit $P = x \cdot e^x - \displaystyle\int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$.

Remarques

- Plusieurs primitivations successives par parties peuvent être nécessaires.

Exemple

Calculer $P = \displaystyle\int x^2 \cdot e^x dx$.

- En théorie, on dispose d'un choix pour poser les fonctions f et g'. Généralement, il existe un choix privilégié ; l'autre menant à une primitive plus difficile à calculer que la première.

Exemple

Calculer $P = \displaystyle\int x \cdot e^x dx$.

Posons $\begin{cases} f = e^x & f' = e^x \\ g' = x & g = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

On en déduit $P = \dfrac{x^2}{2} \cdot e^x - \displaystyle\int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx$ qui est plus longue à calculer que la primitive de départ.

TRUC : en règle générale, si on veut appliquer la méthode de primitivation par parties au produit de deux fonctions, on choisit la fonction à dériver d'après les lettres du mot ALPES (Arc(sin,cos,tg), L(ogarithmes), P(olynômes), E(xponentielles), S(in, cos)).

- La primitivation par parties peut aussi s'appliquer pour obtenir la primitive d'une fonction dont seule la dérivée est connue.

Exemple
Calculer $P = \displaystyle\int \ln x \; dx$.

On écrit la primitive $P = \displaystyle\int 1 \cdot \ln x \; dx$.

Posons $\begin{cases} f = \ln x & f' = \dfrac{1}{x} \\ g' = 1 & g = x \end{cases}$.

On en déduit $P = x \cdot \ln x - \displaystyle\int \frac{1}{x} \cdot x \; dx = x \cdot \ln x - x + C$.

9.4 Quelques primitives classiques

Il n'est pas question ici de faire la liste exhaustive de toutes les primitives possibles ou substitutions existantes. Cependant, quelques-unes d'entre elles sont des grands classiques dont la connaissance est source de gain de temps appréciable en évitant les tâtonnements.

9.4.1 Primitives de fonctions trigonométriques

$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx$

- Si n est impair, on utilise la substitution $t = \cos x$.

- Si m est impair, on utilise la substitution $t = \sin x$.

Exemple

Calculer $P = \int \sin x \cdot \cos^2 x \ dx$.

Posons $t = \cos x$, on a $dt = -\sin x \ dx$.

On obtient

$$P = -\int t^2 \ dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

- Si n et m sont pairs, on utilise les formules de Carnot afin de diminuer les exposants de $\sin x$ et $\cos x$.

Exemple

Calculer $P = \int \cos^2 x \ dx$.

Comme $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, On a

$$P = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \ dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$\int \cos ax \cdot \cos bx \ dx$

On utilise les formules de Simpson inverse pour transformer le produit en somme ou différence.

Exemple

Calculer $P = \displaystyle\int \cos 2x \cdot \cos 4x \ dx$.

Cherchons p et q tels que

$$\begin{cases} \dfrac{p+q}{2} = 2 \\ \dfrac{p-q}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q = 4 \\ p-q = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 6 \\ q = -2 \end{cases}.$$

On en déduit

$$P = \int \cos 6x + \cos(-2x) dx = \int \cos 6x \ dx + \int \cos 2x \ dx = \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

Remarque

Mutatis mutandis, la même méthode s'applique aux primitives des produits $\cos ax \cdot \sin bx$ et $\sin ax \cdot \sin bx$.

Autres fonctions trigonométriques

Si les substitutions $t = \sin x$ ou $t = \cos x$ ne permettent pas de résoudre le problème, on peut essayer les substitutions $t = \operatorname{tg} x$ ou $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
Mais elles donnent généralement naissance au calcul de primitives de fonctions rationnelles assez lourdes que nous ne développerons pas ici.

9.4.2 Primitives de fonctions rationnelles

$\displaystyle\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx$ **où** $\Delta < 0$

La primitivation d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynôme du second degré à Δ négatif et le numérateur une constante se calcule à l'aide de deux substitutions successives dont l'objectif est de transformer la fonction à primitiver en $\dfrac{1}{u^2 + 1}$.

Exemple

Calculer $P = \int \dfrac{1}{x^2+x+1}\ dx$.

La première opération à faire est de transformer le dénominateur en regroupant les deux termes en x pour reconstituer un carré :

$$P = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\ dx.$$

La première substitution est donc de poser $t = x + \frac{1}{2}$.

On obtient

$$P = \int \frac{1}{t^2+\dfrac{3}{4}}\ dt.$$

La deuxième substitution sert alors à mettre le terme indépendant en évidence. On pose $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u$. On a $dt = \dfrac{\sqrt{3}}{2}du$ et $t^2 = \dfrac{3}{4}u^2$.

On en déduit

$$P = \int \frac{1}{\dfrac{3}{4}u^2+\dfrac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}\ du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du.$$

Finalement,

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} u + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

9.4.3 Primitives auto-référentes

Le calcul de certaines primitives par parties donnent parfois l'impression de se "mordre la queue".

Exemple

Calculer $P = \displaystyle\int e^{2x} \cos x \; dx$.

Posons $\begin{cases} f = e^{2x} & f' = 2e^{2x} \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{cases}$.

On en déduit $P = \sin x \cdot e^{2x} - 2 \displaystyle\int \sin x \cdot e^{2x} dx$.

Posons $\begin{cases} f = e^{2x} & f' = 2e^{2x} \\ g' = \sin x & g = -\cos x \end{cases}$.

On en déduit

$$\begin{aligned} P &= \sin x \cdot e^{2x} - 2 \left(-\cos x \cdot e^{2x} - 2 \int -\cos x \cdot e^{2x} dx \right) \\ &= \sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \cos x - 4 \int \cos x \cdot e^{2x} dx \\ &= \sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \cos x - 4P \end{aligned}$$

D'où $5P = \sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \cos x$, et

$$P = \frac{1}{5} \left(\sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \cos x \right) + C$$

Chapitre 10

Fonctions logarithmiques

10.1 Logarithme népérien

10.1.1 Définition

La formule de primitivation

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

ne permet pas de calculer la primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Pourtant, cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème d'existence d'une primitive (voir chapitre calcul intégral), elle admet une primitive, et donc une infinité de primitives égales à une constante près, sur cet intervalle.
On appelle *logarithme népérien* la fonction, notée $\ln x$, définie sur $]0, +\infty[$, telle que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

10.1.2 Graphique

A partir de cette définition, il est facile de prouver que la fonction $\ln x$ vérifie les propriétés suivantes :

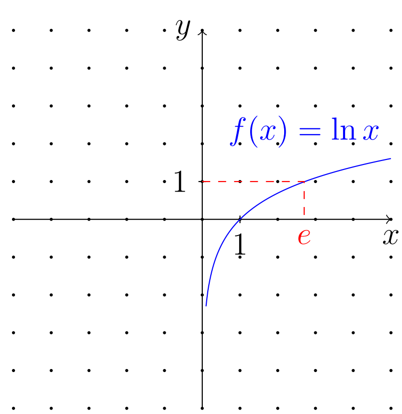
- la fonction $\ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$. Elle y est donc continue.
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, sur $\mathbb{R}_0^+$. La fonction est donc strictement croissante.
- $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2}$, sur $\mathbb{R}_0^+$. Le graphique tourne donc sa concavité vers le bas.

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Le graphique admet donc une asymptote verticale à droite d'équation $x = 0$.
- $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$. Le graphique n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Le graphique n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.
- Puisque $\ln x$ est continue et strictement croissante, elle est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un et un seul nombre dont le logarithme népérien vaut 1. On note ce nombre e. C'est un nombre irrationnel dont la valeur approximative est 2,7.

  On a donc

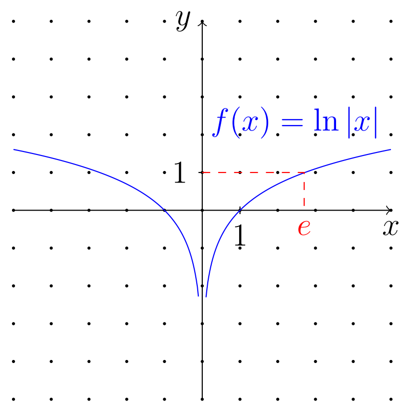
$$\ln e = 1.$$

Le graphique de la fonction $\ln x$ est le suivant :



10.1.3 Extension

La fonction $\ln |x|$ est une extension de la fonction $\ln x$ à $\mathbb{R}_0$.



10.1.4 Principe d'équivalence

La fonction $\ln x$ étant une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in]0, +\infty[.$$

10.1.5 Limites particulières

- Le logarithme népérien est dominé par les puissances positives de x en $+\infty$.

$$\forall m \in \mathbb{R}_0^+, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0.$$

- Le logarithme népérien est dominé par les puissances positives de x en 0^+.

$$\forall m \in \mathbb{R}_0^+, \lim_{x \to 0^+} \ln x \cdot x^m = [\infty \cdot 0] = 0.$$

10.2 Logarithme en base a

10.2.1 Définition

Si $a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$, le *logarithme en base* a est la fonction, notée $\log_a x$, définie sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Cette définition n'a pas de sens pour $a \leq 0$ ou $a = 1$.

Remarques

On en déduit de suite que, $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

Le logarithme népérien peut être considéré comme le logarithme en base e puisque

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x.$$

10.2.2 Limites et asymptotes

- Si $a > 1$, $\ln a > 0$. On en déduit

  $$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$$

  (le graphique admet une AV à droite en $x = 0$) et

  $$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$$

  (pas d'AH).
- Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$. On en déduit

  $$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$$

  (le graphique admet une AV à droite en $x = 0$) et

  $$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$$

  (pas d'AH).

10.2.3 Dérivée

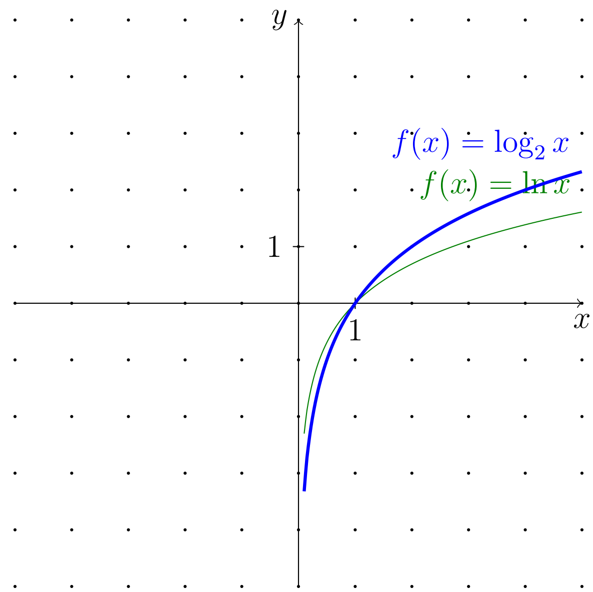
De même, puisque $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, on a

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

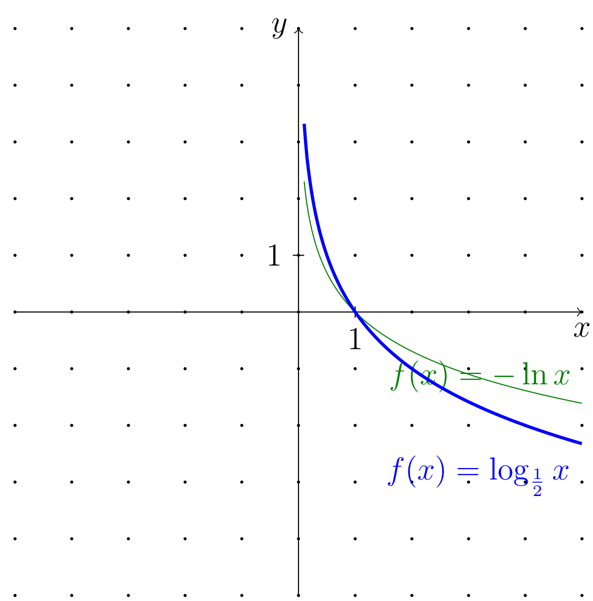
Cette dérivée est donc positive si $a > 1$ et négative si $0 < a < 1$.

10.2.4 Graphiques

Si $a > 1$, $\ln a > 0$. Par conséquent, le graphique de $\log_a x$ est obtenu en faisant subir au graphique de $\ln x$ par une transformation du type $k \cdot f(x)$ où $k = \dfrac{1}{\ln a}$.



Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$. Par conséquent, le graphique de $\log_a x$ est obtenu en faisant subir au graphique de $\ln x$ par une transformation du type $k \cdot f(x)$ où $k = \dfrac{1}{\ln a}$ est négatif.



10.2.5 Principe d'équivalence

La fonction $\log_a x (a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\})$ étant une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in]0, +\infty[.$$

10.2.6 Changement de base

Soient $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$. On a

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

10.3 Propriétés algébriques

Ces propriétés sont valables pour tous les logarithmes, quelle que soit la base utilisée ; en particulier elles sont également valables pour le logarithme népérien.

- Le logarithme du produit de deux nombres strictement positifs est égal à la somme des logarithmes des deux nombres.

$$\log(xy) = \log x + \log y, \forall x, y > 0.$$

- Le logarithme de l'inverse d'un nombre strictement positif est égal à l'opposé du logarithme du nombre.

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x, \forall x > 0.$$

- Le logarithme du quotient de deux nombres strictement positifs est égal à la différence des logarithmes du numérateur et du dénominateur.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y, \forall x, y > 0.$$

- Le logarithme d'une puissance d'un nombre strictement positif est égal au produit de l'exposant de la puissance par le logarithme de la base.

$$\log\left(x^n\right) = n \log x, \forall x > 0.$$

Remarque

Cette dernière propriété nous permet une autre approche du logarithme en base a. Supposons que $x = a^y$. On a alors

$$\log_a x = \log_a(a^y) = y \log_a a = y.$$

On en déduit que le logarithme en base a d'un nombre strictement positif x est l'exposant de la puissance de a qui est égale à x.

Chapitre 11

Fonctions exponentielles

11.1 Exponentielle népérienne

11.1.1 Définition

La fonction $\ln x$ étant une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $]0, +\infty[$. On appelle **exponentielle népérienne** la fonction, notée $\exp x$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$, telle que

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y, x \in \mathbb{R}, y \in]0, +\infty[$$

On a évidemment

$$\exp(\ln x) = x, \forall x \in]0, +\infty[$$

et

$$\ln(\exp(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier,

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e$

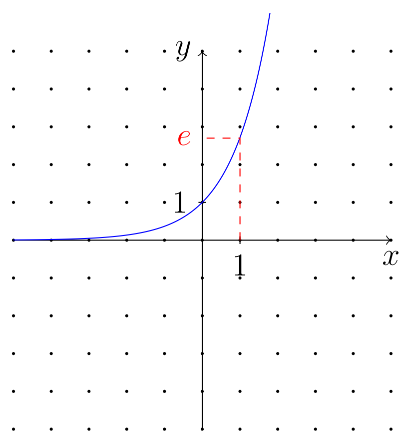
11.1.2 Graphique

A partir de cette définition et des propriétés des fonctions réciproques, il est facile de prouver que la fonction $\exp x$ vérifie les propriétés suivantes :

- la fonction $\exp x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

- la fonction $\exp x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc continue.
- $(\exp x)' = \exp x$ sur $\mathbb{R}$. La fonction est donc strictement croissante.
- $(\exp x)'' = \exp x$ sur $\mathbb{R}$. Le graphique tourne donc sa concavité vers le haut.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$. Le graphique n'admet donc pas d'AH en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0^+$. Le graphique admet une asymptote horizontale en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp x}{x} = +\infty$. Le graphique n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

Le graphique de la fonction $\exp x$ est le suivant :



11.1.3 Limites particulières

- L'exponentielle domine toutes les puissances positives de x en $+\infty$.

$$\forall m \in \mathbb{R}, \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x^m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty.$$

- L'exponentielle domine toutes les puissances positives de x en $-\infty$.

$$\forall m \in \mathbb{R}, \lim_{x\to0^+} \exp x \cdot x^m = [0 \cdot \infty] = 0.$$

11.2 Propriétés algébriques

- L'exponentielle de la somme de deux nombres est égale au produit des exponentielles des deux nombres.

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- L'exponentielle de l'opposé d'un nombre est égale à l'inverse de l'exponentielle du nombre.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- L'exponentielle de la différence de deux nombres est égale au quotient des exponentielles des deux nombres.

$$\exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- L'exponentielle d'un multiple d'un nombre est égale à la puissance de l'exponentielle du nombre dont l'exposant est le multiple.

$$\exp(nx) = (\exp x)^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

11.3 Puissance de e à exposant réel

Si on compare les propriétés de la fonction $\exp(x)$ qui est défine sur $\mathbb{R}$ à celles des puissances rationnelles de e, on obtient

e^q	$\exp(x)$
$e^0 = 1$	$\exp(0) = 1$
$e^1 = e$	$\exp(1) = e$
$e^q \cdot e^{q'} = e^{q+q'}$	$\exp(x) \cdot \exp(x') = \exp(x+x')$
$\frac{e^q}{e^{q'}} = e^{q-q'}$	$\frac{\exp(x)}{\exp(x')} = \exp(x-x')$
$(e^q)^n = e^{nq}$	$(\exp(x))^n = \exp(nx)$

L'ensemble de ces propriétés communes permet d'étendre la notion de puissance du nombre e à des exposants réels.

Si $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

11.4 Nouvelle notation

On en déduit directement les nouvelles formulations des propriétés précédentes, valables $\forall x \in \mathbb{R}$:

- $e^x \cdot e^{x'} = e^{x+x'}$
- $\dfrac{e^x}{e^{x'}} = e^{x-x'}$
- $(e^x)' = e^x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^m} = +\infty$
- etc

11.5 Exponentielle de base a

11.5.1 Définition

Si $a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$, le logarithme en base a est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$. On appelle *exponentielle de base a* la fonction, notée a^x, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$, telle que

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y, x \in \mathbb{R}, y \in]0, +\infty[$$

On a évidemment

$$a^{\log_a x} = x, \forall x \in]0, +\infty[$$

et

$$\log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

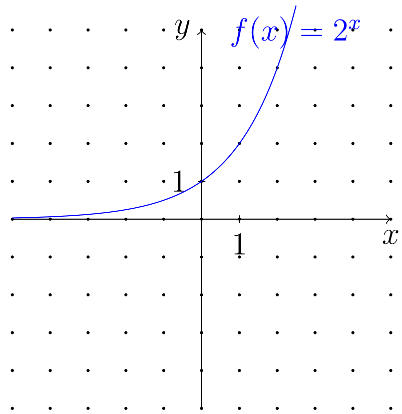
Remarque

Toute exponentielle de base a peut aussi être définie à l'aide de l'exponentielle népérienne :

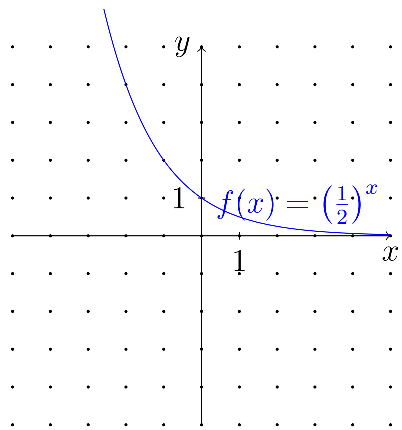
$$a^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

11.5.2 Graphiques

- Si $a > 1$, $\ln a > 0$.



- Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$.



Chapitre 12

Calcul intégral

12.1 Introduction

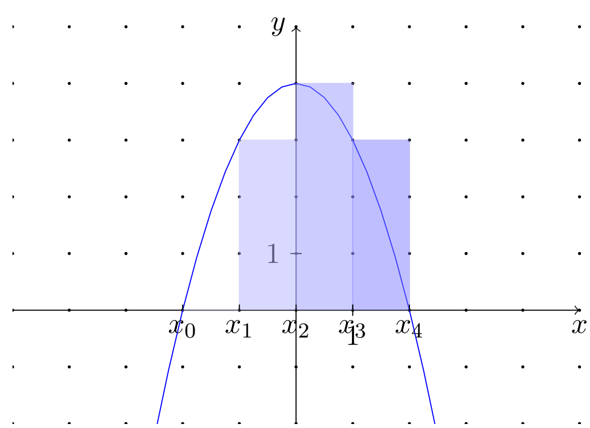
Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour évaluer la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de f et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, on peut utiliser la méthode suivante : on partage l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles à l'aide des points $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ équidistants, puis on calcule l'expression

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

qui représente la somme des surfaces des rectangles de base $(x_{i+1} - x_i)$ et de hauteur $f(x_i)$.

Exemple

Considérons la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de la fonction $f(x) = 4 - x^2$ et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.

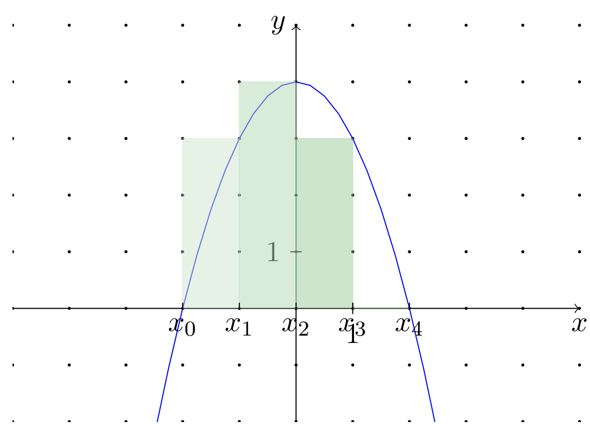


On pourrait aussi évaluer la surface en considérant l'expression

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})$$

qui représente la somme des surfaces des rectangles de base $(x_{i+1}-x_i)$ et de hauteur $f(x_{i+1})$.

Exemple



La première somme est dite "somme à gauche", l'autre "somme à droite".

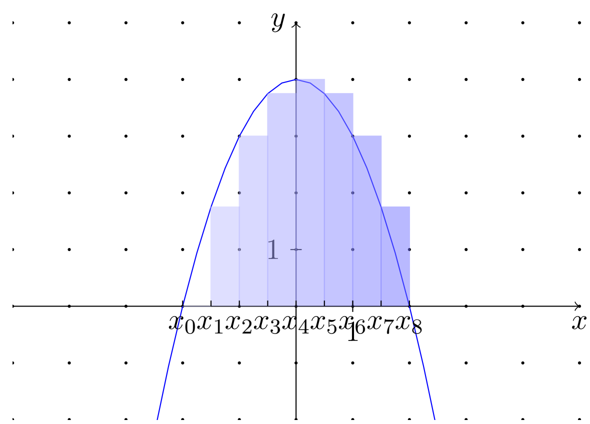
Remarques

- L'hypothèse d'équidistance des x_i n'est pas obligatoire. On peut la remplacer par une hypothèse moins restrictive, mais cela ne contribue pas à la clarté de cette synthèse.
- Cependant, si les x_i sont équidistants, chaque expression $(x_{i+1}-x_i)$ est égale à $\dfrac{b-a}{n}$.
- Les sommes évaluées ont également un sens si la fonction n'est pas positive sur $[a,b]$. Par contre, elles ne représentent plus une évaluation de la surface.

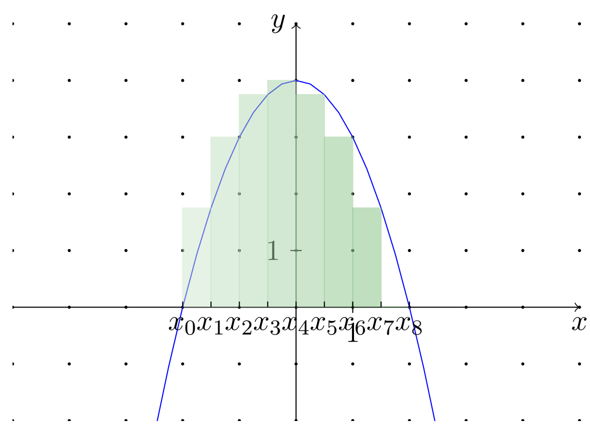
On peut diminuer l'erreur faite en approximant la surface en augmentant le nombre n d'intervalles.

Exemple

Ainsi, en doublant le nombre de sous-intervalles, les sommes à gauche et à droite sont représentées par les figures suivantes :



et



12.2 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ que l'on partage en n sous-intervalles à l'aide des points $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ équidistants. On appelle *intégrale (au sens de Riemann) de f de a à b* le nombre réel noté

$$\int_a^b f(x)dx$$

égal à l'expression

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

ou, de manière équivalente,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1}).$$

Cette définition a un sens car on peut prouver, lorsque f est continue sur un intervalle compact $[a,b]$, que les limites des sommes "à gauche"

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i)$$

et "à droite"

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})$$

existent toujours, sont égales et finies. On dit alors que f est intégrable sur $[a,b]$.

Convention

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Remarque

Cette définition ne constitue une méthode de calcul d'une intégrale que si on dispose d'un outil de calcul puissant. Les cas où cette définition permet de faire le calcul de l'intégrale "à la main" sont assez rares.
C'est pourquoi il va être nécessaire d'étudier quelques théorèmes qui aboutiront à une méthode de calcul particable sans moyens techniques.

12.3 Propriétés

1. Si $c\in[a,b]$ et si f est intégrable sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Corrolaire

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

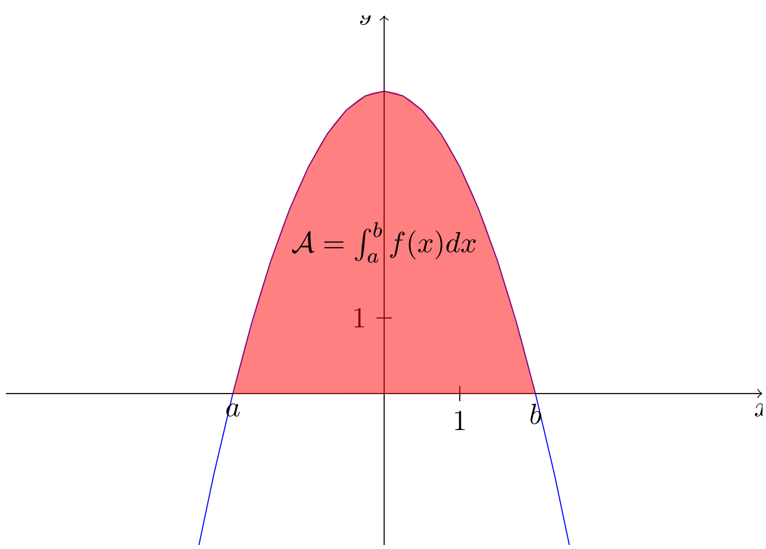
2. Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)x + \beta \int_a^b g(x)dx, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Si f est positive et intégrable sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exemple

Calculer l'aire de la surface fermée comprise entre le graphique de la fonction $f(x) = 4 - x^2$ et l'axe des abscisses.

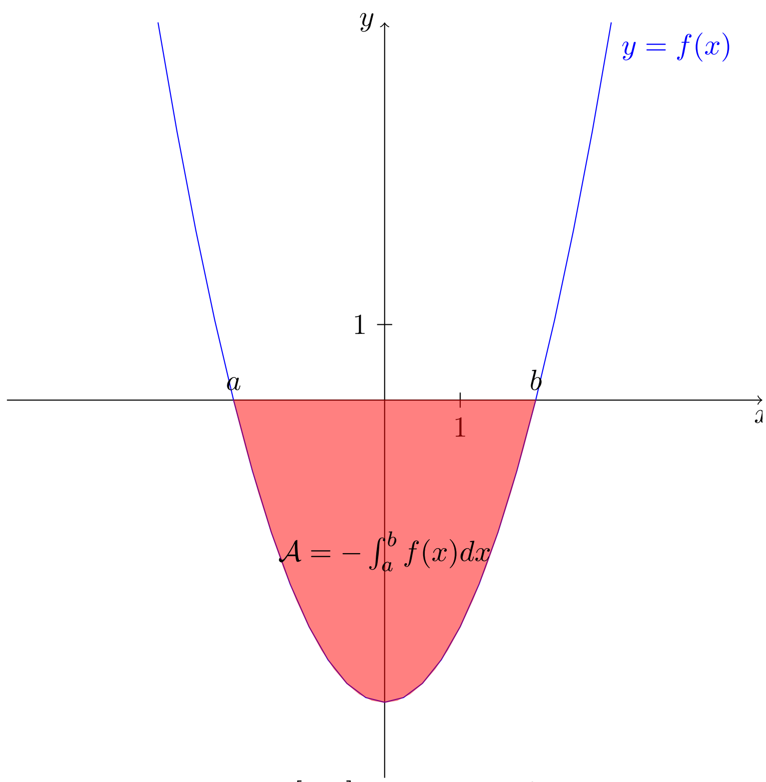


Remarques

- Si f est négative et intégrable sur $[a, b]$, alors l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est obtenue par $-\int_a^b f(x)dx$.

Exemple

Calculer l'aire de la surface fermée comprise entre le graphique de la fonction $f(x) = x^2 - 4$ et l'axe des abscisses.



- Si f n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, alors la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est obtenue par $\int_a^b |f(x)|dx$.

  Concrètement, si $f \geq 0$ sur $[a, c]$ et $f \leq 0$ sur $[c, b]$, alors la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est obtenue par

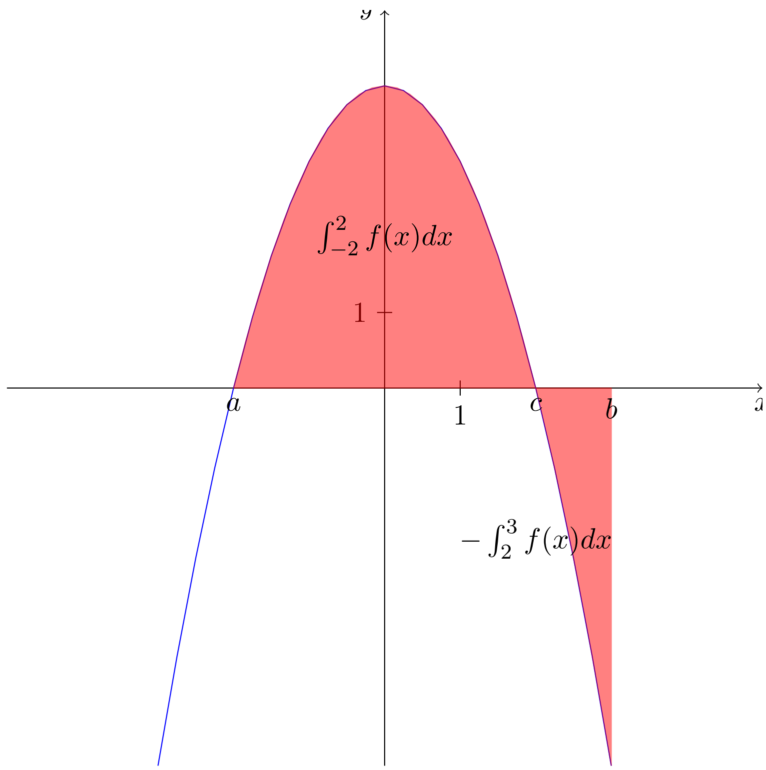
$$\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Exemple

Calculer la surface comprise entre le graphique de la fonction $f(x) = 4 - x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$.

La fonction f est positive sur $[-2, 2]$ et négative sur $[2, 3]$. La surface recherchée est donc donnée par

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx - \int_{2}^{3} f(x)dx$$

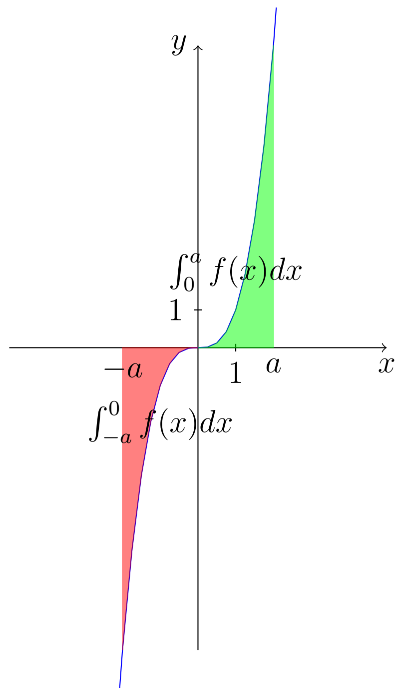


Conséquences

- L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle.

  Si f est impaire,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$



Exemple

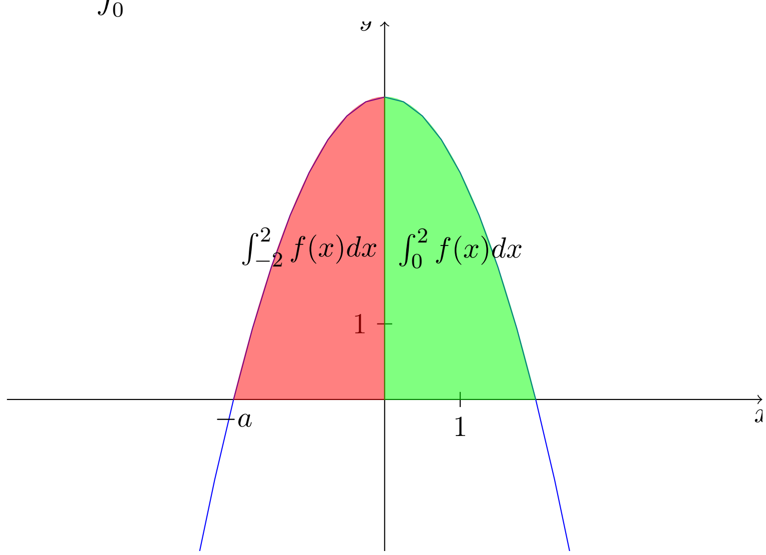
$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{2}^{0} x^3 dx = 0.$$

- Si f est paire,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Exemple

$$\int_{-2}^{2} 4 - x^2 dx = 2\int_{0}^{2} 4 - x^2 dx.$$



4. Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et telles que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

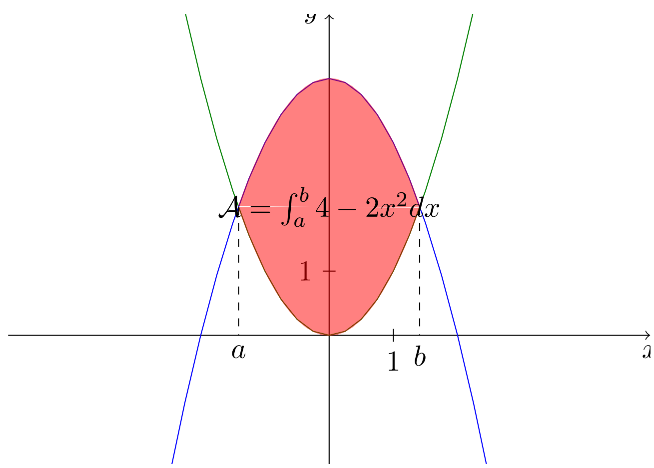
Corrolaire

Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et telles que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, la surface comprise entre le graphique de f, le graphique de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Exemple

Calculer la surface fermée comprise entre les graphiques des fonctions $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2$.



Les points d'intersection des graphiques de f et g ont pour abscisses les solutions de l'équation $4 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Entre ces deux valeurs, $f \geq g$, donc

$$\mathcal{A} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - x^2 \text{ dx } - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 \text{ dx } = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - 2x^2 \text{ dx } .$$

Une autre manière de justifier est de dire :

comme $f - g$ est positive sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, l'aire à évaluer est

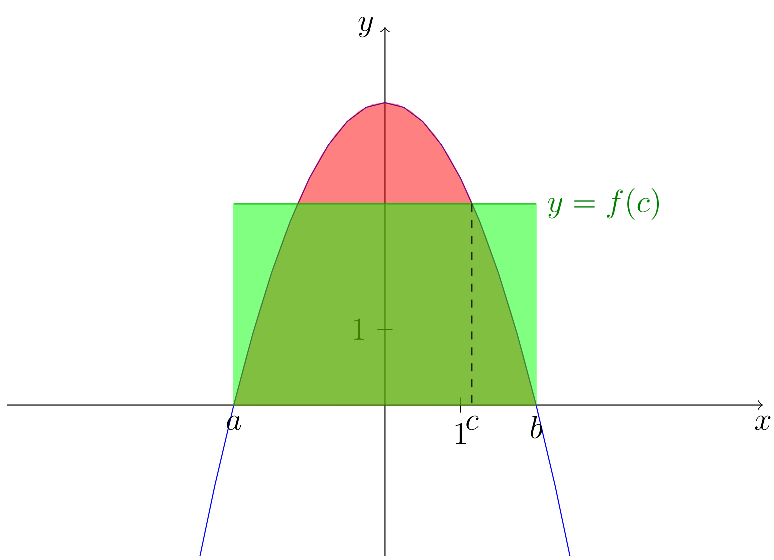
$$\mathcal{A} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2) - x^2 \text{ dx}.$$

12.4 Théorème de la moyenne

Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

Si f est positive, on interprète ce théorème en disant que la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à la surface du rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $f(c)$.



On dit alors que $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est la moyenne de la fonction f sur $[a, b]$.

12.5 Théorème fondamental du calcul intégral

Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a,b]$.

Remarques

- Lorsqu'on considère l'expression $\int_a^x f(t)dt$, il est important de comprendre qu'il s'agit bien d'une fonction de x et non de t.
- Comme la primitive d'une fonction est définie à une constante additive près, toute fonction

$$\int_a^x f(t)dt + C$$

  est aussi une primitive de f.
- Parmi toutes les primitives de f,

$$\int_a^x f(t)dt$$

  est celle qui vaut 0 en $x = a$.
- Une conséquence directe que de théorème est que

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Si f admet la fonction F comme primitive sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

On énonce cette propriété en disant que l'intégrale d'une fonction sur un intervalle est égale à la variation d'une de ses primitives.

Ce théorème fondamental nous donne enfin une méthode de calcul pratique pour calculer une intégrale.

Exemple

Calculer $\int_0^1 x^2 dx$.

La fonction f est bien continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Elle y est donc intégrable.

Une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Par conséquent, $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

12.6 Volume de révolution

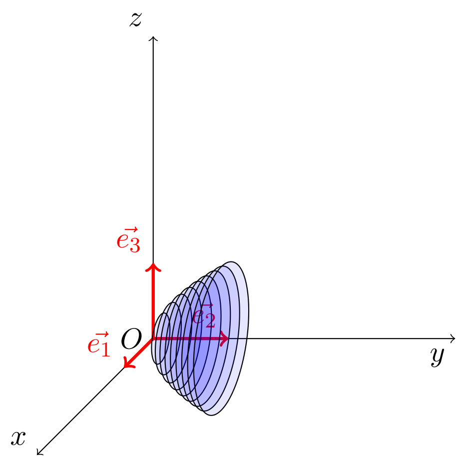
Dans l'espace muni d'un repère, un *volume de révolution* est un volume obtenu par la rotation de la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique d'une fonction $y = f(x)$ et les plans d'équation $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des abscisses.

Le volume de révolution obtenu par la rotation de la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique d'une fonction $y = f(x)$ et les plans d'équation $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des abscisses est

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Exemple

Un paraboloïde de révolution est obtenu en faisant tourner la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphique de la fonction $y = \sqrt{x}$ et les plans $x = 0$ et $x = b$.



Le volume engendré entre les plans $x = 0$ et $x = 1$ est

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

12.7 Méthodes d'intégration

12.7.1 Intégration par substitution

Si $f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$ et si $t = g(x)$, alors

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt.$$

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x \cdot (x^2 + 1)^2\ dx$.

Posons $t = x^2 + 1$. On a $dt = 2x\ dx$. De plus, $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$ et $x = 1 \Leftrightarrow t = 2$.

D'où $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

La méthode par substitution peut parfois être utilisée, même si l'intégrand n'est pas un produit.

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$.

Posons $t = 2x + 1$. On a $dt = 2dx$. De plus, $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$ et $x = 1 \Leftrightarrow t = 3$.

D'où $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} [\ln t]_1^3 = \frac{1}{2} \ln 3$.

12.7.2 Intégration par parties

Si deux des 3 propriétés suivantes sont vérifiées :

— $f \cdot g'$ est intégrable sur $[a, b]$

— $f' \cdot g$ est intégrable sur $[a, b]$

— $[fg]_a^b$ est fini

alors la troisième est vérifiée et

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx.$$

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \; dx$.

Posons $\begin{cases} f = x & f' = 1 \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{cases}$.

On en déduit $I = [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin x \; dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

Chapitre 13

Annexe1

Fonctions fondamentales

La connaissance des fonctions suivantes est indispensable. Il va de soi de connaitre, pour chacune d'elles,

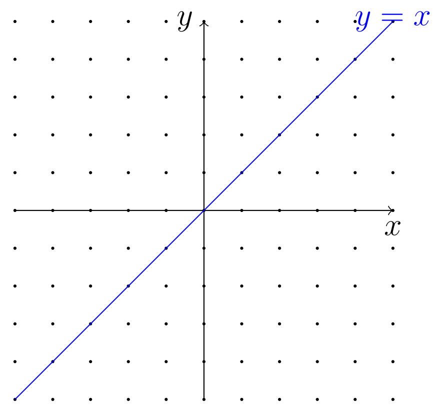
- le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité
- l'ensemble des valeurs
- la parité éventuelle
- les zéros éventuels
- les asymptotes éventuelles
- la dérivée première, les variations et les éventuels extremas
- la dérivée seconde, la concavité et les éventuels points d'inflexion
- le graphique

13.1 Monômes

13.1.1 $f(x) = x$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote

- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x)' = 1$
- variations : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- concavité : pas de concavité
- Graphique

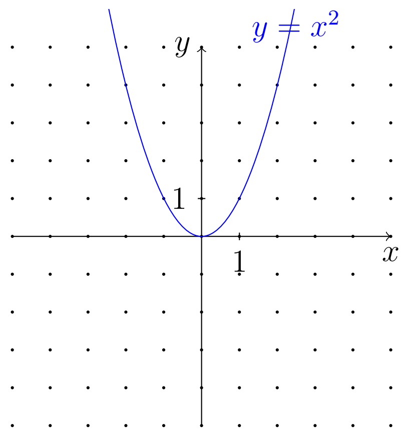


13.1.2 $f(x) = x^2$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $\mathbb{R}^+$
- parité : paire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^2)' = 2x$
- variations et extrema

x		0	
x^2	$\searrow$	min	$\nearrow$

- concavité : positive sur $\mathbb{R}$
- Graphique



13.1.3 $f(x) = x^3$

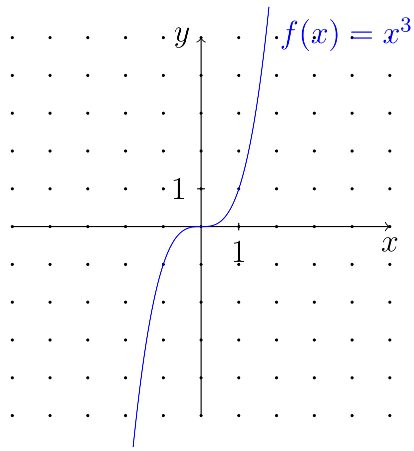
- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^3)' = 3x^2$
- variations et extrema

x		0	
x^3	$\nearrow$	tang. horiz.	$\nearrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
x^3	$\cap$	PI	$\cup$

- Graphique



13.2 Fonctions rationnelles

13.2.1 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

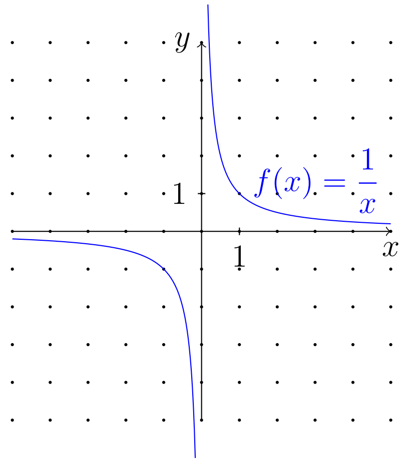
- dom f : $\mathbb{R}_0$
- ens val : $\mathbb{R}_0$
- parité : impaire
- zéro : aucun
- continue sur $\mathbb{R}_0$, AV $\equiv x = 0$, AH $\equiv y = 0$ en $\pm\infty$
- dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$
- variations et extrema

x		0	
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\frac{1}{x}$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

- Graphique



13.2.2 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

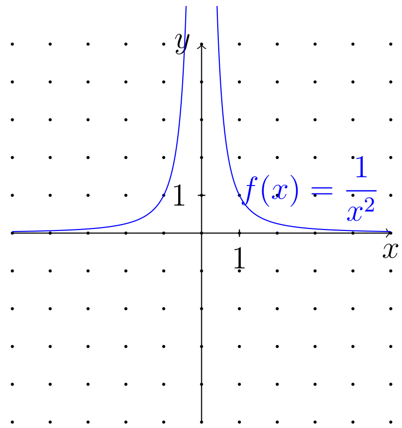
- dom f : $\mathbb{R}_0$
- ens val : $\mathbb{R}_0^+$
- parité : paire
- zéro : aucun
- continue sur $\mathbb{R}_0$, AV $\equiv x = 0$, AH $\equiv y = 0$ en $\pm\infty$
- dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{-2}{x^3}$
- variations et extrema

x		0	
$\dfrac{1}{x^2}$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\dfrac{1}{x^2}$	$\cup$	$\nexists$	$\cup$

- Graphique



13.3 Fonctions irrationnelles

13.3.1 $f(x) = \sqrt{x}$

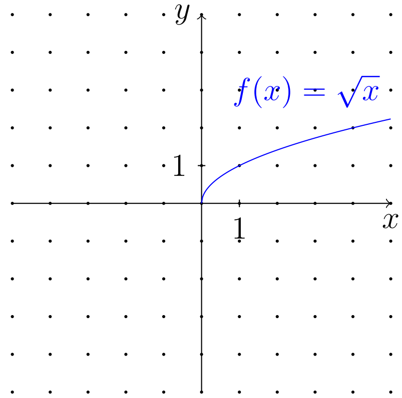
- dom f : $\mathbb{R}^+$
- ens val : $\mathbb{R}^+$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}^+$, pas d'asymptote
- dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- variations et extrema

x		0	
$\sqrt{x}$	$\nexists$	min	$\nearrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\sqrt{x}$	$\nexists$	$\nexists$	$\cap$

- Graphique



13.3.2 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

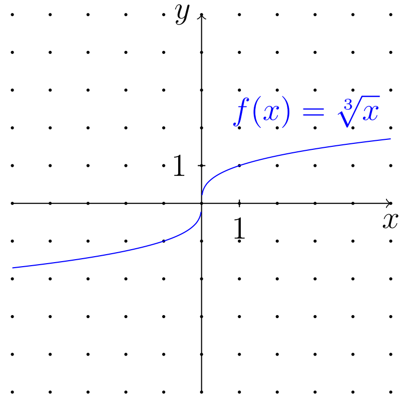
- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote
- dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
- variations et extrema

x		0	
$\sqrt[3]{x}$	$\nearrow$	tang. vert.	$\nearrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\sqrt[3]{x}$	$\cup$	PI	$\cap$

- Graphique



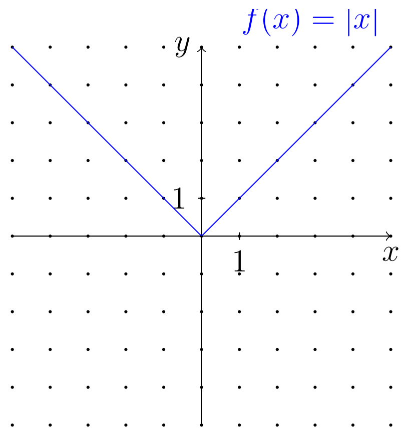
13.4 Valeur absolue

13.4.1 $f(x) = |x|$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $\mathbb{R}^+$
- parité : paire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote
- dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et $(|x|)' = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
- variations et extrema

x		0	
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- concavité :
- Graphique



13.5 Exponentielles et logarithmes

13.5.1 $f(x) = \ln x$

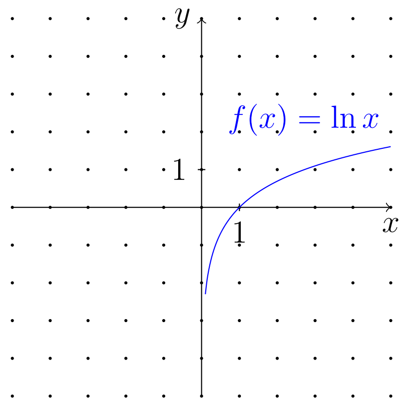
- dom f : $\mathbb{R}_0^+$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : $x = 1$
- continue sur $\mathbb{R}_0^+$, AV $\equiv x = 0$ à droite.
- dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- variations et extrema

x		0	
$\ln x$	$\nexists$	$\nexists$	$\nearrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\ln x$	$\nexists$	$\nexists$	$\cap$

- Graphique



13.5.2 $f(x) = \log_a x (a > 1)$

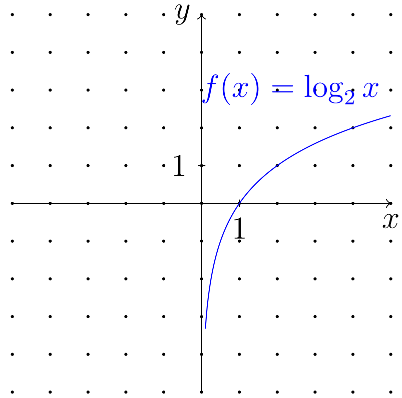
- dom f : $\mathbb{R}_0^+$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : $x = 1$
- continue sur $\mathbb{R}_0^+$, AV $\equiv x = 0$ à droite.
- dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
- variations et extrema

x		0	
$\log_a x$	$\nexists$	$\nexists$	$\nearrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\log_a x$	$\nexists$	$\nexists$	$\cap$

- Graphique ($a = 2$)



13.5.3 $f(x) = \log_a x (0 < a < 1)$

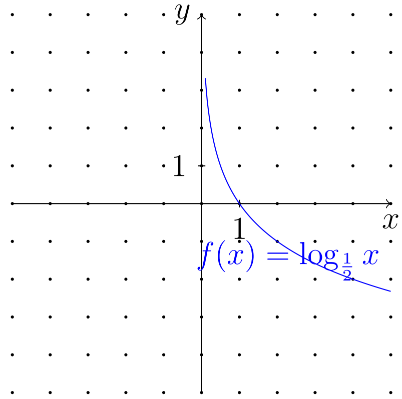
- dom f : $\mathbb{R}_0^+$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : $x = 1$
- continue sur $\mathbb{R}_0^+$, AV $\equiv x = 0$ à droite.
- dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ et $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
- variations et extrema

x		0	
$\log_a x$	$\nexists$	$\nexists$	$\searrow$

- concavité et point d'inflexion

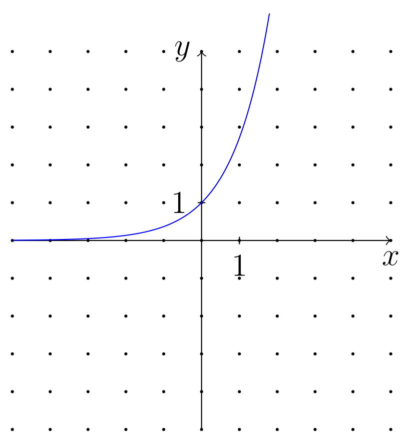
x		0	
$\log_a x$	$\nexists$	$\nexists$	$\cup$

- Graphique $(a = 2)$



13.5.4 $f(x) = e^x$

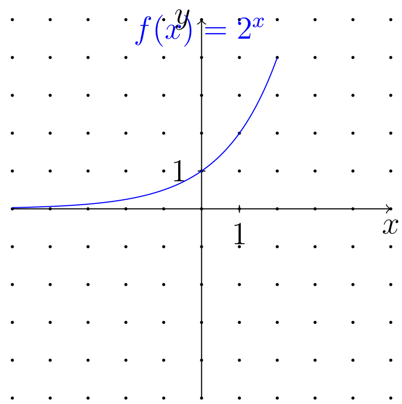
- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $\mathbb{R}_0^+$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : aucun
- continue sur $\mathbb{R}$, AH $\equiv y = 0$ en $-\infty$.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$
- variations et extrema : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- concavité et point d'inflexion : concavité positive sur $\mathbb{R}$
- Graphique



13.5.5 $f(x) = a^x (a > 1)$

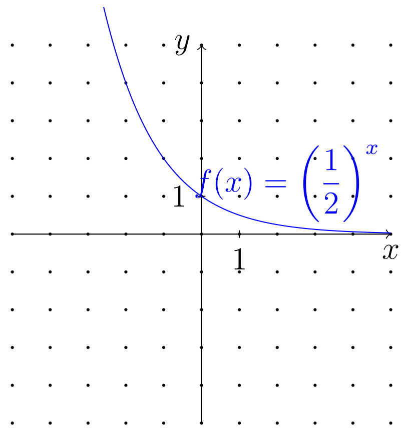
- dom f : $\mathbb{R}$

- ens val : $\mathbb{R}_0^+$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : aucun
- continue sur $\mathbb{R}$, AH $\equiv y = 0$ en $-\infty$.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$
- variations et extrema : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- concavité et point d'inflexion : concavité positive sur $\mathbb{R}$
- Graphique $(a = 2)$



13.5.6 $f(x) = a^x (0 < a < 1)$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $\mathbb{R}_0^+$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : aucun
- continue sur $\mathbb{R}$, AH $\equiv y = 0$ en $+\infty$.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$
- variations et extrema : strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- concavité et point d'inflexion : concavité positive sur $\mathbb{R}$
- Graphique $(a = \frac{1}{2})$



13.6 Fonctions trigonométriques

L'étude d'une fonction trigonométrique suppose toujours que l'argument des fonctions est exprimé en radians.

13.6.1 $f(x) = \sin x$

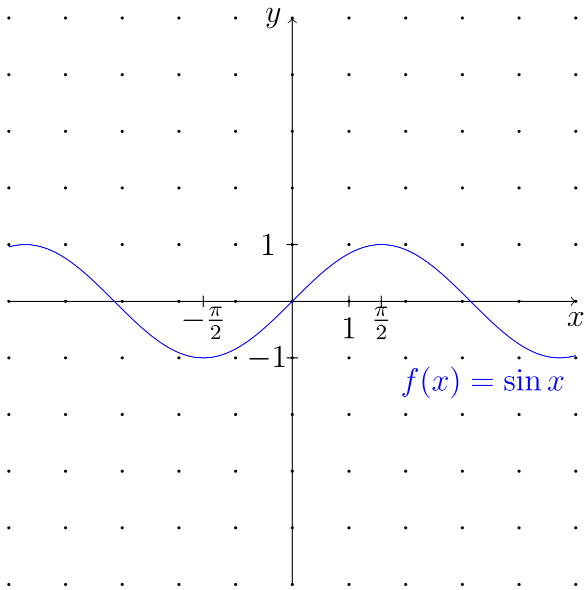
- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $[-1, 1]$
- parité : impaire
- période : 2π
- zéro : $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sin x)' = \cos x$
- variations et extrema sur $[-\pi, \pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

- concavité et point d'inflexion

x	$-\pi$		0		π
$\sin x$	PI	$\cup$	PI	$\cap$	PI

- Graphique



13.6.2 $f(x) = \cos x$

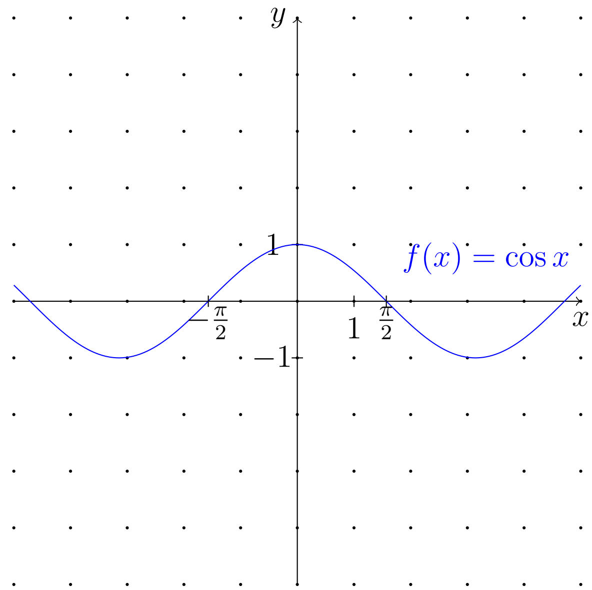
- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $[-1, 1]$
- parité : paire
- période : 2π
- zéro : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos x)' = -\sin x$
- variations et extrema sur $[-\pi, \pi]$

x	$-\pi$		0		π
$\cos x$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min

- concavité et point d'inflexion

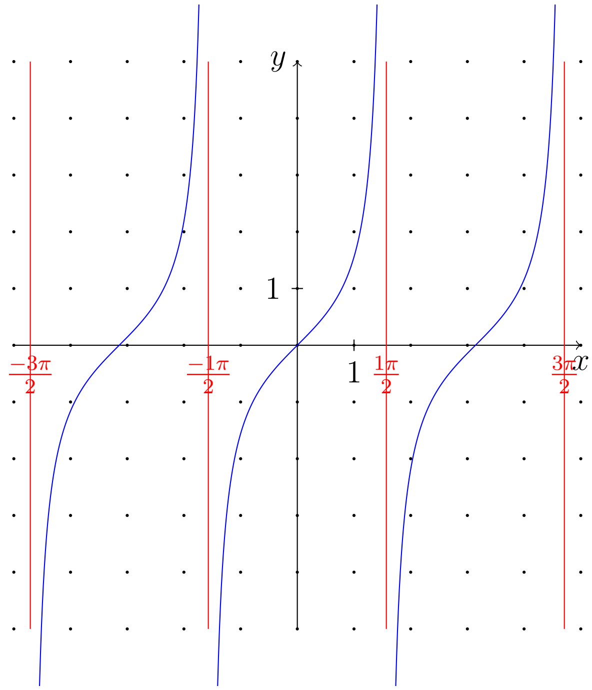
x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	0	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	0

- Graphique



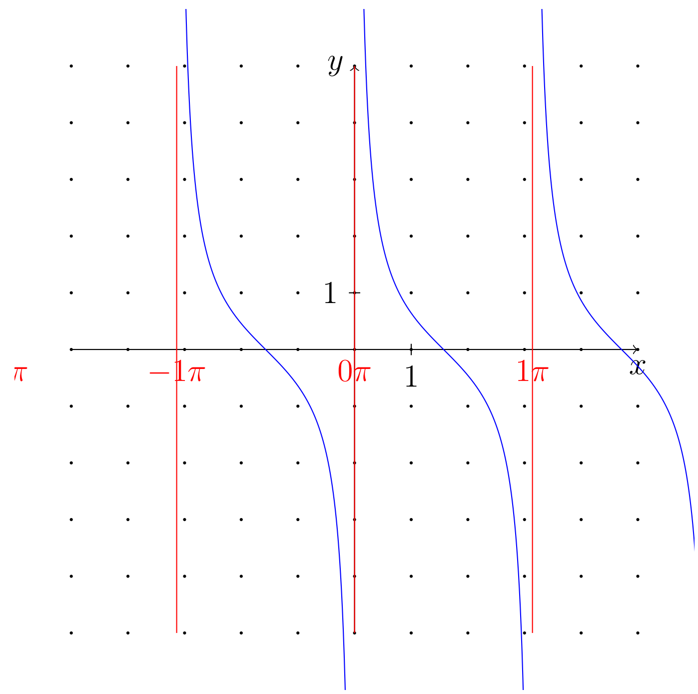
13.6.3 $f(x) = \mathbf{tg}\, x$

- dom f : $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : impaire
- période : π
- zéro : $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, AV $\equiv x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.
- dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ et $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- Graphique



13.6.4 $f(x) = \mathbf{cotg}\, x$

- dom f : $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : impaire
- période : π
- zéro : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- continue sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$, AV $\equiv x = k\pi, k \in Z$.
- dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ et $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
- Graphique



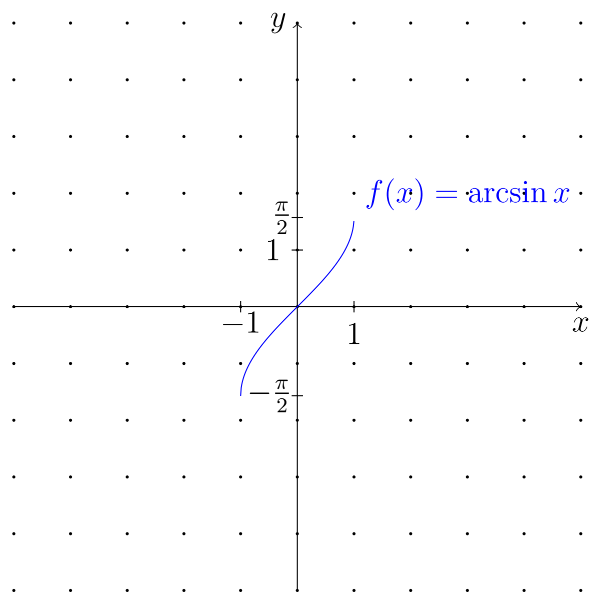
13.7 Fonctions cyclométriques

13.7.1 $f(x) = \arcsin x$

- dom f : $[-1, 1]$
- ens val : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $[-1, 1]$, pas d'asymptote
- dérivable sur $]-1, 1[$ et $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- variations et extrema : strictement croissante sur $[-1, 1]$, minimum en $x = -1$ et maximum en $x = 1$.
- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\arcsin x$	$\cap$	PI	$\cup$

- Graphique

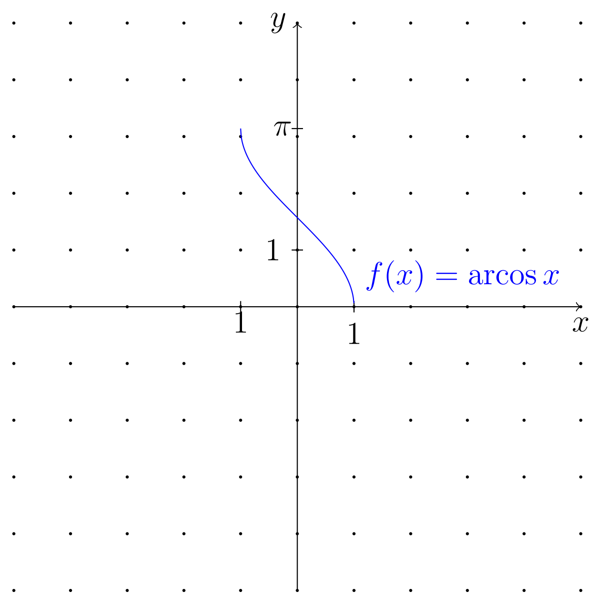


13.7.2 $f(x) = \arcos x$

- dom f : $[-1, 1]$
- ens val : $[0, \pi]$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : $x = 1$
- continue sur $[-1, 1]$, pas d'asymptote
- dérivable sur $]-1, 1[$ et $(\arcos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- variations et extrema : strictement décroissante sur $[-1, 1]$, maximum en $x = -1$ et minimum en $x = 1$.
- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\arcos x$	$\cup$	PI	$\cap$

- Graphique

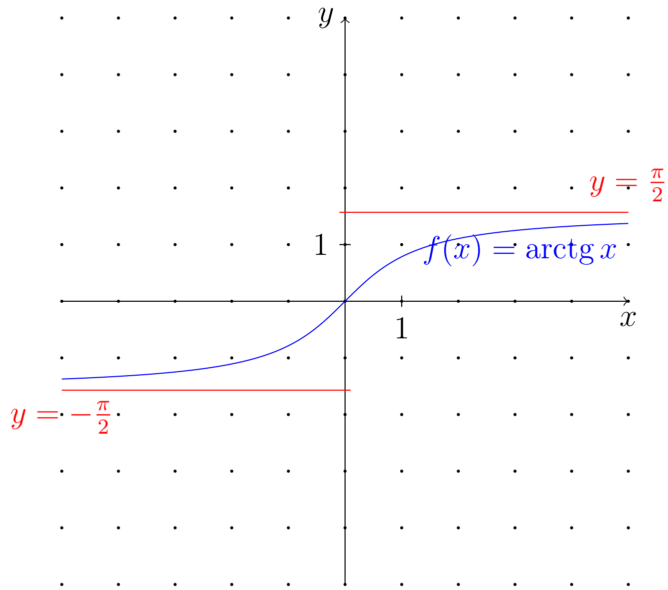


13.7.3 $f(x) = \mathbf{arctg}\, x$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, AH $\equiv y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- variations et extrema : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\operatorname{arctg} x$	$\cup$	PI	$\cap$

- Graphique



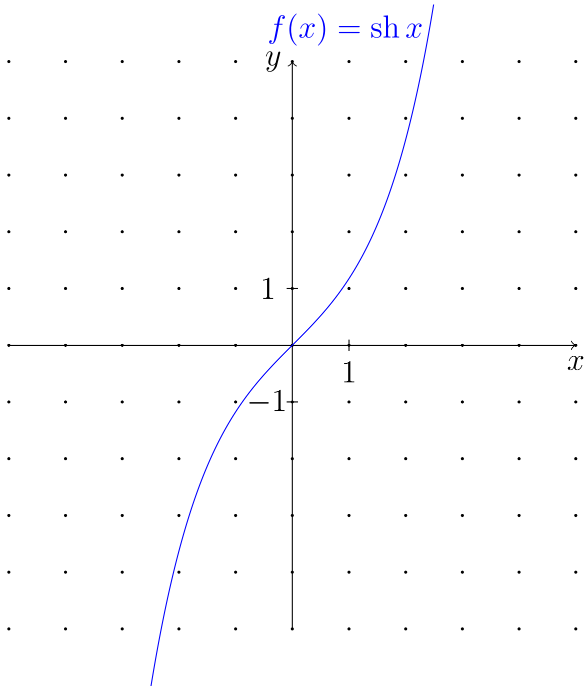
13.8 Fonctions trigonométriques hyperboliques

13.8.1 $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $]-\infty, +\infty[$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\operatorname{sh} x)' = \cosh x$
- variations et extrema : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\operatorname{sh} x$	$\cap$	PI	$\cup$

- Graphique

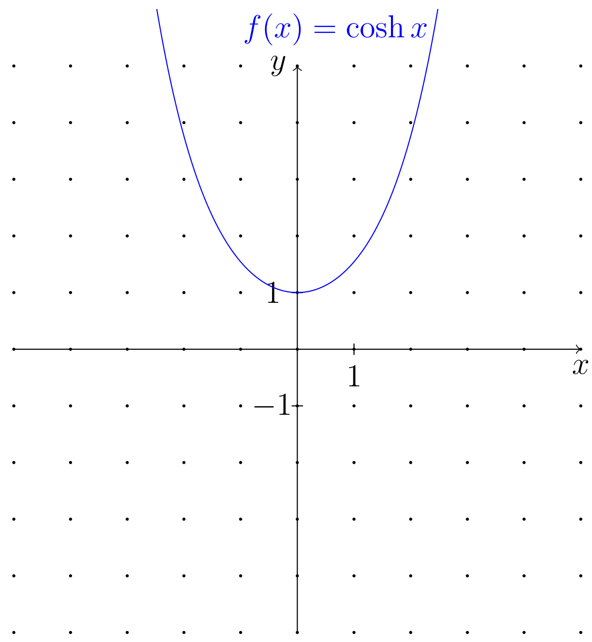


13.8.2 $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $[1, +\infty[$
- parité : paire
- zéro : strictement positive sur $\mathbb{R}$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cosh x)' = \operatorname{sh} x$
- variations et extrema :

x		0	
$\cosh x$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- concavité et point d'inflexion : concavité positive sur $\mathbb{R}$
- Graphique

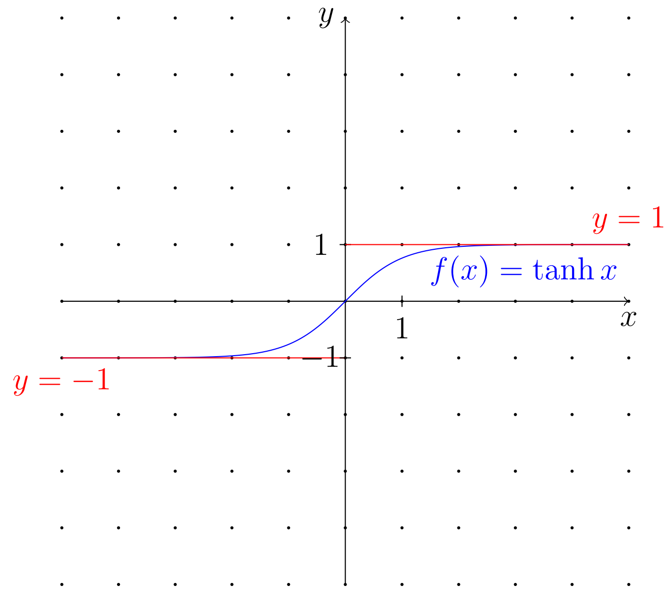


13.8.3 $f(x) = \tanh x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\cosh x}$

- dom f : $\mathbb{R}$
- ens val : $]-1, 1[$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, AH $\equiv y = 1$ en $+\infty$ et AH $\equiv y = -1$ en $-\infty$.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
- variations et extrema : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\tanh x$	$\cap$	PI	$\cup$

- Graphique



13.8.4 $f(x) = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\text{sh}\, x}$

- dom f : $\mathbb{R}_0$
- ens val : $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
- parité : impaire
- zéro : aucun
- continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, AV : $\equiv x = 0$

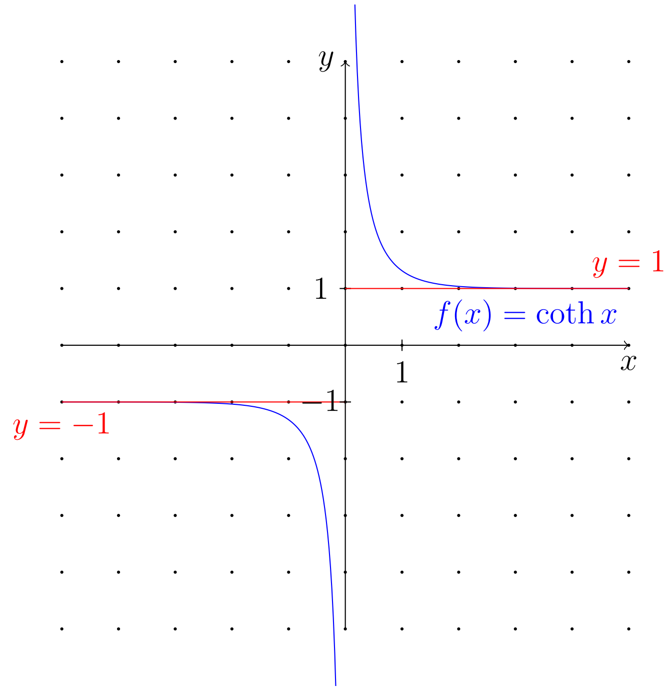
  AH : $\equiv y = 1$ en $+\infty$ et AH $\equiv y = -1$ en $-\infty$.
- dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et $(\coth x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2\, x}$
- variations et extrema :

x		0	
$\coth x$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\tanh x$	$\cup$	$\nexists$	$\cup$

- Graphique



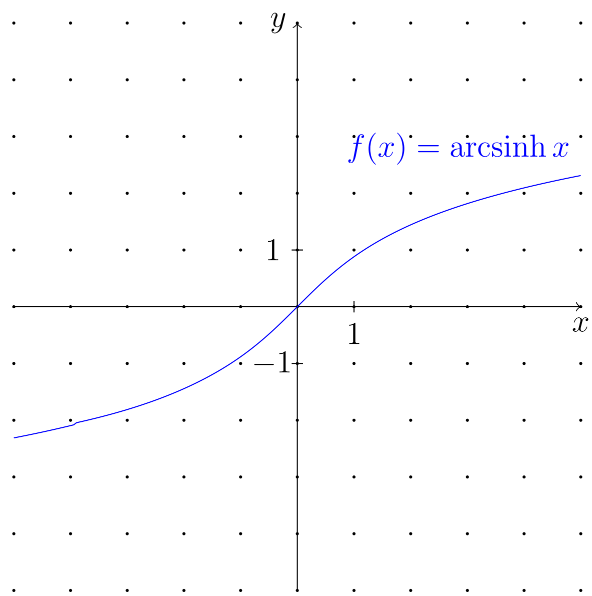
13.9 Fonctions hyperboliques inverses

13.9.1 $f(x) = \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

- dom f : $]-\infty, +\infty[$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $\mathbb{R}$, pas d'asymptote.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\operatorname{arcsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- variations et extrema : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\operatorname{arcsinh} x$	$\cup$	PI	$\cap$

- Graphique

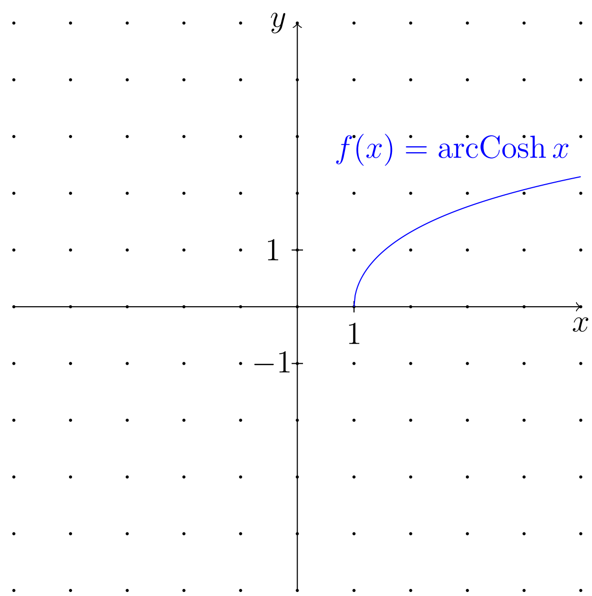


13.9.2 $f(x) = \operatorname{arcCosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

- dom f : $[1, +\infty[$
- ens val : $[0, +\infty[$
- parité : ni paire, ni impaire
- zéro : strictement positive sur $\mathbb{R}$
- continue sur $[1, +\infty[$, pas d'asymptote.
- dérivable sur $]1, +\infty[$ et $(\operatorname{arcCosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
- variations et extrema :

x	1	
$\operatorname{arcCosh} x$	$\nexists$	$\nearrow$

- concavité et point d'inflexion : concavité négative sur $[1, +\infty[$
- Graphique

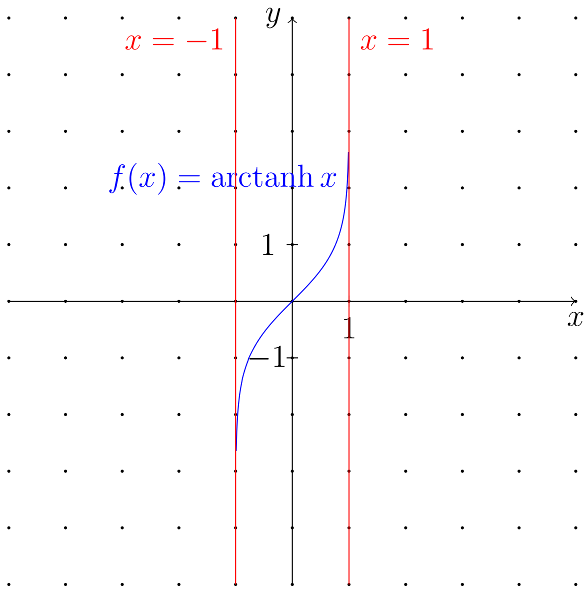


13.9.3 $f(x) = \operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

- dom f : $]-1,1[$
- ens val : $\mathbb{R}$
- parité : impaire
- zéro : $x = 0$
- continue sur $]-1,1[$, AV $\equiv x = 1$ et AV $\equiv x = -1$.
- dérivable sur $]-1,1[$ et $(\operatorname{arctanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
- variations et extrema : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\operatorname{arctanh} x$	$\cap$	PI	$\cup$

- Graphique



13.9.4 $f(x) = \operatorname{arcCoth} x$

- dom f : $\mathbb{R}_0$
- ens val : $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
- parité : impaire
- zéro : aucun
- continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, AV : $\equiv x=0$

  AH : $\equiv y=1$ en $+\infty$ et AH $\equiv y=-1$ en $-\infty$.
- dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et $(\coth x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
- variations et extrema :

x		0	
$\coth x$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

- concavité et point d'inflexion

x		0	
$\tanh x$	$\cup$	$\nexists$	$\cup$

- Graphique

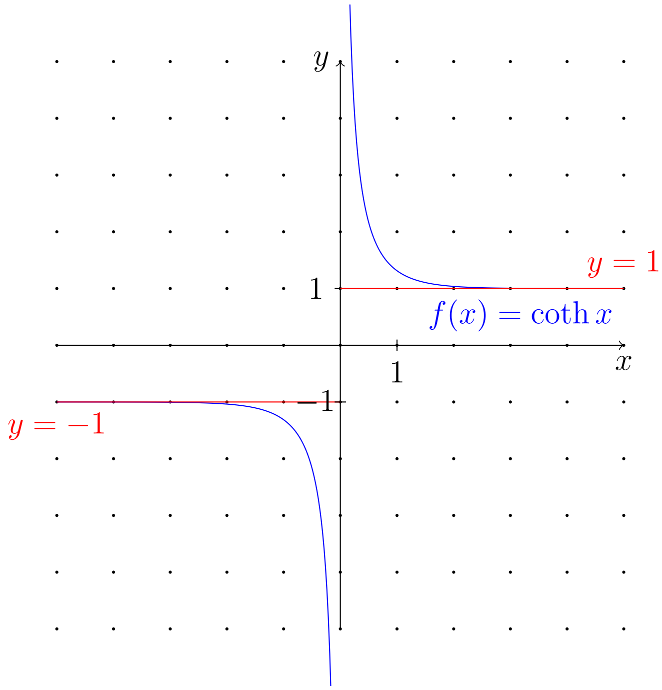

y
$y = 1$
1
$f(x) = \coth x$
1
x
-1
$y = -1$

Table des matières

1 Notions de base **3**

1.1 Définitions 3

1.2 Lecture de graphique 3

1.3 Fonctions paires et impaires 6

1.3.1 Définition 6

1.3.2 Propriétés du graphique 7

1.3.3 Fonctions fondamentales 8

1.3.4 Propriétés 8

1.4 Variations et extrema 8

1.4.1 Croissance et décroissance 8

1.4.2 Extrema d'une fonction 9

1.5 Transformations graphiques 11

1.5.1 $f(x)+k$ 11

1.5.2 $f(x+k)$ 11

1.5.3 $k \cdot f(x)$ 12

1.5.4 $f(k \cdot x)$ 12

1.5.5 $|f(x)|$ 13

2 Limites **15**

2.1 Point adhérent 15

2.2 Définitions intuitives 16

2.2.1 Limite finie à l'infini 16

2.2.2 Limite infinie à l'infini 18

2.2.3 Limite infinie en un réel 20

2.2.4 Limite finie en un réel 24

2.3 Calcul de limites 26

2.3.1 Limites fondamentales 26

2.3.2 Limites et opérations 27

2.3.3 Limite d'une fonction de fonction 29

2.4 Cas d'indétermination 29

2.4.1 Polynômes : cas $[\infty - \infty]$ 29

2.4.2 Fonction rationnelle : $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 30

2.4.3 Fonctions irrationnelles 31

2.4.4 Fonction rationnelle : $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 32

2.4.5 Fonctions irrationnelles 32

2.5 Limites et inégalités 33

3 Asymptotes **35**

3.1 Asymptote horizontale 35

3.2 Asymptote oblique 36

3.2.1 Définition 36

3.2.2 Critère d'existence d'une asymptote oblique 37

3.3 Asymptote verticale 38

3.4 Co-existence d'asymptotes 40

3.4.1 Asymptotes horizontales et obliques 40

3.4.2 Asymptotes verticales 41

3.5 Valeurs supérieures et inférieures 42

3.5.1 Définitions 42

3.5.2 Interprétation graphique 42

3.5.3 Position d'un graphique par rapport à une asymptote oblique 44

4 Fonctions continues **47**

4.1 Définitions 47

4.2 Propriétés 49

4.2.1 Opérations sur les fonctions continues 49

4.2.2 Continuité d'une fonction de fonction 49

4.3 Exemples fondamentaux 49
4.4 Théorèmes 50
4.4.1 Théorème des bornes atteintes 50
4.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires 51

5 Fonctions dérivables 53
5.1 Définitions 53
5.2 Formules de dérivabilité 54
5.2.1 Dérivées immédiates 55
5.2.2 Propriétés 56
5.3 Interprétation géométrique 59
5.3.1 Tangente au graphique d'une fonction en un de ses points 59
5.3.2 Points de non dérivabilité 60
5.4 Théorèmes 63
5.4.1 Lien entre continuité et dérivabilité 63
5.4.2 Condition nécessaire pour avoir un extremum 64
5.4.3 Théoreme de Rolle 65
5.4.4 TAF 65
5.4.5 Théorème de l'Hospital 66

6 Variations 69
6.1 Lien entre dérivée et croissance 69
6.1.1 Définition 69
6.1.2 Propriétés 69
6.2 Extrema 71
6.2.1 Point stationnaire 71
6.2.2 Condition suffisante pour avoir un extremum local 71
6.2.3 Détermination de la nature de l'extremum 73
6.3 Concavité et point d'inflexion 75
6.3.1 Définitions 75
6.3.2 Point d'inflexion 76
6.3.3 Tangente et concavité d'un graphique 78

7 Fonctions trigonométriques **81**

7.1 Convention 81

7.2 Période 81

7.2.1 Définition 81

7.2.2 Interprétation graphique 82

7.2.3 Période des principales fonctions trigonométriques 82

7.2.4 Trouver la période d'une fonction trigonométrique 84

7.2.5 Asymptotes 84

7.3 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 85

8 Fonctions réciproques **87**

8.1 Bijection 87

8.1.1 Injection 87

8.1.2 Surjection 88

8.1.3 Bijection 89

8.2 Fonction réciproque 91

8.2.1 Définition 91

8.2.2 Limites 92

8.2.3 Dérivée d'une fonction réciproque 93

8.2.4 Graphique 94

8.3 Fonctions cyclométriques 94

8.3.1 $f(x) = \arcsin x$ 94

8.3.2 $f(x) = \operatorname{arcos} x$ 96

8.3.3 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 97

8.3.4 $f(x) = \operatorname{arcotg} x$ 97

9 Primitives **99**

9.1 Définition 99

9.2 Primitives immédiates 100

9.3 Méthodes de primitivation 100

9.3.1 Combinaisons linéaires 100

9.3.2 Par artifice 101

9.3.3 Par substitution . . . 101
9.3.4 Par parties . . . 102
9.4 Quelques primitives classiques . . . 104
9.4.1 Primitives de fonctions trigonométriques . . . 104
9.4.2 Primitives de fonctions rationnelles . . . 106
9.4.3 Primitives auto-référentes . . . 107

10 Logarithmes 109
10.1 Logarithme népérien . . . 109
10.1.1 Définition . . . 109
10.1.2 Graphique . . . 109
10.1.3 Extension . . . 110
10.1.4 Principe d'équivalence . . . 111
10.1.5 Limites particulières . . . 111
10.2 Logarithme en base a . . . 111
10.2.1 Définition . . . 111
10.2.2 Limites et asymptotes . . . 112
10.2.3 Dérivée . . . 112
10.2.4 Graphiques . . . 113
10.2.5 Principe d'équivalence . . . 114
10.2.6 Changement de base . . . 114
10.3 Propriétés algébriques . . . 114

11 Exponentielles 117
11.1 Exponentielle népérienne . . . 117
11.1.1 Définition . . . 117
11.1.2 Graphique . . . 117
11.1.3 Limites particulières . . . 118
11.2 Propriétés algébriques . . . 119
11.3 Puissance de e à exposant réel . . . 119
11.4 Nouvelle notation . . . 120
11.5 Exponentielle de base a . . . 120

11.5.1 Définition 120
11.5.2 Graphiques 121

12 Calcul intégral **123**
12.1 Introduction 123
12.2 Définition 125
12.3 Propriétés 126
12.4 Théorème de la moyenne 132
12.5 Théorème fondamental du calcul intégral 133
12.6 Volume de révolution 134
12.7 Méthodes d'intégration 135
12.7.1 Intégration par substitution 135
12.7.2 Intégration par parties 136

13 Annexe1
Fonctions fondamentales **137**
13.1 Monômes 137
13.1.1 $f(x) = x$ 137
13.1.2 $f(x) = x^2$ 138
13.1.3 $f(x) = x^3$ 139
13.2 Fonctions rationnelles 140
13.2.1 $f(x) = \frac{1}{x}$ 140
13.2.2 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 141
13.3 Fonctions irrationnelles 142
13.3.1 $f(x) = \sqrt{x}$ 142
13.3.2 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 143
13.4 Valeur absolue 144
13.4.1 $f(x) = |x|$ 144
13.5 Exponentielles et logarithmes 145
13.5.1 $f(x) = \ln x$ 145
13.5.2 $f(x) = \log_a x(a > 1)$ 146
13.5.3 $f(x) = \log_a x(0 < a < 1)$ 147

13.5.4 $f(x) = e^x$ 148

13.5.5 $f(x) = a^x (a > 1)$ 148

13.5.6 $f(x) = a^x (0 < a < 1)$ 149

13.6 Fonctions trigonométriques 150

13.6.1 $f(x) = \sin x$ 150

13.6.2 $f(x) = \cos x$ 151

13.6.3 $f(x) = \operatorname{tg} x$ 152

13.6.4 $f(x) = \operatorname{cotg} x$ 153

13.7 Fonctions cyclométriques 154

13.7.1 $f(x) = \arcsin x$ 154

13.7.2 $f(x) = \operatorname{arcos} x$ 155

13.7.3 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 156

13.8 Fonctions hyperboliques 157

13.8.1 $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 157

13.8.2 $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 158

13.8.3 $f(x) = \tanh x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\cosh x}$ 159

13.8.4 $f(x) = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{sh} x}$ 160

13.9 Fonctions hyperboliques inverses 161

13.9.1 $f(x) = \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ 161

13.9.2 $f(x) = \operatorname{arcCosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ 162

13.9.3 $f(x) = \operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{x + 1}{x - 1} \right|$ 163

13.9.4 $f(x) = \operatorname{arcCoth} x$ 164