QUELQUES PROBLÈMES (2)

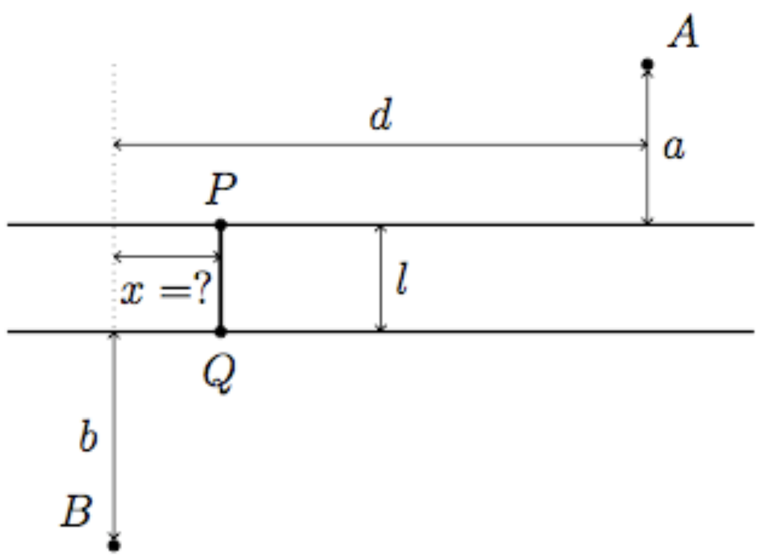
Voici quelques problèmes de géométrie posés à des examens d'admission de l'ULB.
Ils sont d'un niveau comparable à ceux posés dans les autres facultés.

Problème 1

Deux villes A et B sont séparées par une rivière rectiligne de largeur l, située à une distance a de A et b de B. Les droites perpendiculaires à la rivière abaissées de A et B sont éloignées d'une distance d. On souhaite placer un pont perpendiculaire à la rivière reliant un point P de la berge du côté de A à un point Q de la berge du côté de B, de sorte que la distance entre A et P soit égale à la distance entre B et Q.

a) Calculez la distance x entre le pont et la perpendiculaire à la rivière abaissée de B, en fonction de a, b, d et l.

b) Prouvez que le point P doit se trouver sur la médiatrice du segment $[AC]$, où C est le point tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QP}$.



Problème 2

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne le point $P(1, 0, -1)$, le plan $\pi \equiv x - 2y + z = 0$ et les droites

$$a \equiv \begin{cases} x - y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 1 \end{cases} \qquad b \equiv \begin{cases} x - 2y - z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= -1 \end{cases}$$

a) Etablissez des équations paramétriques de la droite c passant par P, parallèle à π et coupant la droite a.

b) Etablissez des équations cartésiennes de la droite d passant par P et coupant les droites a et b.

Problème 3

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy. Soit $\mathcal{C}_0$ le cercle de centre O et de rayon 3. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de rayons fixes 1 et 2, respectivement, se déplaçant à l'extérieur de $\mathcal{C}_0$ en restant non seulement tangents à celui-ci mais aussi tangents entre eux (le centre de $\mathcal{C}_1$ étant extérieur à $\mathcal{C}_2$).

a) Déterminez les longueurs des côtés du triangle OPQ, où P est le centre de $\mathcal{C}_1$ et Q est le centre de $\mathcal{C}_2$.

b) En déduire les angles de ce triangle.

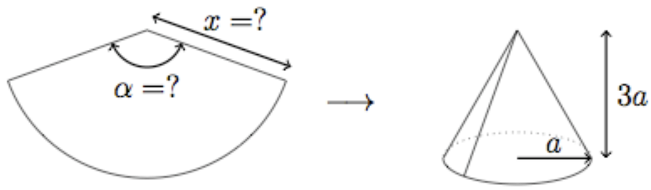
c) Soit R le centre du cercle circonscrit au triangle OPQ. Identifiez la nature du lieu parcouru par R lorsque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se déplacent sur $\mathcal{C}_0$, et donnez une équation cartésienne de ce lieu.

Problème 4

On souhaite fabriquer un "chapeau pointu" de forme conique à partir du développement représenté ci-dessous.

a) Sachant que le chapeau obtenu devrait avoir une hauteur $3a$ et sa base un rayon a, calculez la longueur x nécessaire sur le développement.

b) De même, calculez l'angle α.



Problème 5

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ et $D(2, 3, 1)$.

a) Donnez une équation cartésienne du plan ABC et une paire d'équations cartésiennes de la droite OD.

b) Donnez des équations paramétriques de la droite d du plan ABC passant par A et orthogonale à la droite OD.

c) Donnez des équations paramétriques de la droite d' du plan ABC passant par B et sécante à la droite OD.

Problème 6

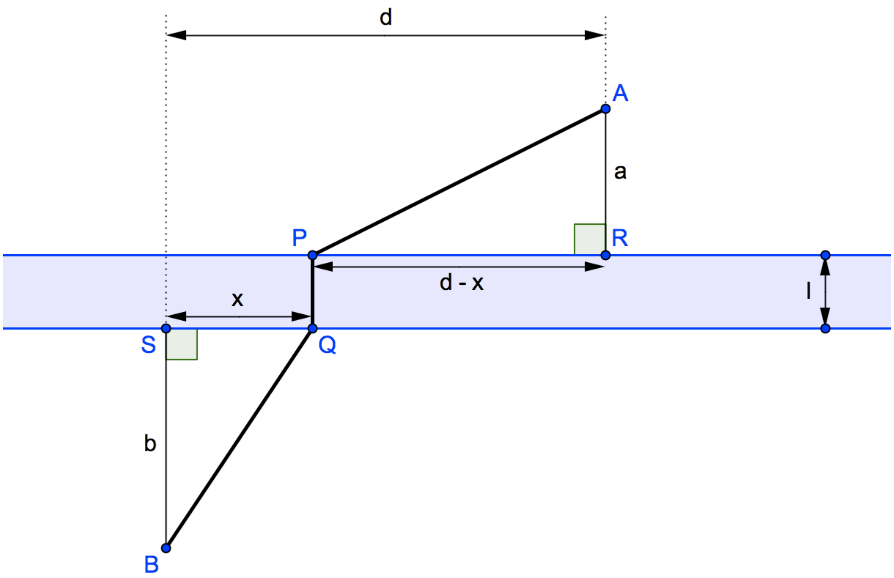
Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy.

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $x^2 = 2py$, A un point variable de $\mathcal{P}$ d'abscisse $\lambda \neq 0$ et B un point variable de Ox d'abscisse μ.

a) Quelle relation doivent vérifier λ et μ pour que la droite AB soit tangente à $\mathcal{P}$?

b) Démontrez que cette relation est équivalente à imposer que AB soit perpendiculaire à BF, où F est le foyer de $\mathcal{P}$.

Problème 1



a) Dans le triangle rectangle BSQ : $x^2 + b^2 = |BQ|^2$ (1)

Dans le triangle rectangle ARP : $(d-x)^2 + a^2 = |AP|^2$ (2)

Soustrayons membre à membre l'égalité (2) de l'égalité (1) :

$$x^2 + b^2 - d^2 + 2dx - x^2 - a^2 = |BQ|^2 - |AP|^2 .$$

Comme on souhaite que $|BQ| = |AP|$, le second membre est nul et nous obtenons :

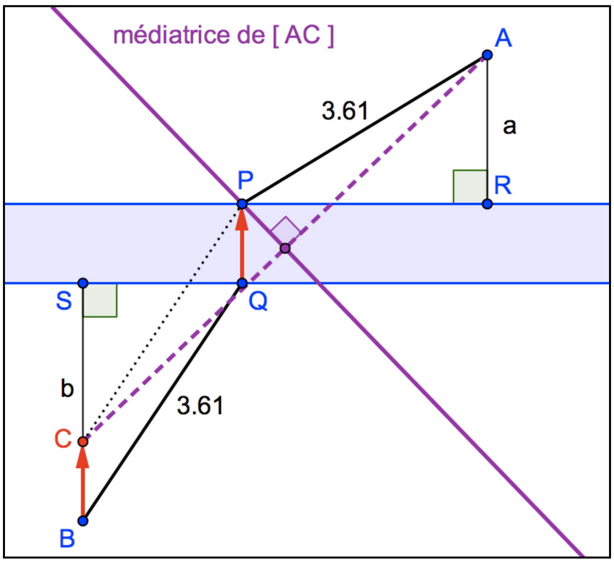
$$b^2 - d^2 + 2dx - a^2 = 0 \text{ et donc } \boxed{x = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2d}} .$$

b) Pour démontrer que P appartient à la médiatrice du segment $[AC]$, il suffit de prouver que P est équidistant de A et de C : $|AP| \overset{?}{=} |CP|$.

Or, si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QP}$, alors le quadrilatère $BQPC$ est un parallélogramme et donc $|BQ| = |CP|$.

Mais comme $|BQ| = |AP|$ par hypothèse, nous avons $|CP| = |AP|$.

Ci-contre est représentée une situation où $|BQ| = |AP|$. Nous observons que P est bien sur la médiatrice de $[AC]$.

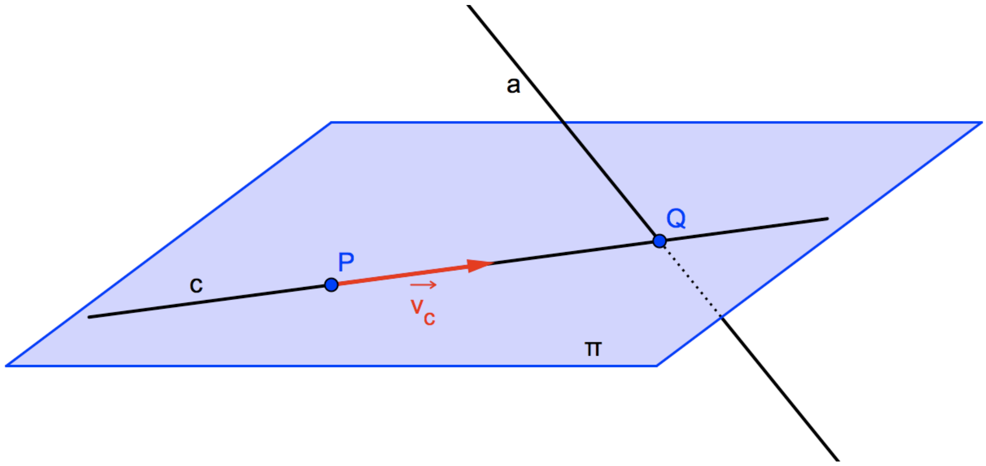


Problème 2

a) La première chose à faire est d'analyser attentivement l'énoncé, ce qui nous permet de constater que le point P appartient au plan π.
En effet, les coordonnées de P sont solutions de l'équation de π :

$$P(1,0,-1) \quad \in \quad \pi \equiv x - 2y + z = 0 \; .$$

Si la droite c est parallèle à π et passe par P, alors c est incluse dans π !
De plus, la droite c coupe la droite a. Soit Q leur point de rencontre ; ce ne peut être que le point de percée de a dans π.



Cherchons ce point Q en résolvant le système formé par les équations de a et celle de π :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 & (1) \\ 2x + y - z = 1 & (2) \\ x - 2y + z = 0 & (3) \end{cases} .$$

Éliminons par exemple z entre (1) et (2), puis entre (2) et (3).

En additionnant (1) et (2) (les équations de a) nous trouvons : $3x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1$
(notons au passage que a est donc incluse dans le plan $\alpha \equiv x = 1$).

En additionnant (2) et (3), nous trouvons : $3x - y = 1 \quad \xrightarrow{x=1} \quad y = 2$.

En remplaçant ces valeurs dans (1), nous trouvons $z = 3$ et donc $\boxed{Q(1,2,3)}$.

Nous avons ainsi $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de c est par exemple $\vec{v_c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Utilisant les coordonnées de P, voici des équations paramétriques de c : $\boxed{c \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = 2k - 1 \end{cases}}$.

b) La droite d comprend le point P situé dans le plan $\alpha \equiv x = 1$, et coupe la droite a incluse dans ce même plan. Comme $P \notin a$, il est donc clair que d est incluse dans ce plan aussi.
De plus, puisque d doit couper la droite b , elle ne peut le faire qu'au point de percée de b dans le plan α . Soit R ce point.

<u>Point de percée de b dans α</u>

Remplaçons x par 1 dans les équations de b : $\begin{cases} 1-2y-z=0 \\ 3-y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+z=1 & (1) \\ y-2z=4 & (2) \end{cases}$.

Les solutions de ce système sont $y = \dfrac{6}{5}$ et $z = -\dfrac{7}{5}$; donc $b \cap \alpha = \{R\}$ avec $R\left(1, \dfrac{6}{5}, -\dfrac{7}{5}\right)$.

<u>Équations de d</u>

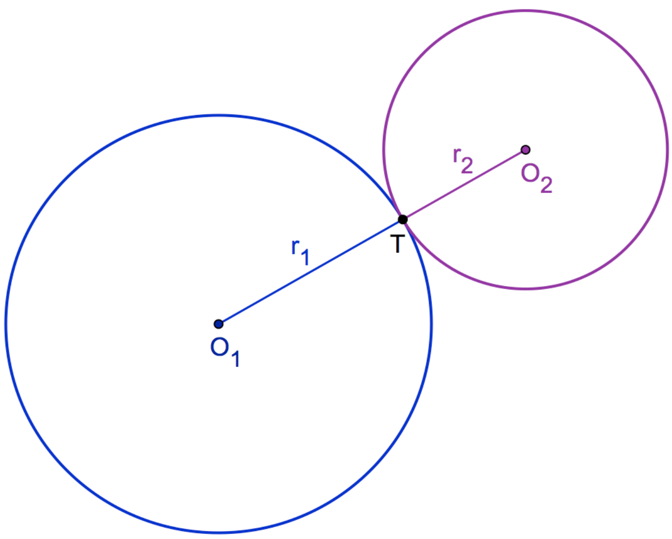
Sachant que $d = PR$ avec $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$, prenons $\vec{v}_d = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Équations paramétriques et cartésiennes : $d \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 3k \\ z = -k-1 \end{cases} \quad (k \in R)$ et $\boxed{d \equiv \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y}{3} + z + 1 = 0 \end{cases}}$.

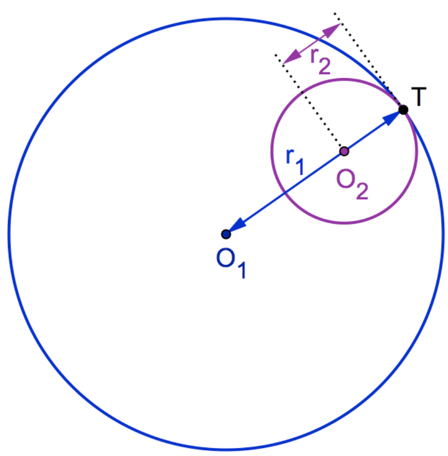
Problème 3

Avant de commencer, rappelons des propriétés relatives aux cercles tangents.
Elles peuvent paraître évidentes, mais elles doivent toujours venir à l'esprit quand on est confronté à un problème impliquant de tels cercles.

Soient deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 , et de rayons respectifs r_1 et r_2 .
S'ils sont tangents extérieurement, la distance entre leurs centres est $\lvert O_1O_2 \rvert = r_1 + r_2$.
S'ils sont tangents intérieurement, la distance entre leurs centres est $\lvert O_1O_2 \rvert = \lvert r_1 - r_2 \rvert$.

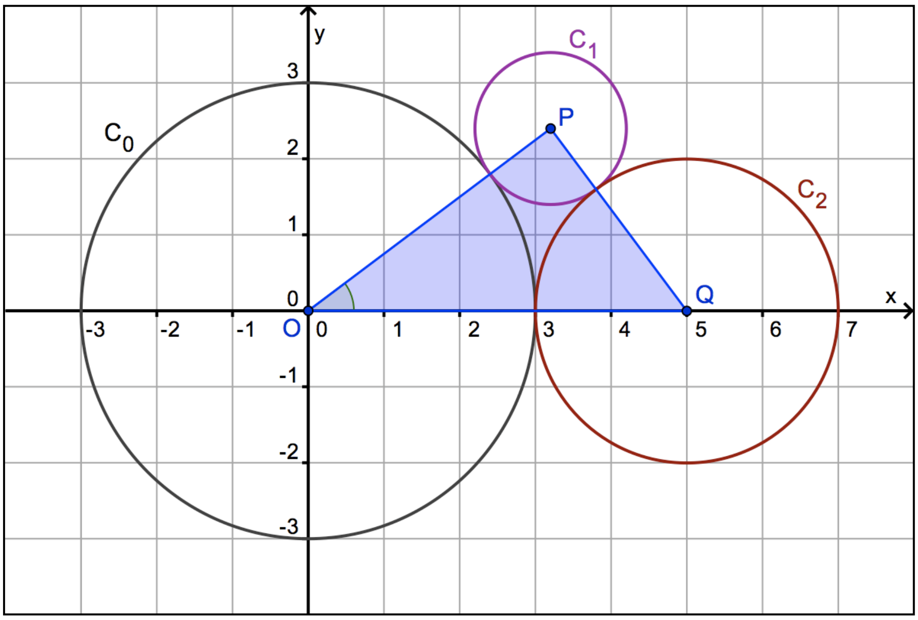


$\lvert O_1O_2 \rvert = r_1 + r_2$



$\lvert O_1O_2 \rvert = \lvert r_1 - r_2 \rvert$

a) Utilisons ce rappel dans notre problème (après avoir réalisé un schéma évidemment ☺).



1° Le cercle C_0 de centre O et de rayon 3 est tangent extérieurement au cercle C_1 de centre P et de rayon 1. Nous en déduisons que $|OP| = 4$.

2° Le cercle C_0 est tangent extérieurement au cercle C_2 de centre Q et de rayon 2. Nous en déduisons que $|OQ| = 5$.

3° Le cercle C_1 de centre P et de rayon 1 est tangent extérieurement au cercle C_2 de centre Q et de rayon 2. Nous en déduisons que $|PQ| = 3$.

b) Le point précédent montre que OPQ est le fameux triangle « 3 - 4 - 5 » cher aux maçons et à d'autres professions : il est rectangle en P car $|OP|^2 + |PQ|^2 = |OQ|^2$.

On trouve donc facilement les autres angles :

$$\tan P\hat{O}Q = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{3}{4} \rightarrow P\hat{O}Q \approx 36{,}87° \rightarrow P\hat{Q}O \approx 53{,}13° \ .$$

c) Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection de ses médiatrices. Quand le triangle est rectangle, grâce à une propriété bien connue, nous savons qu'il est inscrit dans un demi-cercle dont un diamètre est l'hypoténuse du triangle.
Le centre du cercle circonscrit est donc simplement le milieu R de l'hypoténuse et c'est de ce point R que nous devons chercher le lieu.

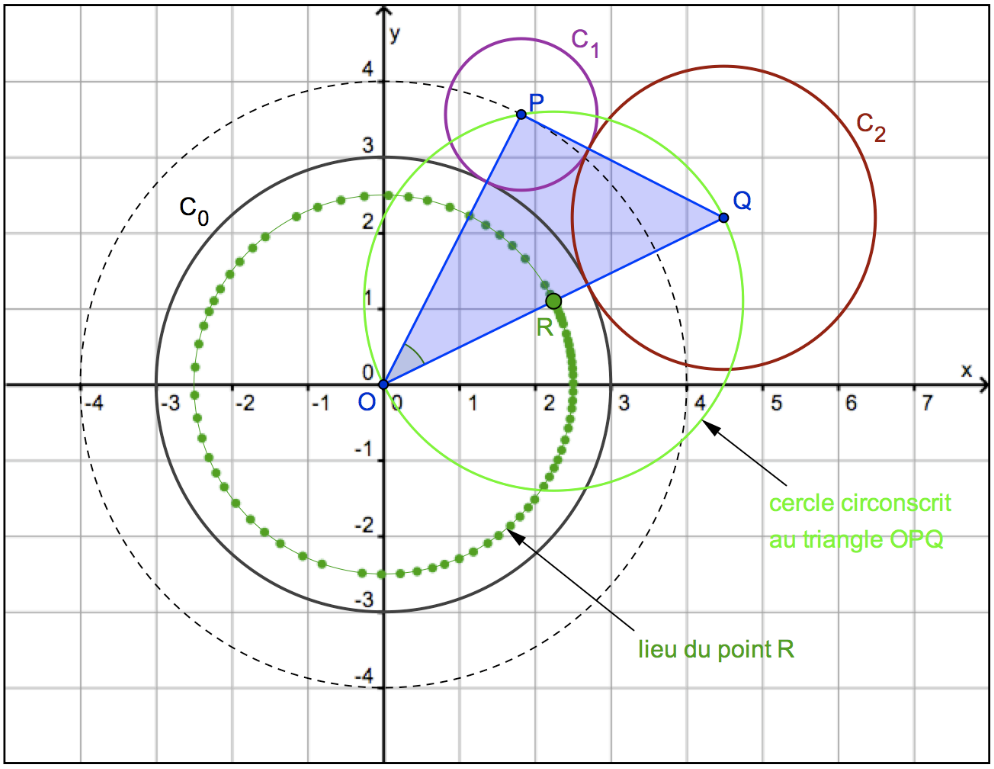
Lorsque C_1 et C_2 « roulent » sur C_0 , le triangle OPQ garde sa forme et le point R est toujours situé à une distance $\frac{|OQ|}{2} = \frac{5}{2}$ du point O .

Le lieu $\mathscr{L}$ de R est donc le cercle centré en O et de rayon $\frac{5}{2}$ et nous avons :

$$\boxed{\mathscr{L} \equiv x^2 + y^2 = \frac{25}{4}} \ .$$

Illustration à la page suivante.

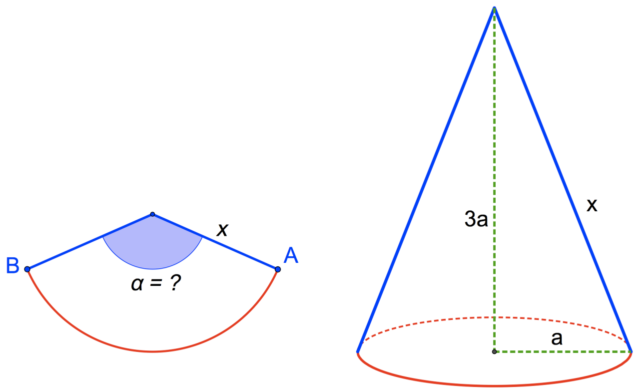
Pour faire rouler le cercle C_1 sur C_0 avec GEOGEBRA, il faut faire en sorte que son centre P se déplace sur le cercle centré en O et de rayon 4 (représenté en pointillés).
Nous aurions aussi pu déplacer le point Q sur un cercle de centre O et de rayon 5.
Le lieu de R est représenté par les points verts.



Problème 4

a) La représentation ci-contre montre que le rayon x du secteur de disque utilisé pour fabriquer le cône est égal à la génératrice (en bleu) de celui-ci.

Donc, $x^2 = (3a)^2 + a^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{10}\, a$.



b) La longueur de l'arc de cercle AB (en rouge) est égale à la circonférence de la base du cône, c'est-à-dire $2\pi a$.

Mais nous savons aussi que cette longueur est égale à la mesure en radians de α multipliée par le rayon du secteur de disque : αx [(*)].

Par conséquent : $2\pi a = \alpha x \quad \rightarrow \quad 2\pi a = \alpha \sqrt{10}\, a \quad \rightarrow \quad \alpha = \dfrac{2\pi}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}\,\pi}{5} \approx 1{,}9869\ (rad)$.

Il faut donc un secteur angulaire d'environ $113{,}84°$ pour construire un cône droit dont la hauteur est égale au triple du rayon de base.

(*) *Voir cours de 5e, trigonométrie, page 3.*

Problème 5

a) Nous savons que si un plan π comprend les points $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$ où a , b et c sont des réels non nuls, alors une équation cartésienne de π est donnée par la formule

$$\pi \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ .}^{(**)}$$

Comme le plan ABC est déterminé par les points $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$, nous avons $ABC \equiv \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ou encore $\boxed{ABC \equiv 6x+3y+2z-6=0}$.

Notons que si on a oublié la formule (**) , la méthode du déterminant fonctionne toujours !

La droite OD a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$. Donc : $OD \equiv \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z$.

Équations cartésiennes : $\boxed{OD \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}}$.

b) Cherchons un second point P de la droite d . Soit $P(p,q,r)$ ce point.
Comme d est incluse au plan ABC , on a $P \in ABC$ et donc : $6p+3q+2r-6=0$ (1) .

Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}p-1\\q\\r\end{pmatrix}$ et il est orthogonal à $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

Leur produit scalaire est donc nul : $2p+3q+r-2=0$ (2) .

Résolvons le système formé par les équations (1) et (2) .
Comme il y a trois inconnues, posons par exemple $r=2$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} 6p+3q-2=0 & (3) \\ 2p+3q=0 & (4) \end{cases} .$$

En soustrayant membre à membre (4) de (3) : $4p - 2 = 0 \ \rightarrow\ p = 1/2 \ \rightarrow\ q = - 1/3$.

Nous avons donc obtenu $P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3},2\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/3\\2\end{pmatrix}$.

Comme vecteur directeur de d prenons par exemple $\overrightarrow{v_d}=-6\,\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}3\\2\\-12\end{pmatrix}$ (facultatif).

Des équations paramétriques de d sont donc : $\boxed{\begin{cases} x=3k+1 \\ y=2k \qquad (k \in R) \\ z=-12k \end{cases}}$.

(**) *Voir cours de 5^{e} , géométrie analytique de l'espace, page 7.*

c) Cherchons un second point Q de la droite d'. Soit $Q(s,t,u)$ ce point.
La droite d' étant incluse au plan ABC, le point Q lui appartient et donc :

$$6s + 3t + 2u - 6 = 0 \quad (1) .$$

Un vecteur directeur de d' est $\overrightarrow{BQ}\begin{pmatrix} s \\ t-2 \\ u \end{pmatrix}$.

Comme d' est incluse à ABC et sécante à OD, le point commun à d' et OD ne peut être que le point de percée de OD dans ABC.

<u>Point de percée I de OD dans ABC</u>

Reprenons les équations trouvées au point (a) :

$$ABC \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \quad \text{et} \quad OD \equiv \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} .$$

En remplaçant x par $2z$ et y par $3z$ dans l'équation de ABC, nous trouvons :

$$12z + 9z + 2z - 6 = 0 \quad \to \quad z = \frac{6}{23} \quad \text{et donc} \quad OD \cap ABC = \{I\} = \left\{\left(\frac{12}{23}, \frac{18}{23}, \frac{6}{23}\right)\right\} .$$

Comme la droite d' passe par le point $B(0,2,0)$, un de ses vecteurs directeurs est $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} 12/23 \\ -28/23 \\ 6/23 \end{pmatrix}$.

Pour écrire les équations paramétriques, prenons $\overrightarrow{v_{d'}} = \frac{23}{2}\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}$ (facultatif).

$$\boxed{d' \equiv \begin{cases} x = 6k \\ y = -14k + 2 \quad (k \in R) \\ z = -3k \end{cases}}$$

Problème 6

Une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x^2 = 2py$ a pour sommet $(0,0)$ et est « verticale tournée vers le haut » (axe de symétrie $x = 0$ et concavité tournée vers les $y > 0$).

Le point A d'abscisse $\lambda \neq 0$ a pour coordonnées $\left(\lambda , \dfrac{\lambda^2}{2p}\right)$. Nous avons aussi $B(\mu ,0)$.

a) Si nous voulons que AB soit tangente à $\mathcal{P}$, il faut que la pente de AB soit égale au nombre dérivé au point A de la fonction associée à la parabole.

Pente de AB : $m_{AB} = \dfrac{\dfrac{\lambda^2}{2p} - 0}{\lambda - \mu} = \dfrac{\lambda^2}{2p(\lambda - \mu)}$ (1) .

Pente de la tangente t : $y' = \left(\dfrac{x^2}{2p}\right)' = \dfrac{x}{p}$ et, au point A d'abscisse λ , $m_t = y'(\lambda) = \dfrac{\lambda}{p}$ (2) .

Comparant (1) et (2), nous trouvons :

$$\frac{\lambda^2}{2p(\lambda - \mu)} = \frac{\lambda}{p} \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda}{2(\lambda - \mu)} = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2\lambda - 2\mu \quad \rightarrow \quad \boxed{\lambda = 2\mu} .$$

b) Le foyer F de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$. La pente de BF est $m_{BF} = \dfrac{\dfrac{p}{2} - 0}{0 - \mu} = -\dfrac{p}{2\mu}$.

Si $\lambda = 2\mu$, alors $m_{BF} = -\dfrac{p}{\lambda}$. D'après (2) , cela signifie que $m_{BF} = -\dfrac{1}{m_t}$ et donc que $BF \perp t$.

Voici un exemple illustrant cette propriété avec $p = 3$ et $\lambda = 5$. On a bien $\mu = 5/2$ et $BF \perp t$.