QUELQUES PROBLÈMES (3)

Voici quelques problèmes de géométrie posés à un examen d'admission de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège.
Ils sont d'un niveau comparable à ceux posés dans les autres facultés.

Problème 1

On considère un cercle passant par les extrémités B et C de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC. Ce cercle coupe la droite AB en B et en un autre point noté B'.
De même, il coupe la droite AC en C et en un autre point noté C'.
Les points B' et C' sont distincts de A.

Démontrer que la médiane issue de A du triangle ABC est confondue avec la hauteur issue de A du triangle $A'B'C'$.

Problème 2

On fixe un repère orthonormé du plan. Quel est le lieu des points du premier quadrant par lesquels passe une et une seule droite déterminant, avec les axes, un triangle contenu dans le premier quadrant et d'aire égale à 4 ?

Problème 3

Un point appartient à la diagonale BD d'un carré $ABCD$.

Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = |AP|^2 - c^2$$

où c désigne la longueur d'un côté du carré et où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Problème 4

Un plan π coupe les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ d'un cube en trois points notés respectivement B', C' et D'.
Dans le triangle $AB'C'$, on note H le pied de la hauteur issue de A.

a) Démontrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes de votre raisonnement, que la droite $B'C'$ est perpendiculaire au plan ADH.

b) En déduire que le plan ADH est perpendiculaire au plan π.

c) En déduire que la projection orthogonale de A sur le plan π est l'intersection de la hauteur issue de B' du triangle $B'C'D'$ et de la droite $C'D'$ (on peut aussi dire « pied de la hauteur issue de B' »).

Problème 5

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a \equiv \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_b \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

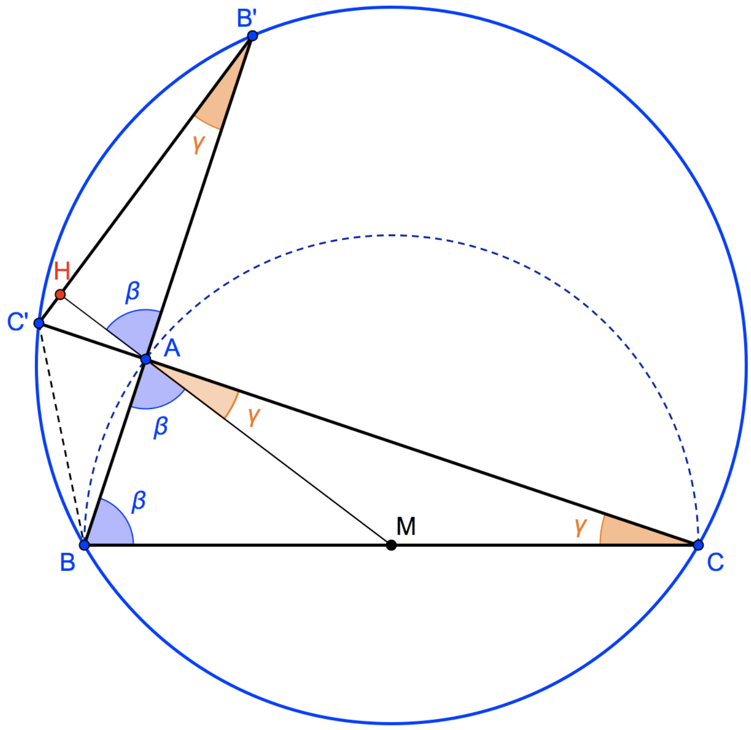
a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.

b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les droites soient concourantes.

c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors l'équation du plan contenant ces droites.

Les solutions qui suivent ne sont sans doute pas optimales. J'accorde davantage d'importance à une explication détaillée en restant proche des acquis des élèves du secondaire.
Parfois, c'est l'intuition qui mène à la solution (c'est le cas pour le problème 2).

Problème 1



Soit M le milieu de $[BC]$. La médiane issue de A est donc la droite AM.
Soit H le point où elle coupe le segment $[B'C']$.

Notre problème consiste à prouver que $AM = AH$ est une hauteur du triangle $AB'C'$.

D'abord, le triangle ABC étant rectangle en A, il est inscrit dans un demi cercle de centre M (représenté en pointillés sur la figure). Comme $|BM| = |AM|$ (rayon du demi-cercle), le triangle AMB est isocèle en M et $M\hat{A}B = M\hat{B}A = \beta$.

Et donc $\boxed{B'\hat{A}H = \beta}$ car $M\hat{A}B$ et $B'\hat{A}H$ sont des angles opposés par le sommet.

Ensuite, observons que les angles $A\hat{B}'H$ et $B\hat{C}A$ sont inscrits au grand cercle et interceptent le même arc de cercle BC.
Ils ont donc la même amplitude [(1)] : $\boxed{A\hat{B}'H = B\hat{C}A = \gamma}$.

Donc $A\hat{B}'H + B'\hat{A}H = \gamma + \beta = 90°$ car γ et β sont les angles aigus du triangle rectangle ABC.

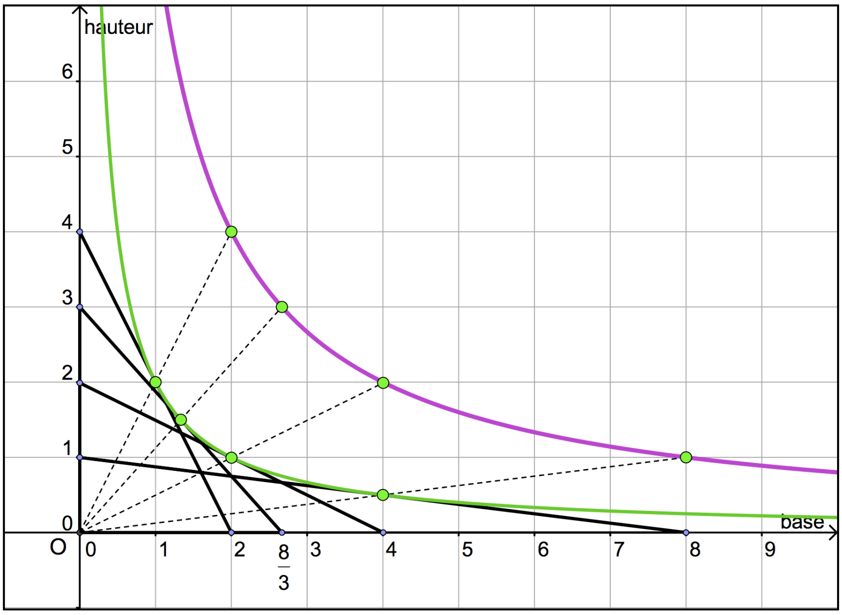
L'angle $A\hat{H}B$ est donc droit ce qui prouve que AH est une hauteur du triangle $AB'C'$.

---

(1) Voir cours de 5e, compléments de mathématique, page 51 (propriété 2).

Problème 2

Commençons par explorer graphiquement la situation en représentant quelques triangles répondant aux conditions. Ces triangles sont rectangles en O (origine du repère) et leurs côtés de l'angle droit sont situés sur les axes du repère.
Chaque triangle est déterminé par un couple « base - hauteur » (b, h).
Pour ceux qui sont représentés ci-dessous, les couples sont (2,4) , (8/3,3) , (4,2) et (8,1) .



La condition sur l'aire s'écrit $A = \frac{bh}{2} = 4 \iff bh = 8 \iff h = \frac{8}{b}$.

Nous reconnaissons là l'équation d'une hyperbole que nous avons le plus souvent rencontrée sous la forme $y = \frac{8}{x}$ (avec les asymptotes sont $x = 0$ et $y = 0$).
Elle est représentée en rose sur le graphique ci-dessus.

À tout point (b,h) de l'hyperbole correspond donc un triangle de sommets $(b,0)$, $(0,h)$ et O.
Ainsi, au point (2,4) , correspond le triangle de sommets $(2,0)$, $(0,4)$ et O ; au point (8/3,3) , correspond le triangle de sommets $(8/3,0)$, $(0,3)$ et O, etc.

La droite dont il est question dans l'énoncé du problème est évidemment celle qui comprend les points $(b,0)$, $(0,h)$. Mais quel est le point par lequel passe la seule droite déterminant le triangle ?

Notre attention est naturellement (?) attirée par le milieu de l'hypoténuse : le point $M\left(\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)$.

Comme $h = \frac{8}{b}$, nous avons aussi $\frac{h}{2} = \frac{8}{2b} \iff \frac{h}{2} = \frac{4}{b} \iff \frac{h}{2} = \frac{2}{b/2}$.

Donc, si nous désignons le point M par $M(x_M, y_M)$, nous avons $y_M = \frac{2}{x_M}$.

Nous avons maintenant de bonnes raisons de croire que le lieu cherché est le lieu des points M, c'est-à-dire l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$ avec $x > 0$ et $y > 0$ (en vert sur le graphique).

Nous allons achever de nous en convaincre …

Soit un point M de coordonnées $\left(x_M , \dfrac{2}{x_M}\right)$.

Une droite passant par M et de pente m a pour équation $y - \dfrac{2}{x_M} = m.\left(x - x_M\right)$.

Cette droite coupe l'axe

- des abscisses au point $\left(x_M - \dfrac{2}{m\,x_M} \text{ , } 0\right)$
- des ordonnées au point $\left(0 \text{ , } \dfrac{2}{x_M} - mx_M\right)$

L'aire du triangle ainsi formé est égale à $\dfrac{1}{2}.\left(x_M - \dfrac{2}{m\,x_M}\right).\left(\dfrac{2}{x_M} - m\,x_M\right)$.

Cette aire doit être égale à 4 : $\dfrac{1}{2}.\left(x_M - \dfrac{2}{m\,x_M}\right).\left(\dfrac{2}{x_M} - m\,x_M\right) = 4$.

Résolvons cette équation d'inconnue m où x_M est une constante …

$$\frac{m\,x_M^2 - 2}{m\,x_M}.\frac{2 - m\,x_M^2}{x_M} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad -m^2x_M^4 + 4\,m\,x_M^2 - 4 = 8\,m\,x_M^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2x_M^4 + 4\,m\,x_M^2 + 4 = 0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16\,x_M^4 - 16\,x_M^4 = 0$.

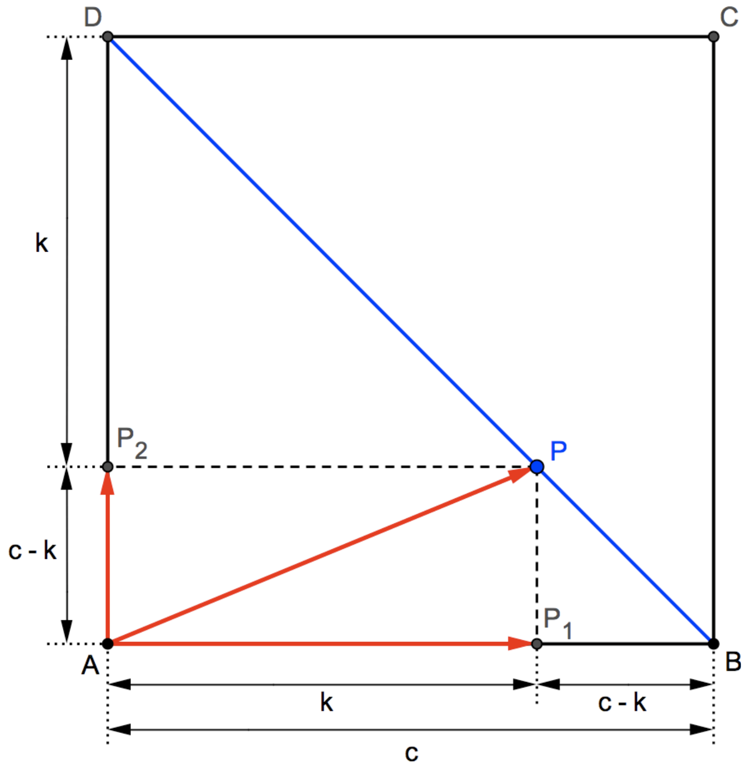
Elle n'admet donc qu'une seule solution $m = -\dfrac{4\,x_M^2}{2\,x_M^4} = -\dfrac{2}{x_M^2}$ ce qui prouve qu'il y a une seule droite passant par M et déterminant le triangle d'aire 4 .

L'équation de cette droite est $y - \dfrac{2}{x_M} = -\dfrac{2}{x_M^2}.\left(x - x_M\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{2}{x_M^2}\,x + \dfrac{4}{x_M}$.

Vous avez peut-être remarqué que la pente de cette droite $m = -\dfrac{2}{x_M^2}$ n'est autre que la dérivée de la fonction $y = \dfrac{2}{x}$ calculée en $x = x_M$. En effet, vous savez que $y' = \left(\dfrac{2}{x}\right)' = -\dfrac{2}{x^2}$.

Finalement, le lieu cherché est bien l'arc d'hyperbole $y = \dfrac{2}{x}$ et par chacun de ses points passe une seule droite déterminant un triangle d'aire égale à 4 , et cette droite est la tangente à la courbe en ce point. Elle porte l'hypoténuse du triangle.

Problème 3



Soit P un point de la diagonale $[BD]$, ainsi que P_1 et P_2 ses projections orthogonales respectives sur les segments $[AB]$ et $[AD]$.

Soit k la longueur du segment $[AP_1]$. La longueur de $[P_1B]$ est donc $c - k$.

Comme P est sur une diagonale du carré, le triangle PP_1B est isocèle et donc

$$|AP_2| = |P_1B| = c - k \ .$$

Calculons le produit scalaire demandé :

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) \bullet \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}\right) \qquad \text{(relation de CHASLES)}$$

$$= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}^2 \qquad \text{(distributivité)}$$ [2]

Passons en revue chacun des quatre termes de cette expression.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DA}$ étant perpendiculaires, leur produit scalaire vaut 0.

Par projections orthogonales, nous avons $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AP_1}$ et $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AP_2} \bullet \overrightarrow{DA}$.

Quant au carré scalaire de $\overrightarrow{AP}$, il est bien sûr égal au carré de sa longueur : $|AP|^2$.

Tout cela nous donne :

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = 0 + \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} \bullet \overrightarrow{DA} + |AP|^2$$

Lorsque des vecteurs sont colinéaires et de même sens, leur produit scalaire est égal au produit de leurs longueurs ; s'ils sont de sens contraires, alors il est égal à l'opposé du produit de leurs longueurs [3]. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} &= -|BA|.|AP_1| - |AP_2|.|DA| + |AP|^2 \\ &= -c.k - (c-k).c + |AP|^2 \\ &= -c.k - c^2 + c.k + |AP|^2 \quad = \quad |AP|^2 - c^2 \qquad \text{(ce qu'il fallait démontrer).}\end{aligned}$$

(2) Voir cours de 5e, géométrie vectorielle de l'espace, page 30, propriété 2.

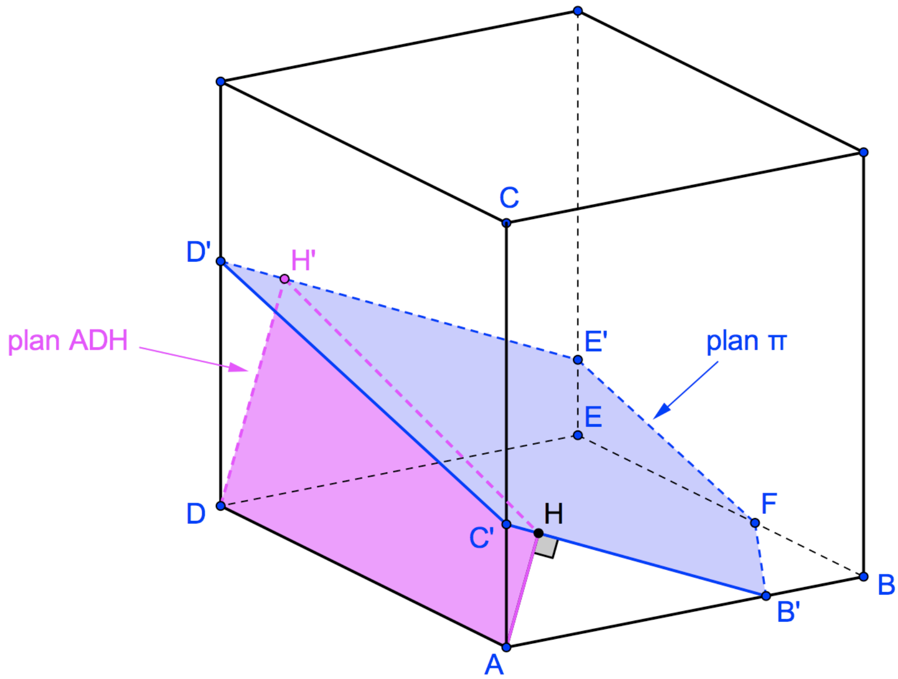
(3) Idem, page 19.

Problème 4

Voici une représentation possible de la situation.

Observons que :

- la section du cube par le plan $\pi = A'B'C'$ est le pentagone $B'C'D'E'F$;
- les plans π et ADH se coupent suivant la droite HH' ;
- comme $AH \perp B'C'$, on a aussi $DH' \perp D'E'$ (en effet $B'C' \,//\, D'E'$) [(4)].



a) Pour démontrer que $B'C'$ est perpendiculaire au plan ADH, il faut prouver que $B'C'$ est orthogonale à deux droites sécantes de ADH [(5)].
Les droites AH et AD remplissent ces conditions. En effet :

1° $B'C' \perp AH$ car, par hypothèse, AH est la hauteur issue de A du triangle $AB'C'$; de plus, AH est incluse à ADH ($AH \subset ADH$).

2° Comme le solide considéré est un cube, nous avons évidemment $AD \perp ABC$.
La droite AD est donc orthogonale à toutes les droites de ABC, en particulier $B'C'$.
Nous avons donc $B'C' \perp AD$ avec $AD \subset ADH$.

3° AH et AD sont sécantes en A.

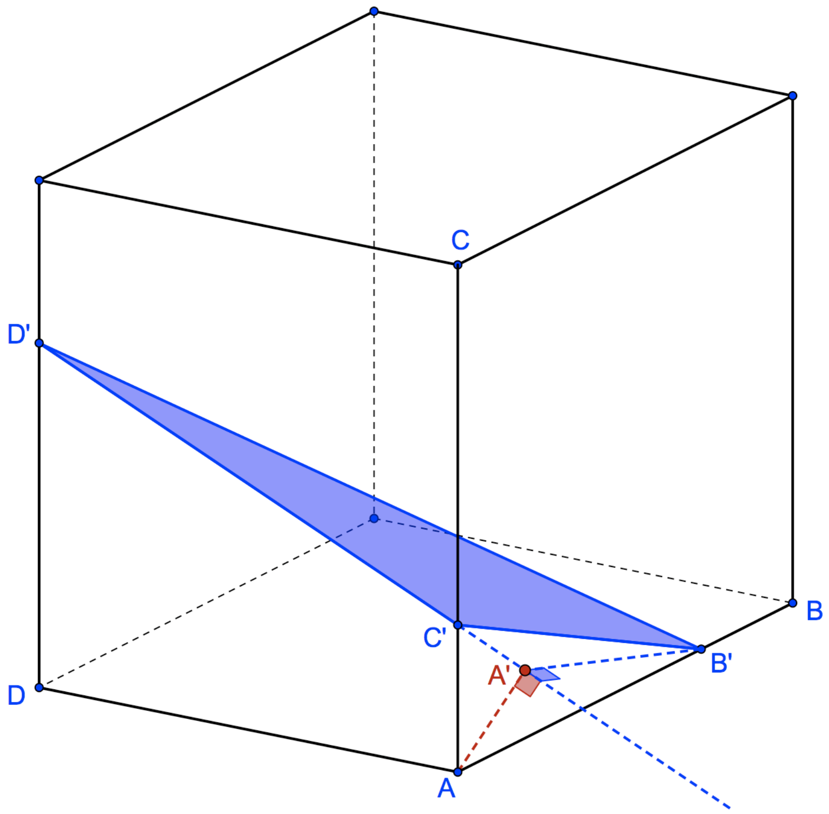
b) Le plan $\pi = A'B'C'$ contient $B'C'$ qui est perpendiculaire à ADH.
Les plans π et ADH sont donc perpendiculaires [(6)].

---

(4) Voir cours de 5e, géométrie synthétique de l'espace, page 25 (propriété PA-6).
(5) Idem, page 60 (critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan).
(6) Idem, page 61 (critère de perpendicularité de deux plans).

c) Soit A' la projection orthogonale de A sur π.

Nous allons montrer que $D'A' \perp AA'B'$.



D'abord, comme $AA' \perp \pi$, elle est orthogonale à toutes les droites de π, et en particulier nous avons $AA' \perp D'A'$ (1).

Ensuite, le fait que nous soyons dans un cube nous assure que $AB' \perp ACD = AC'D'$ et donc que AB' est orthogonale à toutes les droites de $AC'D'$, en particulier $AB' \perp D'A'$ (2).

D'après (1) et (2), nous pouvons dire que $D'A'$ est orthogonale à deux droites sécantes de $AA'B'$ et donc que $D'A' \perp AA'B'$.

Et donc, comme $A'B' \subset AA'B'$, on a aussi $D'A' \perp A'B'$.

Le point A' est donc bien le pied de la hauteur issue de B' du triangle $B'C'D'$.

Problème 5

NOTE SUR LE PRODUIT VECTORIEL

Le produit vectoriel est une opération entre deux vecteurs dont le résultat est un troisième vecteur, orthogonal aux deux premiers.
Il ne faut pas le confondre avec le produit scalaire dont le résultat est un nombre réel !

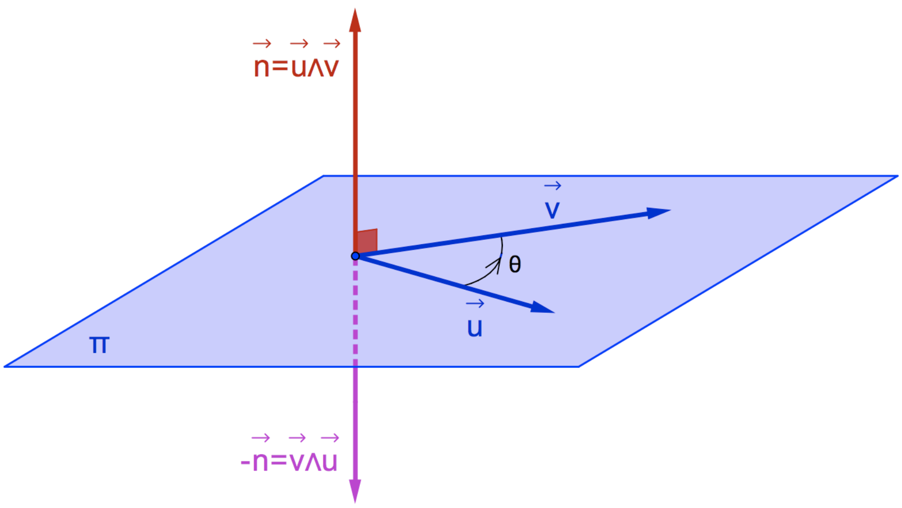
Le produit vectoriel ne figure pas au programme de l'enseignement secondaire, mais il semblerait que certains « compositeurs » de questions d'examens d'entrée le tiennent pour acquis par les candidats. Voici donc quelques notions que nous admettrons sans démonstration.

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

1° Le résultat est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2° Le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est déterminé par la « règle de la vis ».
Expliquons cela à l'aide de la figure ci-dessous.



Si θ est le plus petit angle entre les deux vecteurs ($0 < \theta < 180°$) , la notation $\vec{u} \wedge \vec{v}$ indique qu'il faut amener $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ par rotation. Si l'on imagine une vis plantée dans le plan π , la rotation dans le sens antihorloqique aura pour effet de faire sortir la vis vers le haut.
Par contre, si l'on effectue le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{u}$, la rotation amenant $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ se fait dans le sens horlogique. La vis s'enfonce dans le plan et le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{u}$ pointe vers le bas.

3° La longueur de $\vec{u} \wedge \vec{v}$: $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| . \left\|\vec{v}\right\| . \sin\theta$ ($\sin \theta > 0$ car $0 < \theta < 180°$).

Résolvons maintenant notre problème …

a) Pour montrer que d_a et d_b ne sont pas parallèles, montrons qu'un vecteur directeur de d_a et un vecteur directeur de d_b ne sont pas multiples.

Pour trouver un vecteur directeur de $d_a \equiv \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$, cherchons deux points de d_a.

C'est la méthode que nous avons l'habitude d'utiliser et elle fonctionne ici sans difficulté.

Si $x = 0$, alors $z = -a$ et $y = 3a - 1$ $\rightarrow$ $P(0, 3a-1, -a) \in d_a$.
Si $z = 0$, alors $x = a$ et $y = -1$ $\rightarrow$ $Q(a, -1, 0) \in d_a$.

Comme vecteur directeur de d_a, prenons $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} a \\ -3a \\ a \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ ou plus simplement $\overrightarrow{v_a}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1).

Facile … car les équations de d_a l'étaient aussi !

<u>Avec la méthode du produit vectoriel, comment faire ?</u>

La droite est l'intersection de deux plans dont des vecteurs normaux respectifs sont

$$\vec{r}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{s}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le produit vectoriel $\vec{r} \wedge \vec{s}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{r}$ et $\vec{s}$ et c'est donc un vecteur directeur de d_a :

$$\vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{pmatrix} 0.3 - (-1).1 \\ (-1).0 - 1.3 \\ 1.1 - 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la droite $d_b \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$, dont les équations sont complètes, chercher deux points serait plus fastidieux.

Calculons donc le produit vectoriel des vecteurs normaux des deux plans déterminant d_b :

$$\overrightarrow{v_b} = \vec{t} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (2) (vérifiez).}$$

D'après (1) et (2), les vecteurs $\overrightarrow{v_a}$ et $\overrightarrow{v_b}$ ne sont pas multiples.

Les droites ne sont pas parallèles.

b) Pour que les droites d_a et d_b soient concourantes, il faut trouver un point $\mathrm{P}(x\,,y\,,z\,)$ dont les coordonnées soient solutions du système

$$\begin{cases} x - z - a = 0 & (1) \\ y + 3z + 1 = 0 & (2) \\ x + 2y + z - 2b = 0 & (3) \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 & (4) \end{cases}.$$

D'après (1) , nous pouvons remplacer x par $z + a$ dans les trois autres équations :

$$\begin{cases} y + 3z + 1 = 0 & (5) \\ 2y + 2z + a - 2b = 0 & (6) \\ 3y + 5z + 3a - 7 = 0 & (7) \end{cases}.$$

Ces équations doivent être compatibles. La bonne fortune fait que la comparaison de (5) + (6) avec (7) est agréable (toujours bien observer ☺) :

(5) + (6) : $3y + 5z + a - 2b + 1 = 0$

(7) : $3y + 5z + 3a - 7 = 0$

En soustrayant membre à membre, il vient : $-2a - 2b + 8 = 0$ et donc $\boxed{a + b = 4}$.

c) Soit π le plan contenant les droites d_a et d_b . Un vecteur normal de π est donc orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_a}$ et $\overrightarrow{v_b}$ et peut être obtenu par produit vectoriel de ceux-ci :

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_a} \wedge \overrightarrow{v_b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons : $\pi \equiv 2x + y + z + k = 0$ (où k reste à déterminer).
Au point (a), nous avons vu que $Q\big(a, -1, 0\big) \in d_a$, donc $Q \in \pi$ aussi :

$$2a - 1 + k = 0 \quad \to \quad k = 1 - 2a \quad \to \boxed{\pi \equiv 2x + y + z + 1 - 2a = 0}.$$

Prolongements …

Lorsque les droites d_a et d_b sont concourantes, quel est leur point d'intersection ?
Résolvons le système formé par les équations (1) à (3) en remplaçant b par $4 - a$:

$$\begin{cases} x - z - a = 0 & (1) \\ y + 3z + 1 = 0 & (2) \\ x + 2y + z - 8 + 2a = 0 & (3) \end{cases} \xrightarrow{x = z + a} \begin{cases} y + 3z + 1 = 0 & (2) \\ 2y + 2z - 8 + 3a = 0 & (8) \end{cases}.$$

En remplaçant $y = -3z - 1$ dans (8), nous obtenons $-4z - 10 + 3a = 0 \quad \to \quad z = \dfrac{3a - 10}{4}$.

Et il suit :

$$y = -3.\frac{3a - 10}{4} - 1 \quad \to \quad y = \frac{-9a + 26}{4} \quad \text{et} \quad x = \frac{3a - 10}{4} + a \quad \to \quad x = \frac{7a - 10}{4}.$$

Vérifions tout de même dans l'équation (4) si $3x+3y+2z-7\overset{?}{=}0$:

$$3.\frac{7a-10}{4}+3.\frac{-9a+26}{4}+2.\frac{3a-10}{4}-7\overset{?}{=}0 .$$

Je vous laisse vérifier, c'est correct.

Conclusion : $d_a \cap d_b = \left\{\left(\frac{7a-10}{4},\frac{-9a+26}{4},\frac{3a-10}{4}\right)\right\}$.

Illustrons cela par un cas particulier pour terminer.

Si $a=1$, alors $b=3$ et les droites $d_a \equiv \begin{cases} x-z-1=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases}$ et $d_b \equiv \begin{cases} x+2y+z-6=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$ se coupent au point $\left(\frac{-3}{4},\frac{17}{4},\frac{-7}{4}\right)$.

Conformément au résultat trouvé à la page précédente, le plan déterminé par les deux droites a pour équation $\pi \equiv 2x+y+z-1=0$.

Tout cela peut être vérifié avec GeoGebra 3D . Pour une droite dont les équations cartésiennes sont présentées sous la forme d'une système comme dans notre problème, il faut d'abord créer les deux plans et ensuite demander leur intersection pour faire apparaître la droite.