Dans un repère orthonormé Oxy, soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre $C(10,10)$ et de rayon 4.

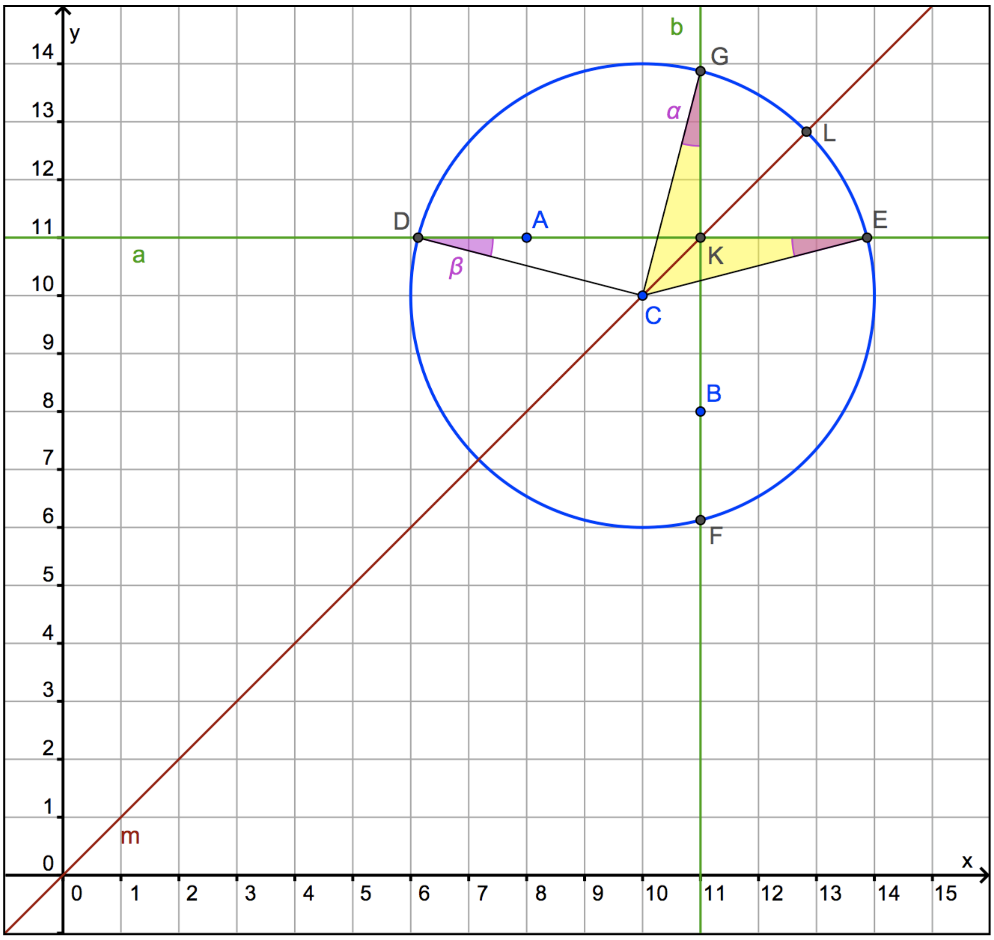
Soit une droite a parallèle à l'axe Ox et passant par le point $A(8,11)$. Cette droite coupe $\mathscr{C}$ en deux points D et E tels que l'abscisse de D est inférieure à celle de E.

Soit une droite b parallèle à Oy et passant par le point $B(11,8)$. Cette droite coupe $\mathscr{C}$ en deux points F et G tels que l'ordonnée de F est inférieure à celle de G.

Soit K l'intersection entre la droite a et la droite b ; soient α l'amplitude de l'angle $K\hat{G}C$ et β celle de l'angle $C\hat{D}K$.

Démontrer par les méthodes de la géométrie synthétique la relation suivante : $\alpha = \beta$.

Solution



Le point K se trouve à l'intersection des droites $a \equiv y = 11$ et $b \equiv x = 11$. Donc $K(11,11)$.

Comme le point C a pour coordonnées $(10,10)$, la droite $m = CK$ est la bissectrice du premier quadrant. Elle forme donc un angle de $45°$ avec chacune des droites a et b.

La droite m passe par le centre C du cercle, elle est donc un axe de symétrie de celui-ci.
Soit s_m la symétrie orthogonale d'axe m.
L'image par s_m de E - qui est un point du cercle - est donc un autre point du cercle. Lequel ?

Comme le point K appartient à m, il est sa propre image par la symétrie s_m.

Soit L le point d'intersection de m et du cercle. Ce point est aussi sa propre image par s_m.

L'angle $L\hat{K}G$ (45°) a donc pour image un angle $L\hat{K}P$ dont l'amplitude est aussi de 45°.
En effet, une symétrie orthogonale conserve l'amplitude des angles [(1)].

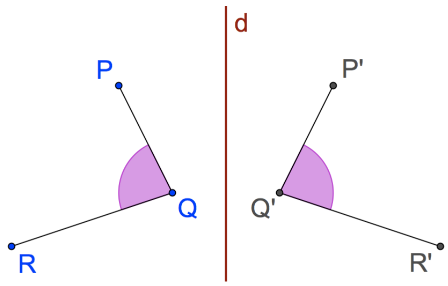
Cela veut dire que l'angle $L\hat{K}P$ n'est autre que l'angle $L\hat{K}G$, et que l'image du point E par s_m est le point G.

<u>Conséquence</u> : l'image du triangle CKE par s_m est le triangle CKG, et ces triangles sont donc isométriques. Par suite, l'angle $C\hat{E}K$ a la même amplitude que $\alpha = C\hat{G}K$.

Mais d'autre part, le triangle DCE étant isocèle en C (car $|CD| = |CE| = 4$), l'angle $C\hat{E}K$ a la même amplitude que $C\hat{D}E$ (qui est aussi $\beta = C\hat{D}K$).

Par transitivité [(2)], les angles $\alpha = C\hat{G}K$ et $\beta = C\hat{D}K$ ont la même amplitude.

[(1)] Soient les points P, Q et R et leurs images respectives P', Q' et R' par la symétrie orthogonale d'axe d.
L'angle $P\hat{Q}R$ a pour image l'angle de même amplitude $P'\hat{Q}'R'$.



[(2)] Dans un ensemble E, une relation $\mathcal{R}$ est transitive si, quels que soient les éléments x, y et z de E, chaque fois que x est en relation (par $\mathcal{R}$) avec y et que y est en relation (par $\mathcal{R}$) avec z, alors x est en relation (par $\mathcal{R}$) avec z.
Par exemple, la relation d'égalité est transitive dans l'ensemble des nombres réels :

$$\forall\, x, y, z \in R : (x = y \text{ et } y = z) \Rightarrow x = z .$$

Un autre exemple bien connu est la relation de parallélisme, transitive dans l'ensemble D des droites de l'espace :

$$\forall\, a, b, c \in D : (a // b \text{ et } b // c) \Rightarrow a // c .$$

Par contre, dans le même ensemble, la relation d'orthogonalité n'est pas transitive !