Problème 1

1. Dans un repère orthonormé Oxy du plan, soit une circonférence $\mathscr{C}_1$ de rayon r centrée en B de cordonnées $(10,0)$. Soient d_1 et d_2 deux tangentes à $\mathscr{C}_1$ ayant respectivement pour vecteurs directeurs $(2,0)$ et $(3,4)$.

   Si d_1 est en-dessous du cercle et d_2 à sa gauche, établir l'équation cartésienne de la bissectrice de d_1 et d_2 et de pente positive.

2. Dans le cas particulier où $r = 8$, appelons A le point d'intersection des droites d_1 et d_2 tel que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. On demande :

   a) Faire un dessin.

   b) Établir les équations cartésiennes de $\mathscr{C}_1$, d_1 et d_2.

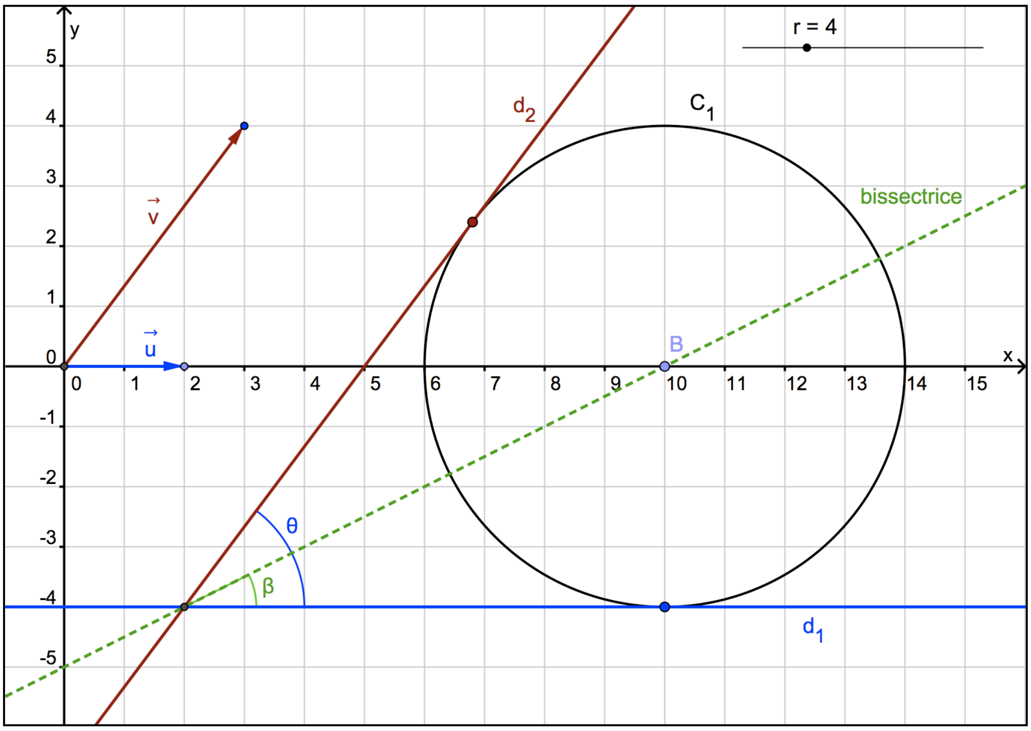
   c) Soit $\mathscr{C}_2$ une circonférence de centre $(0,-5)$ et tangente à la droite d_3 d'équation $y = -2$.
   Démontrer que $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par une homothétie de centre A.
   Que vaut le rapport d'homothétie ?

   d) Si M et N sont deux points appartenant à $\mathscr{C}_1$, construire un segment $[AN]$ tel que le point M en soit le milieu. Quelles sont les coordonnées de M ?
   Existe-t-il plusieurs segments $[AN]$ répondant à cette condition ?

(UMONS 2017)

Solution

Voici la situation représentée dans le cas où $r = 4$.



Première méthode

Soit θ l'amplitude de l'angle aigu entre les droites d_1 et d_2. Cet angle est donc celui formé par d_2 et l'horizontale. La tangente de θ est ainsi la pente de d_2.

Comme un vecteur directeur de d_2 est $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, sa pente est $\frac{4}{3}$ et nous avons : $\tan\theta=\frac{4}{3}$.

Soit β l'angle formé par la bissectrice et la droite d_1 (voir figure). Nous avons $\theta=2\beta$.

Une formule de duplication bien connue nous donne : $\tan\theta=\tan(2\beta)=\frac{2.\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{4}{3}$.

Nous avons ainsi obtenu une équation dont l'inconnue est $\tan\beta$:

$$\frac{2.\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{4}{3} \quad\to\quad 6.\tan\beta=4-4.\tan^2\beta \quad\to\quad 2.\tan^2\beta+3.\tan\beta-2=0 .$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta=25$ et nous trouvons

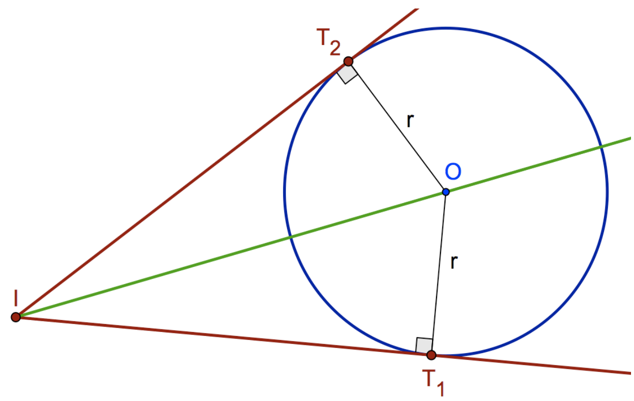
$$\tan\beta=\frac{-3\pm5}{4} \quad\to\quad \left(\tan\beta=\frac{1}{2}\right) \vee \left(\tan\beta=-2\right) .$$

Dans le cas présent, seule la solution positive est à retenir et la pente de la bissectrice vaut donc ½ .

Une des bissectrices de deux tangentes à un cercle passe par le centre de celui-ci (voir propriété ci-dessous). Celle que nous considérons ici passe donc par le point $B(10{,}0)$.

Nous avons donc : $\boxed{b\equiv y-0=\frac{1}{2}.(x-10) \quad\to\quad b\equiv y=\frac{1}{2}x-5}$.

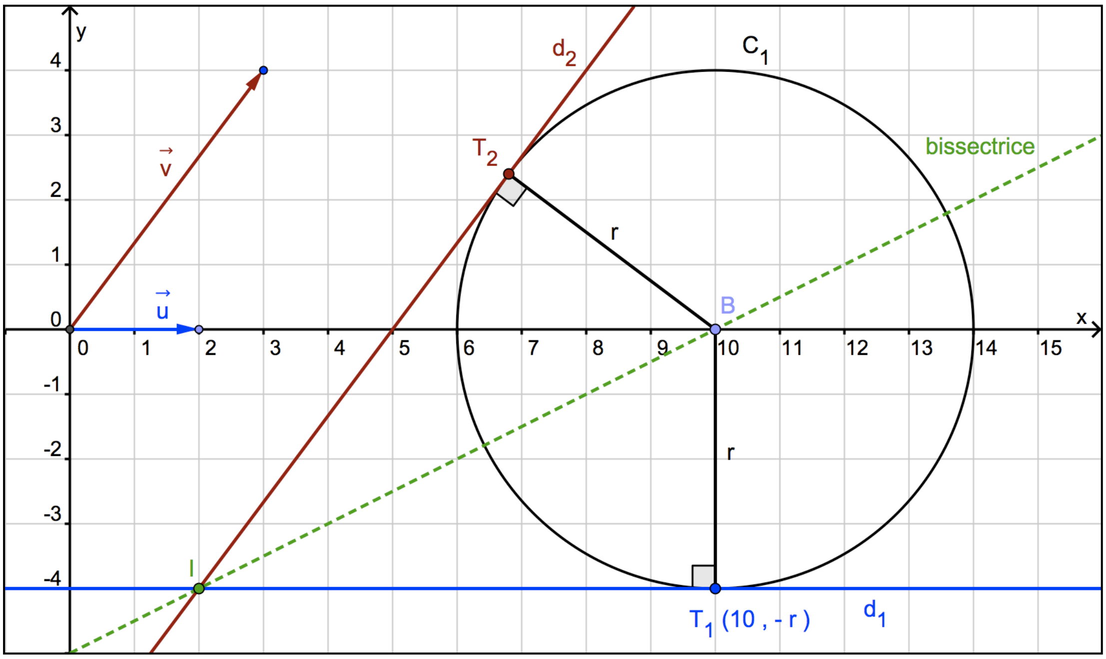
Une propriété géométrique : bissectrice de deux tangentes à un cercle



Soit un cercle de centre O et de rayon r. Considérons les deux tangentes au cercle, issues du point I. En vertu d'une propriété bien connue des tangentes à un cercle, les triangles IT_1O et IT_2O sont rectangles respectivement en T_1 et T_2. De plus, $|OT_1|=|OT_2|=r$ et le côté $[IO]$ est commun. Les triangles IT_1O et IT_2O sont donc isométriques, ce qui implique $O\hat{I}T_1=O\hat{I}T_2$ et que la droite OI est bien une bissectrice des deux tangentes.
Notons au passage une autre propriété souvent utilisée : $|IT_1|=|IT_2|$ (anciennement, on disait « les tangentes menées à un cercle par un même point sont égales »).
Voir par exemple https://www.youtube.com/watch?v=Z9YRY420Gns .

Deuxième méthode

Une autre façon de travailler, certes plus laborieuse mais néanmoins efficace ☺ .



Voici notre plan :

1. Déterminer les coordonnées de T_2 .
2. Déterminer une équation cartésienne de d_2 .
3. Trouver le point d'intersection I entre d_1 et d_2 .
4. Déterminer une équation de la bissectrice, sachant qu'elle passe par I et B .

1. Coordonnées de T_2

Comme $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de d_2 , sa pente est égale à $\frac{4}{3}$. Sachant que $BT_2 \perp d_2$, la pente de BT_2 est $-\frac{3}{4}$. Comme BT_2 passe par $B(10,0)$, nous avons : $BT_2 \equiv y = -\frac{3}{4}.(x-10)$.

Il reste à chercher l'intersection de BT_2 et du cercle $\mathscr{C}_1 \equiv (x-10)^2 + y^2 = r^2$.

Remplaçant « y » par $-\frac{3}{4}.(x-10)$ dans l'équation du cercle, nous obtenons :

$$(x-10)^2 + \frac{9}{16}(x-10)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{25}{16}(x-10)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-10)^2 = \frac{16r^2}{25} \quad \Leftrightarrow \quad x-10 = \pm\frac{4r}{5} .$$

Comme d_2 est à gauche du cercle, l'abscisse de T_2 est $x = 10 - \frac{4r}{5}$ (c'est la plus petite des deux abscisses possibles). En remplaçant dans l'équation de BT_2 , nous trouvons $y = \frac{3r}{5}$.

$$\boxed{T_2\left(10-\frac{4r}{5}\,,\,\frac{3r}{5}\right)}$$

2. Équation cartésienne de d_2

$$d_2 \equiv y - \frac{3r}{5} = \frac{4}{3}\left(x - 10 + \frac{4r}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad d_2 \equiv y = \frac{4}{3}x - \frac{40}{3} + \frac{5r}{3} .$$

3. Trouver le point d'intersection I entre d_1 et d_2

Sachant que $d_1 \equiv y = -r$, remplaçons « y » par $-r$ dans l'équation de d_2 :

$$-r = \frac{4}{3}x - \frac{40}{3} + \frac{5r}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{8r}{3} + \frac{40}{3} = \frac{4}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad x = -2r + 10 .$$

$$\boxed{I\left(-2r + 10\ , -r\right)}$$

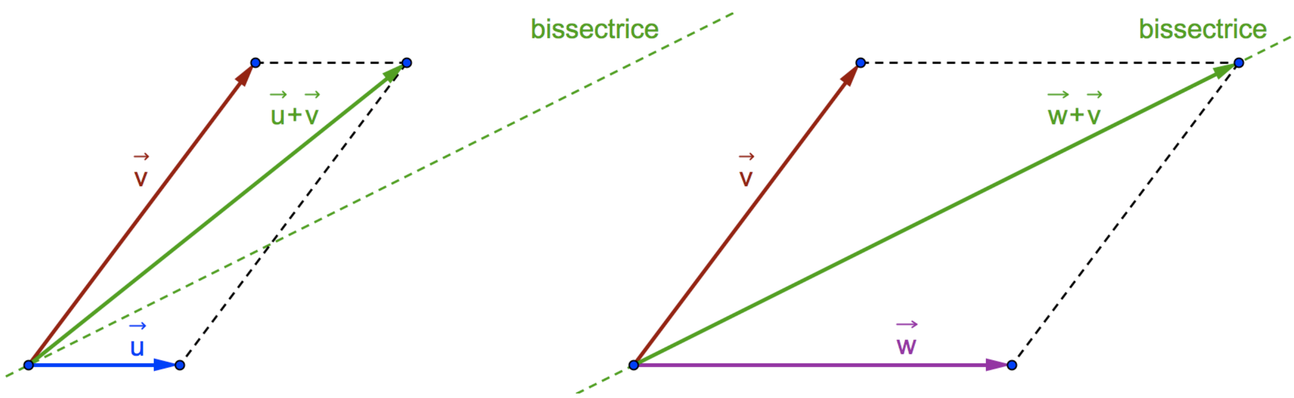
4. Équation de la bissectrice BI

Sa pente vaut $\dfrac{y_B - y_I}{x_B - x_I} = \dfrac{0-(-r)}{10-(-2r+10)} = \dfrac{r}{2r} = \dfrac{1}{2}$. Et donc …

$$\boxed{BI \equiv y - 0 = \frac{1}{2}(x - 10) \quad \Leftrightarrow \quad BI \equiv y = \frac{1}{2}x - 5} .$$

Troisième méthode

C'est la plus élégante, mais peu d'élèves du secondaire y penseraient spontanément.
Comme nous disposons des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 , pourrions-nous en déduire un vecteur directeur de la bissectrice ?
Si nous additionnons $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la règle du parallélogramme nous dit que la direction du vecteur somme est celle d'une diagonale du parallélogramme. Mais cette diagonale n'est pas une bissectrice, car les vecteurs sont de longueurs différentes. S'ils étaient de même longueur, le parallélogramme serait un losange et la diagonale qui nous intéresse serait aussi bissectrice !
Ci-dessous à gauche, la somme de deux vecteurs de longueurs différentes, et à droite la somme de deux vecteurs de même longueur.



L'idée est donc la suivante : cherchons deux vecteurs de même longueur et qui soient de mêmes directions que $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Nous pourrions par exemple choisir deux vecteurs normés (c'est-à-dire de longueur 1).

Pour obtenir un vecteur normé $\vec{n}$ de même direction que $\vec{v}$, rien de plus simple : nous divisons $\vec{v}$ par sa longueur !

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir un vecteur normé $\vec{m}$ de même direction que $\vec{u}$, c'est encore plus simple car $\vec{u}$ est horizontal.

$$\vec{m} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{n}$ sont toujours bien des vecteurs directeurs de d_1 et d_2, mais comme ils sont de même longueur, leur somme est un vecteur directeur $\vec{b}$ de la bissectrice.

$$\vec{b} = \vec{m} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

La pente de b est donc $\frac{4/5}{8/5} = \frac{1}{2}$. Et comme $B\,(10,0) \in b$, nous retrouvons $\boxed{b \equiv y = \frac{1}{2}x - 5}$.

Deuxième partie du problème : le cas particulier où $r = 8$

a) La situation est représentée à la page suivante.

b) Les équations cartésiennes demandées sont faciles à obtenir :

$\mathscr{C}_1 \equiv (x-10)^2 + y^2 = 64$;

$d_1 \equiv y = -8$ et $d_2 \equiv y = \frac{4}{3}x$ (voir l'équation de d_2 au n°2 page 4 : remplacer r par 8).

On vérifie facilement que ces deux droites se rencontrent au point $A\,(-6\,,-8)$.

c) Si le cercle $\mathscr{C}_2$ est centré en $C\,(0,-5)$ et qu'il est tangent à la droite $y = -2$, alors son rayon est 3.

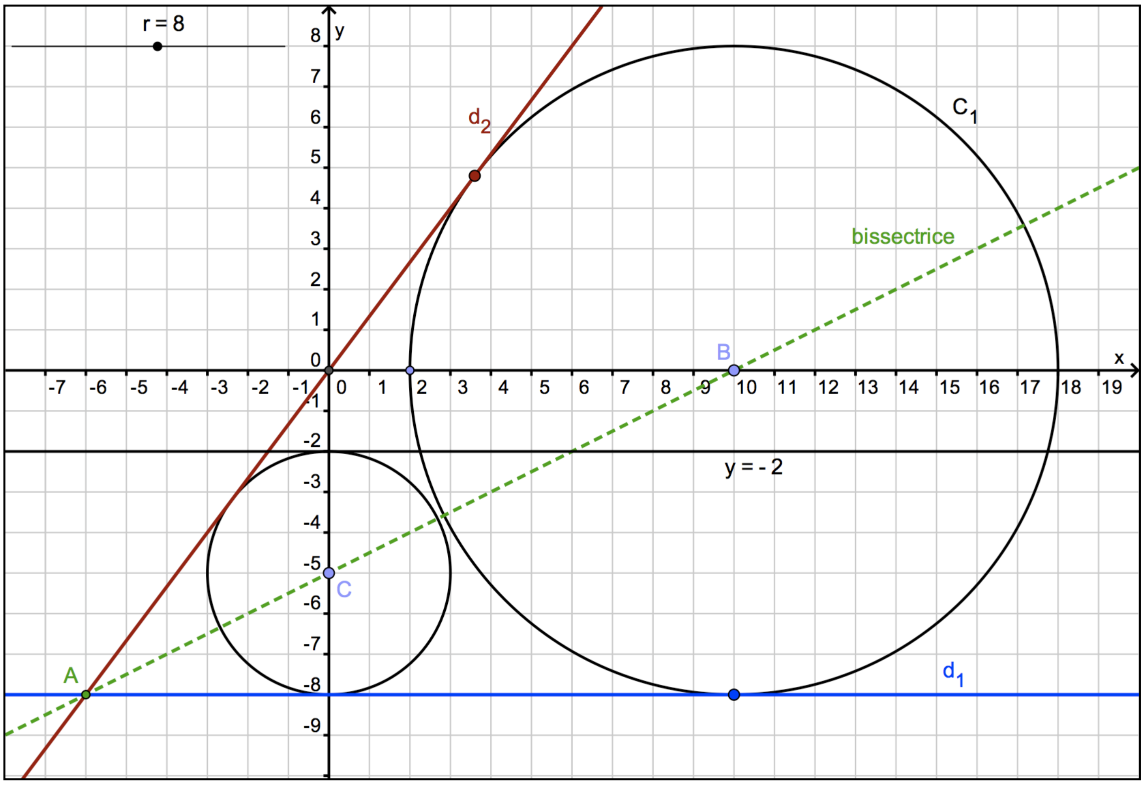
Deux cercles de rayons différents sont toujours homothétiques et le rapport d'homothétie est égal au rapport des rayons. Si $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$, le rapport d'homothétie est donc $\frac{r_2}{r_1} = \frac{3}{8}$.

Il reste à prouver que A est le centre d'homothétie. Pour cela, il faut vérifier que le centre C de $\mathscr{C}_2$ est l'image du centre B de $\mathscr{C}_1$ par une homothétie de centre A et de rapport $3/8$.

Vectoriellement, cela se traduit par : $\overrightarrow{AC} \overset{?}{=} \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.

C'est bien vrai car : $\overrightarrow{AC} \overset{?}{=} \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0-(-6) \\ -5-(-8) \end{pmatrix} \overset{?}{=} \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 10-(-6) \\ 0-(-8) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Représentation du cas particulier où $r = 8$



d) Si le point M est le milieu du segment $[AN]$, il est l'image du point N par une homothétie de centre A et de rapport ½ .
Or, le point N appartient à $\mathscr{C}_1$. Le point M appartient donc au cercle $\mathscr{C}_3$ image de $\mathscr{C}_1$ par la même homothétie.

Soit $D\,(x_D\,, y_D)$ le centre de $\mathscr{C}_3$. Nous avons $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_D + 6 \\ y_D + 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Par la relation de CHASLES, nous avons $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et donc $D\,(2,-4)$.

Comme le rayon de $\mathscr{C}_3$ vaut 4 : $\mathscr{C}_3 \equiv (x-2)^2 + (y+4)^2 = 16$.

Pour trouver les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, écrivons le système suivant :

$$\begin{cases} (x-10)^2 + y^2 = 64 \\ (x-2)^2 + (y+4)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 20x + y^2 + 36 = 0 & (1) \\ x^2 - 4x + y^2 + 8y + 4 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Soustrayons membre à membre, par exemple (2) - (1) : $16x + 8y - 32 = 0 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$.
Nous obtenons l'équation de la droite reliant les deux points communs à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ (cette droite s'appelle « l 'axe radical » des deux cercles).
Il reste à chercher son intersection avec l'un d'eux, par exemple $\mathscr{C}_1$:

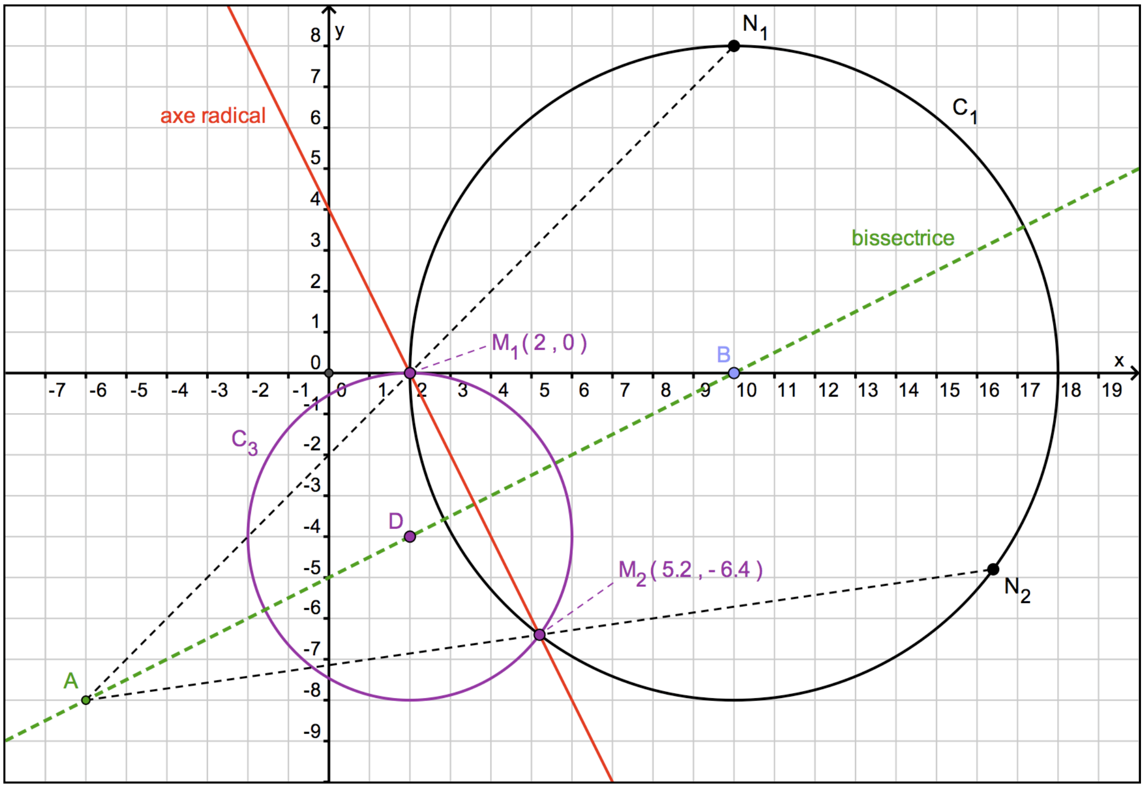
$$(x-10)^2 + (-2x+4)^2 = 64 \Leftrightarrow 5x^2 - 36x + 52 = 0 .$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 256$ et ses solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = \dfrac{26}{5} = 5{,}2$.

Les coordonnées des points d'intersection, qui sont aussi celles des points M recherchés sont ainsi :

$$M_1\,(2{,}0) \quad \text{et} \quad M_2\left(\frac{26}{5},-\frac{32}{5}\right).$$

Il y a donc deux segments $[\,AN_1\,]$ et $[\,AN_2\,]$ qui répondent à la question.



Problème 2

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormés Oxy .

Soit a une droite passant par $A(-1,0)$ et faisant un angle orienté θ avec l'axe Ox , et b une droite passant par $B(1,0)$ et faisant un angle $\theta + \frac{\pi}{4}$ avec l'axe Ox .

a) Montrez que les coefficients angulaires m_a de la droite a et m_b de la droite b vérifient l'égalité

$$m_b = \frac{1+m_a}{1-m_a} \quad \text{(pour } m_a \neq 1 \text{ et } m_b \neq 1 \text{) .}$$

b) Déterminez une équation de la droite a (en fonction de m_a), puis une équation cartésienne de la droite b (également en fonction de m_a).

c) Pour chacune des deux équations déterminées au point (b) , exprimez m_a en fonction de x et de y .

d) En égalant les deux expressions pour m_a obtenues au point (c) , déterminez une équation cartésienne et la nature du lieu parcouru par l'intersection P des droites a et b lorsque θ varie de 0 à π .

Aide : vérifiez la plausibilité de vos réponses au moyen d'une représentation graphique reprenant plusieurs valeurs particulières de θ .

(ULB 2020)

Solution

a) La pente d'une droite est la tangente de l'angle orienté aigu qu'elle forme avec l'axe des abscisses. Nous avons donc :

$$m_b = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\theta.\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{m_a + 1}{1 - m_a} \quad .$$

b) $A(-1,0) \in a \quad \to \quad a \equiv y - 0 = m_a.\left(x - (-1)\right) \quad \to \quad \boxed{a \equiv y = m_a.\left(x+1\right)} \quad (1) \; .$

$B(1,0) \in b \quad \to \quad b \equiv y - 0 = m_b.\left(x-1\right) \quad \to \quad \boxed{b \equiv y = \frac{1+m_a}{1-m_a}.\left(x-1\right)} \quad (2) \; .$

c) D'après (1) : $m_a = \dfrac{y}{x+1}$ (3) .

D'après (2) : $y.\left(1 - m_a\right) = \left(1 + m_a\right).\left(x - 1\right) \quad \to \quad y - y\,m_a = x - 1 + x\,m_a - m_a$

$\to \quad m_a.\left(x + y - 1\right) = -x + y + 1$

$\to \quad m_a = \dfrac{-x + y + 1}{x + y - 1}$ (4) .

d) Comparant les équations (3) et (4), nous obtenons : $\dfrac{y}{x+1} = \dfrac{-x+y+1}{x+y-1}$.

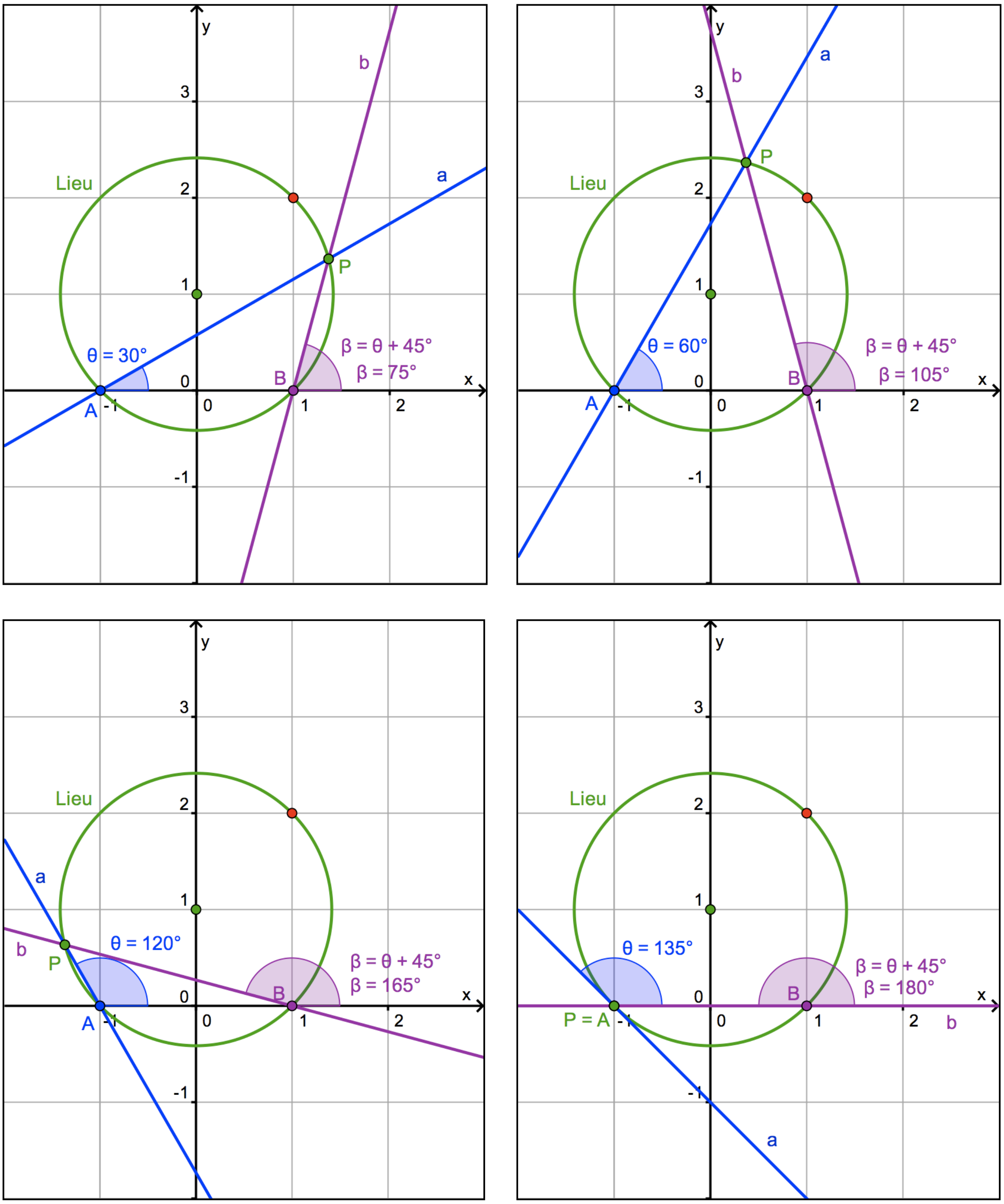
Égalant le produit des extrêmes et des moyens, nous en déduisons

$$\underline{xy} + y^2 - y = -x^2 + \underline{xy} + \underline{\underline{x - x}} + y + 1 \quad \to \quad x^2 + y^2 - 2y = 1 \quad \to \quad x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2 \ .$$

Le lieu géométrique cherché a pour équation $\mathscr{L} \equiv x^2 + (y-1)^2 = 2$.

Il s'agit du cercle de contre $(0,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$, privé du point $(1,2)$ car $m_a \neq 1$.

Quelques exemples avec $\theta = 30°$, $60°$, $120°$ et $135°$.



Problème 3

Dans l'espace euclidien de repère Oxy , on considère le triangle ABC dont les sommets ont les coordonnées suivantes A(-7,5) , B(-4,1) et C(8,4) .

a) Donnez les équations paramétriques de la médiane m issue du sommet B .

b) Calculez le cosinus de l'angle $A\hat{B}C$.

c) Donnez les équations paramétriques de la bissectrice b de $A\hat{B}C$.
Indice : il n'est pas nécessaire de calculer l'amplitude de l'angle $A\hat{B}C$.

d) On appelle ψ l'angle aigu entre les droites m et b . Calculez $\tan\psi$.

Indice : $\forall\alpha,\beta:\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha).\tan(\beta)}$.

Si vous n'avez pas pu répondre à une des questions précédentes, utilisez une équation générique paramétrée.

(UCL 2020)

Solution

a) Les coordonnées du milieu M du segment $[\,AC\,]$ sont $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{2}\right)$.

Un vecteur directeur de la médiane m est donc $\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}9/2\\7/2\end{pmatrix}$. Prenons plutôt $\vec{u}=2.\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de m sont ainsi : $\boxed{m\equiv\begin{cases}x=9k-4\\y=7k+1\end{cases}\quad(k\in R)}$.

b) $$\cos\left(A\hat{B}C\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{9+16}.\sqrt{144+9}}=\frac{-24}{5\sqrt{153}}=\frac{-24}{15\sqrt{17}}=\frac{-8\sqrt{17}}{85}\approx-0{,}38806$$

($A\hat{B}C\approx112{,}83°$) .

c) Utilisons la troisième méthode vue au problème n°1 et déterminons un vecteur normé $\overrightarrow{n_1}$ de même direction que $\overrightarrow{BA}$, et un vecteur normé $\overrightarrow{n_2}$ de même direction que $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{n_1}=\frac{\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{9+16}}=\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{n_2}=\frac{\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{144+9}}=\frac{\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}}{3\sqrt{17}}=\begin{pmatrix}4\sqrt{17}/17\\\sqrt{17}/17\end{pmatrix}.$$

La somme de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur directeur de b : $\vec{b}=\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4\sqrt{17}}{17}\\[2mm]\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{17}}{17}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}3701\\1{,}0425\end{pmatrix}$.

Les équations paramétriques de b sont donc : $\boxed{b\equiv\begin{cases}x\approx0{,}37.k-4\\y\approx1{,}04.k+1\end{cases}\quad(k\in R)}$.

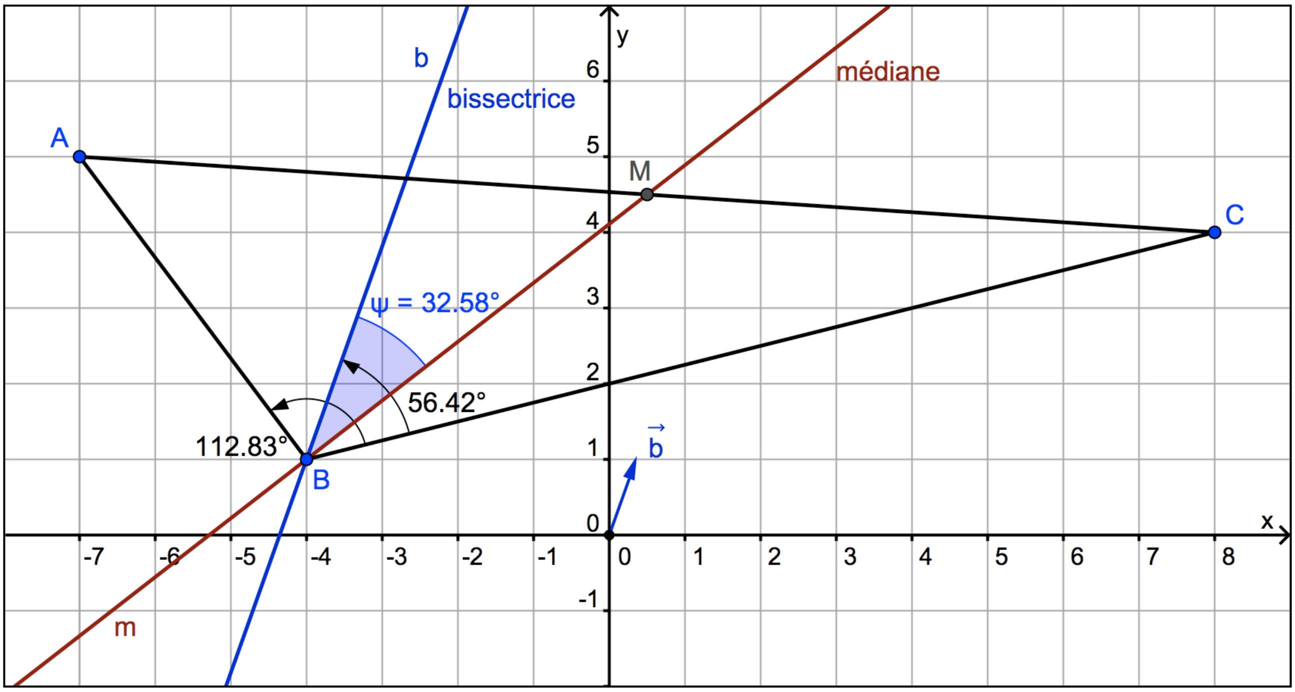
d) Le vecteur directeur de b permet de trouver sa pente : $m_b \approx \dfrac{1{,}0425}{0{,}3701} \approx 2{,}8168$.

Soit β l'angle aigu entre b et l'horizontale. Nous avons donc $\tan\beta \approx 2{,}8168$.
Soit μ l'angle aigu entre la médiane m et l'horizontale.

Utilisant un vecteur directeur de m trouvé au point (a), nous avons : $\tan\mu = \dfrac{7}{9} \approx 0{,}7778$.

Or, l'angle ψ est égal à $\beta - \mu$.

Donc : $\tan\psi = \tan(\beta - \mu) = \dfrac{\tan\beta - \tan\mu}{1 + \tan\beta . \tan\mu} \approx \dfrac{2{,}8168 - 0{,}7778}{1 + (2{,}8168 \; . \; 0{,}7778)} \approx 0{,}6390$ ($\psi \approx 32{,}58°$) .



Problème 4

Dans l'espace $\mathbf{R}^2$ rapporté à un système orthonormé XY, considérons un triangle ABC.
Les coordonnées de ses sommets sont $A(0{,}0)$, $B(8{,}0)$ et $C(x_C, y_C)$.
Soit M le milieu du côté $[AC]$.

1. Sachant que la médiane BM à une longueur valant $|AB|/2$, déterminez par les méthodes de la géométrie synthétique le lieu des sommets C.
2. En considérant que $|BC| = |BM|$, déterminez graphiquement les deux positions possibles C_1 et C_2 du sommet C.
3. Par les méthodes de la géométrie analytique, déterminez les coordonnées des points C_1 et C_2.

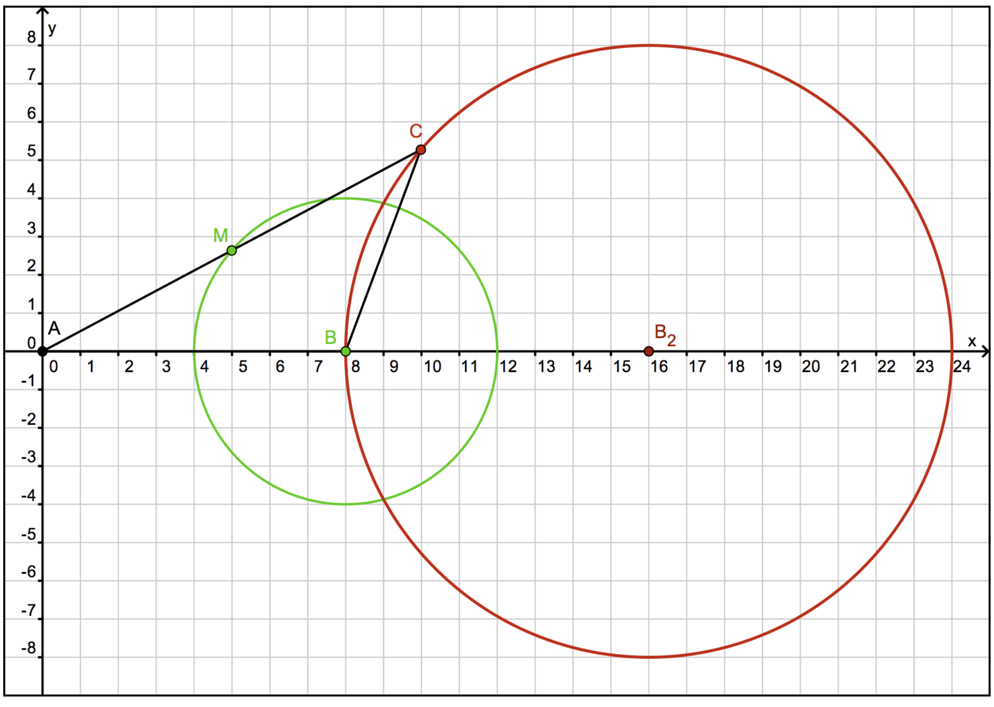
Nous ne considérons maintenant que le triangle ABC tel que $y_C > 0$. Soit H le pied sur le côté BC de la hauteur issue de A. Soit le point J, intersection de cette hauteur avec la médiatrice du côté AC. Le point d'intersection de cette médiatrice avec le côté BC est nommé N.

4. Démontrez par les méthodes de la géométrie synthétique que les trois angles $J\hat{C}N$, $H\hat{M}N$ et $J\hat{A}N$ sont égaux.
5. Par les méthodes de la géométrie analytique, déterminez l'équation du cercle passant par les points A, M et H.

(UMONS 2015)

Solution

1. D'abord, nous avons $|BM| = |AB|/2 = 4$.
   Le point M appartient donc au cercle $\mathscr{C}_1$ de centre B et de rayon 4.
   Comme M est le milieu de $[AC]$, le point C est l'image de M par une homothétie de centre A et de rapport 2.
   Le lieu de C est donc l'image du cercle $\mathscr{C}_1$ par cette même homothétie.
   Il s'agit du cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $\mathrm{B}_2(16{,}0)$ et de rayon 8.



2. Nous avons $|BC| = |BM| = 4$. Le point C appartient donc aussi à $\mathscr{C}_1$.
Il est à l'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et il y a donc deux points possibles.

3. Cherchons les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en considérant le système formé par leurs équations :

$$\begin{cases} (x-8)^2 + y^2 = 16 \\ (x-16)^2 + y^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + y^2 + 48 = 0 & (1) \\ x^2 - 32x + y^2 + 192 = 0 & (2) \end{cases} .$$

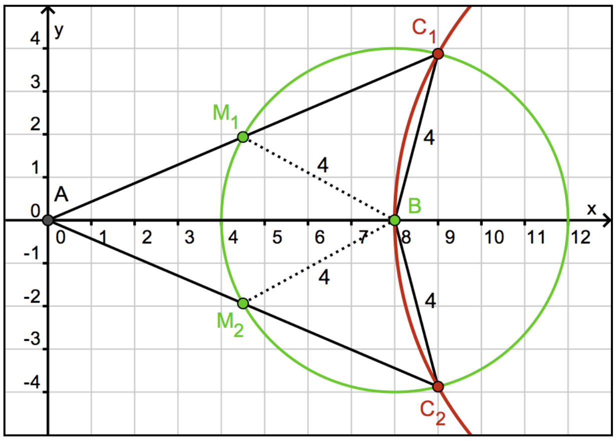
Soustrayons (1) - (2) : $16x - 144 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 9$.

Remplaçons $x = 9$ par exemple dans l'équation de $\mathscr{C}_1$:

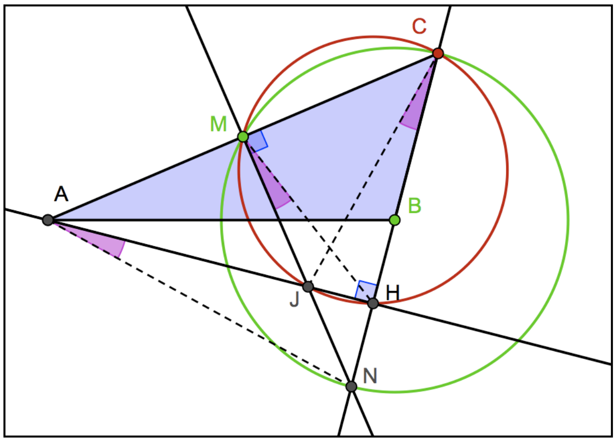
$$1 + y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{15} \approx \pm 3{,}87 \ .$$

Les points cherchés sont :

$$C_1\left(9, \sqrt{15}\right) \text{ et } C_2\left(9, -\sqrt{15}\right) .$$



4. Par hypothèse, nous avons $MJ \perp MC$ et $JH \perp HC$.
Le quadrilatère $MCHJ$ possède ainsi deux angles droits opposés (en M et en H) et il est donc inscriptible dans le cercle $\mathscr{C}_3$ de diamètre $[JC]$ (représenté en rouge dans la figure ci-contre). (1)
Or, les angles $J\hat{C}N$ et $H\hat{M}N$ sont tous deux inscrits au cercle $\mathscr{C}_3$ et ils interceptent le même arc de cercle JH . Ils ont donc la même amplitude : $J\hat{C}N = H\hat{M}N$.



Ensuite, comme le point N appartient à la médiatrice de $[AC]$, le triangle ACN est isocèle et $A\hat{C}N = C\hat{A}N$.

Le point J étant aussi sur la médiatrice de $[AC]$, le triangle ACJ est isocèle et $A\hat{C}J = C\hat{A}J$.

Par conséquent $J\hat{A}N = C\hat{A}N - C\hat{A}J = A\hat{C}N - A\hat{C}J = J\hat{C}N$.

(1) Le triangle MCJ est rectangle en M et il est donc inscriptible dans un demi-cercle de diamètre $[JC]$.
Le triangle HJC est rectangle en H et il est donc inscriptible dans l'autre demi-cercle de diamètre $[JC]$.
La réunion de ces deux triangles de même hypoténuse est le quadrilatère $MCHJ$ et celui-ci est donc inscriptible dans le cercle de diamètre $[JC]$.

5. **Première méthode**

La méthode suivante peut venir à l'esprit, mais elle est longue et fastidieuse.

Nous considérons le point $C_1\left(9,\sqrt{15}\right)$. Le milieu M de $[AC_1]$ est donc $M\left(\frac{9}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

En cherchant l'équation de BC_1 ($BC_1 \equiv y=\sqrt{15}.(x-8)$) et celle de sa perpendiculaire passant par A ($AH \equiv y=-\frac{\sqrt{15}}{15}x$), nous trouvons le point $H\left(\frac{15}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

Nous connaissons donc trois points du cercle $A(0,0)$, M et H. L'intersection de deux médiatrices, par exemple de $[AM]$ et $[AH]$ permet de trouver le centre du cercle.

Deuxième méthode

Les triangles AMN (rectangle en M) et AHN (rectangle en H) ont une hypoténuse commune $[AN]$.
Ils sont donc inscrits dans le même demi-cercle de diamètre $[AN]$.

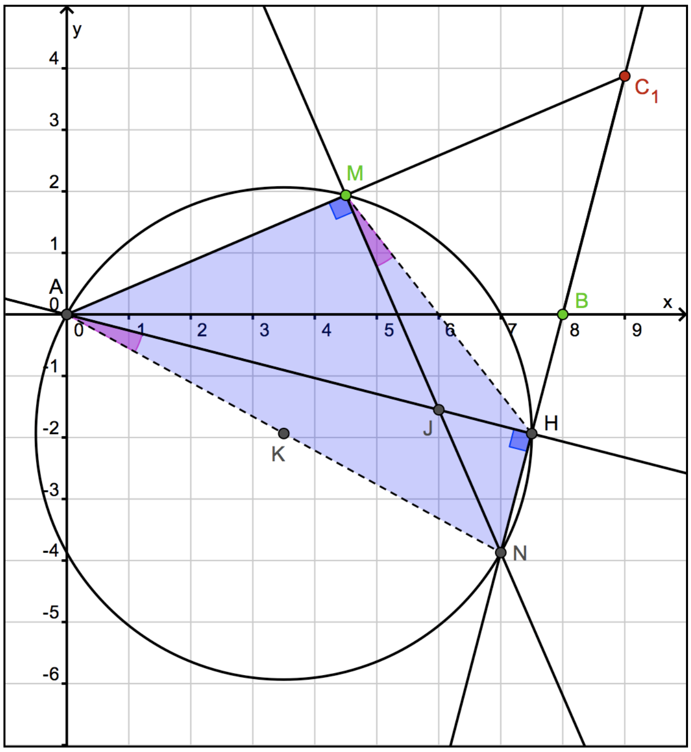
Le point N est à l'intersection de

$$BC_1 \equiv y=\sqrt{15}.(x-8)$$

et de la médiatrice m de $[AC_1]$.

La pente de AC_1 est $\frac{\sqrt{15}}{9}$ et l'équation de m est donc

$$m \equiv y-\frac{\sqrt{15}}{2}=-\frac{9}{\sqrt{15}}.\left(x-\frac{9}{2}\right).$$



Résolvons le système formé par les équations de BC_1 et de m :

$$\sqrt{15}.(x-8)-\frac{\sqrt{15}}{2}=-\frac{9}{\sqrt{15}}.\left(x-\frac{9}{2}\right) \quad\rightarrow\quad \sqrt{15}.x+\frac{9\sqrt{15}}{15}.x=\frac{81\sqrt{15}}{30}+\frac{\sqrt{15}}{2}+8\sqrt{15}$$

La résolution de cette équation donne $x=7$ et $y=-\sqrt{15}$. Donc $N\left(7,-\sqrt{15}\right)$.

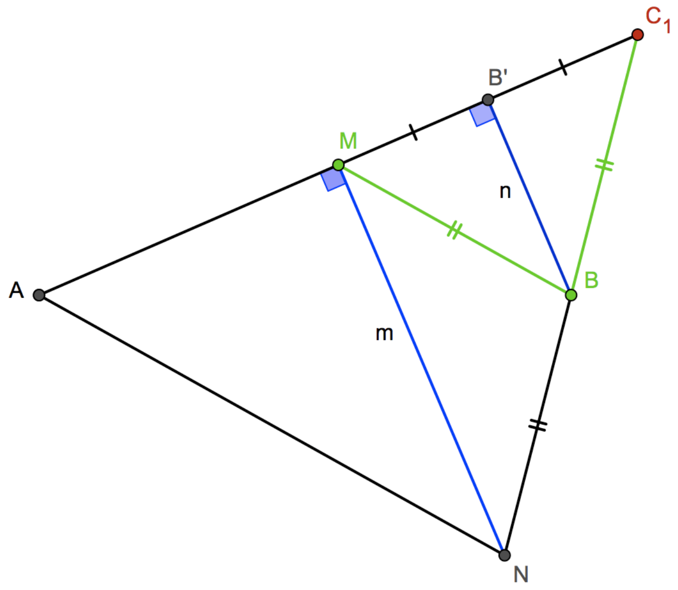
Le centre du cercle est le milieu K de $[AN]$: $K\left(\frac{7}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

Le rayon r du cercle est $r=|AK|=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{15}{4}}=4$.

L'équation du cercle passant par A, M et H est donc : $\boxed{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=16}$.

Remarque : il était possible de trouver N par un raisonnement de géométrie synthétique

Dans le triangle AC_1N, nous avons le point $B \in [\,C_1N\,]$ avec la particularité $|BC_1| = |BM|$.



Le point B appartient donc à la médiatrice n du segment $[\,MC_1\,]$. Celle-ci est évidemment parallèle à la médiatrice m du segment $[\,AC_1\,]$ car les points A, M et C_1 sont alignés.

Par conséquent, en vertu du théorème de THALES dans le triangle MC_1N :

$$|MB'| = |B'C_1| \quad \Rightarrow \quad |BC_1| = |BN|\ .$$

Le point B est donc le milieu du segment $[\,C_1N\,]$ ce qui se traduit par :

$$(x_B, y_B) = \left(\frac{x_{C_1} + x_N}{2}, \frac{y_{C_1} + y_N}{2}\right) \quad \to \quad (8,0) = \left(\frac{9 + x_N}{2}, \frac{\sqrt{15} + y_N}{2}\right) \quad \to \quad \begin{cases} x_N = 7 \\ y_N = -\sqrt{15} \end{cases}.$$

Ou alors, sans calcul, on voit rapidement que le symétrique central de $C_1\left(9,\sqrt{15}\right)$ par rapport au point $B(8,0)$ est le point $N\left(7,-\sqrt{15}\right)$.