2018 | **Epreuve POL** | Série B

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerre et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, …, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) On donne le nombre complexe $a = \frac{1}{2}(1 + i)$.

(a) (1 point) Calculer le module du nombre complexe $a - 1$.

(b) (1 point) On pose $z_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{R}_0 : z_n = a^n$ et $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géometrique et en préciser le premier terme u_1 et la raison.

(c) (1 point) Calculer la somme $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 point) Calculer, si elle existe, la limite de s_n lorsque $n \to +\infty$.

Question 2 (4 points) Soient :

$$b : \frac{x - 4a - 1}{a} = \frac{y - 2a - 2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 point) Démontrer $\forall a \in \mathbb{R}_0 : b$ et c se croisent.

(b) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan α qui inclut b et est parallèle à d.

(c) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan β qui inclut c et est parallèle à d.

(d) (1 point) Démontrer que les surfaces α et β se coupent toujours ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) et que la droite d'intersection passe par un point fixe. Quel est ce point ?

Question 3 (4 points) La courbure d'une fonction est définie comme suit :

$$\left| \frac{f''(x)}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}} \right| \qquad (1)$$

(a) (1 point) Calculer la courbure de la fonction $f(x) = \ln x$.

(b) (2 points) Calculer la dérivée de la courbure de f.

(c) (1 point) Pour quelles valeurs de x la courbure de f est-elle maximale ? Si un maximum n'existe pas, calculer les limites de la courbure aux bornes du domaine.

Epreuve POL

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

Question 4 (4 points) Soit :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 point) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

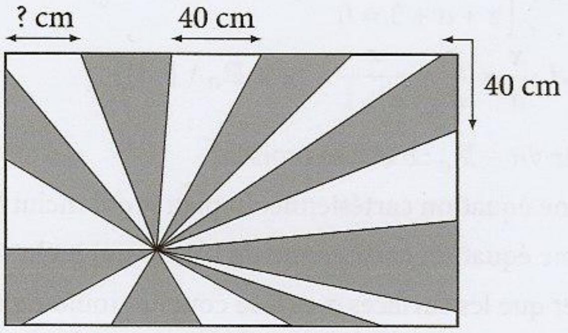
(b) (1 point) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 points) Démontrer par induction complète : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

Question 5 (4 points) Le drapeau de Fort En Maths est un rectangle de 2 mètres (horizontale) sur 1,2 mètre (verticale). A partir de n'importe quel point strictement intérieur au rectangle, on joint le contour du rectangle tous les 40 centimètres.

On colorie alternativement en blanc et en gris les triangles et les quadrilatères ainsi formés. Le total des aires grises dépasse le total des aires blanches : la différence est exactement le centième de l'aire du rectangle.

En partant du sommet en haut à gauche et en allant à l'horizontale vers la droite, quelle distance parcourt-on jusqu'au premier changement de couleur (du blanc au gris), en centimètres ?



① Soit $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

a) $|a-1| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 1\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $z_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $z_n = a^n$ et $u_n = |z_n - z_{n-1}|$.

$(u_n)_{n\geq 1}$ suite géométrique ?

$z_n - z_{n-1} = a^n - a^{n-1} = a^{n-1}\cdot(a-1)$

Donc $u_n = |a^{n-1}\cdot(a-1)| = |a^{n-1}|\cdot\underbrace{|a-1|}_{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ (voir (a))}}$ (*)

Or, $|a^{n-1}| = |a|^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

Donc : $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

La suite (u_n) est bien géométrique de raison $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et de premier terme $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{\sqrt{2}-1}$.

d) $\lim_{n\to\infty} S_n = u_1 \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$= \sqrt{2}+1$

(2) On donne trois droites de l'espace :

$$b \equiv \frac{x-4a-1}{a} = \frac{y-2a-2}{1} = \frac{z}{-a} \qquad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c \equiv \begin{cases} x+y+2a-1=0 \\ z+a+3=0 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \qquad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

a) Démontrer que $\forall a \in \mathbb{R}_0$: b et c se croisent.

Attention : l'expression "b et c se croisent" est rarement utilisée en français ; il faut comprendre "b et c sont gauches".
En néerlandais, on dit "kruizende lijnen".

D'après les équations de c : $\begin{cases} y = 1-2a-x \\ z = -a-3 \end{cases}$.

Remplaçons dans les équations de b :

$$\frac{x-4a-1}{a} = \frac{1-2a-x-2a-2}{1} = \frac{-a-3}{-a}$$

$$\frac{x-4a-1}{a} = -x-4a-1 = \frac{a+3}{a}$$

Multiplions par a $(a \neq 0)$:

$$\underbrace{x-4a-1 = -ax-4a^2-a}_{(1)} \quad \text{et} \quad \underbrace{-ax-4a^2-a = a+3}_{(2)}$$

D'après (1) : $x = 5a+4$.

D'après (2) : $-ax = 4a^2+2a+3 \rightarrow x = \frac{4a^2+2a+3}{-a}$

Pouvons-nous avoir $5a+4 = \frac{4a^2+2a+3}{-a}$

ou encore $-5a^2-4a = 4a^2+2a+3$?

$9a^2+6a+3=0$?

$\Delta = 36-4.9.3 = -108 < 0$

Il n'existe donc aucune valeur de "a" permettant de trouver une solution pour "x" et donc de trouver un point d'intersection entre b et c : elles sont gauches.

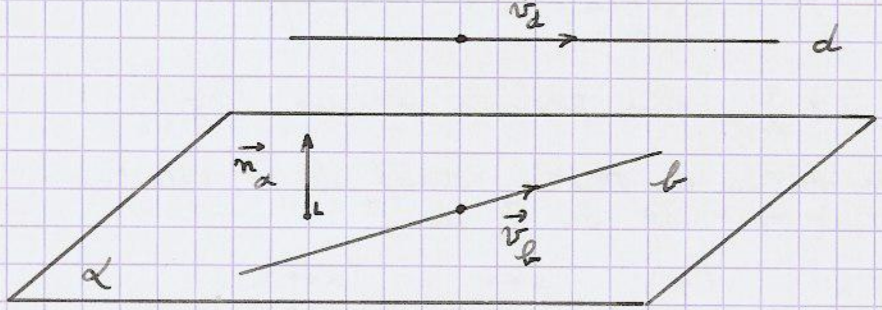
⚠ car elles ne sont pas parallèles non plus !

N'oublions pas de vérifier que b et c ne sont pas parallèles.

Comme vecteur directeur de b, nous avons : $\vec{v}_b \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$.

Tous les points de c ont comme cote $z = -a-3$.
Tout vecteur directeur de c a donc sa $3^{ème}$ composante nulle, et ne peut donc être multiple de $\vec{v}_b$ dont la $3^{ème}$ composante est non nulle.
Donc $\vec{v}_b$ et $\vec{v}_c$ ne sont jamais parallèles, et b et c non plus.

b) Trouver une équation cartésienne du plan α qui inclut b et est parallèle à d.



$\vec{v}_b \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$

$\vec{v}_d \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$

Pour trouver un vecteur normal à α, le plus simple est d'effectuer le produit vectoriel de $\vec{v}_b$ par $\vec{v}_d$:

$$\vec{v}_b \wedge \vec{v}_d = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1+a^2 \\ -a^2-a^2-a \\ a^2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+a+1 \\ -2a^2-a \\ a^2-a \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow \quad \alpha \equiv (a^2+a+1).x - (2a^2+a).y + (a^2-a).z + d = 0.$

Or, $(4a+1, 2a+2, 0) \in b \subset \alpha$. Donc :

$$(a^2+a+1).(4a+1) - (2a^2+a).(2a+2) + 0. + d = 0$$

$$\cancel{4a^3} + a^2 + \cancel{4a^2} + a + 4a + 1 - \cancel{4a^3} - \cancel{4a^2} - 2a^2 - 2a + d = 0.$$

$$-a^2 + 3a + 1 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = a^2 - 3a - 1.$$

$\rightarrow \quad \alpha \equiv (a^2+a+1).x - (2a^2+a).y + (a^2-a).z + a^2 - 3a - 1 = 0$

Cette réponse est déjà satisfaisante mais nous pouvons diviser par $a \neq 0$:

$$\boxed{\alpha \equiv \left(a+1+\frac{1}{a}\right).x - (2a+1).y + (a-1).z + a - 3 - \frac{1}{a} = 0.}$$

c) Trouver une équation cartésienne du plan β qui inclut c et est parallèle à d.

La démarche est la même qu'au point (b).

Nous avons déjà $\vec{v}_d \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$.

Cherchons $\vec{v}_c$, vecteur directeur de c.

Si $x=0 \to y = 1-2a \to C_1(0, 1-2a, -a-3) \in c$.

Si $y=0 \to x = 1-2a \to C_2(1-2a, 0, -a-3) \in c$.

Donc $\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 1-2a \\ -1+2a \\ 0 \end{pmatrix} = (1-2a).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $a \neq \frac{1}{2}$, nous pouvons prendre $\vec{v}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour obtenir un vecteur normal de β, effectuons le produit vectoriel de $\vec{v}_d$ par $\vec{v}_c$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -a-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

$\to \quad \beta \equiv (a+1)x + (a+1)y - 2az + d = 0$

Or, $C_1 \in c \subset \beta \to (a+1).0 + (a+1).(1-2a) - 2a.(-a-3) + d = 0$

$\to \quad a+1 - \cancel{2a^2} - 2a + \cancel{2a^2} + 6a + d = 0 \to d = -5a-1.$

$$\boxed{\beta \equiv (a+1)x + (a+1)y - 2az - 5a - 1 = 0.} \qquad (*)$$

Si $a = \frac{1}{2}$, nous avons $c \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$

et $d \equiv x = y = \frac{z}{3}$

Les points $(0,0,-\frac{7}{2})$ et $(1,-1,-\frac{7}{2})$ appartiennent à c

et donc $\vec{v}_c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a aussi $\vec{v}_d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta \equiv -3x - 3y + 2z + d = 0$

$(0,0,-\frac{7}{2}) \in \beta \to d = 7$

et $\beta \equiv 3x + 3y - 2z - 7 = 0.$ (équation équivalente à celle obtenue en remplaçant "a" par $\frac{1}{2}$ dans $(*)$).

Avec de distraction ...

Un examen attentif des équations de c permet de voir qu'elle est l'intersection de deux plans dont les vecteurs normaux ne dépendent pas de "a" :

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur de c, obtenu par produit vectoriel de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, ne dépend donc pas de "a" non plus :

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chercher un vecteur directeur de c à partir de deux points C_1 et C_2, dont les coordonnées dépendent du paramètre "a", n'est donc pas la meilleure idée.

d) Démontrer que les plans α et β se coupent toujours, $\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$.

Il suffit de montrer que les plans ne sont jamais parallèles, c'est-à-dire qu'un vecteur normal de l'un n'est jamais multiple d'un vecteur normal de l'autre.

Est-il possible d'avoir $\vec{n}_\alpha = k . \vec{n}_\beta$? $(k \in \mathbb{R}_0)$

$$\begin{pmatrix} a+1+\frac{1}{a} \\ -2a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} k . \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

$$\frac{a+1+\frac{1}{a}}{a+1} = \underbrace{\frac{-2a-1}{a+1} = \frac{a-1}{-2a}}_{(*)} = k \quad ?$$

Partons par exemple de l'égalité (*) :

$$4a^2 + 2a = a^2 - 1$$

$$3a^2 + 2a + 1 = 0 \qquad \Delta = -8 < 0$$

Il n'y a aucune valeur de "a" permettant de vérifier cette égalité. Les plans α et β ne sont jamais parallèles.

Montrer que la droite d'intersection de α et β passe par un point fixe. Lequel ?

Soit $F(x_F, y_F, z_F)$ le point.

Il appartient au plan α :

$$(a^2+a+1).\,x_F - (2a^2+a).\,y_F + (a^2-a).\,z_F + a^2-3a-1 = 0.$$

Présentons le membre de gauche sous la forme d'un polynôme du second degré de la variable "a" :

$$(x_F - 2y_F + z_F + 1).a^2 + (x_F - y_F - z_F - 3).\,a + x_F - 1 = 0.$$

Pour que la valeur numérique de ce polynôme soit égale à 0 quelle que soit la valeur de "a", il faut et il suffit que ses coefficients soient tous nuls :

$$\begin{cases} x_F - 2y_F + z_F = -1 \\ x_F - y_F - z_F = 3 \\ x_F = 1 \end{cases} \xrightarrow{x_F=1} \begin{cases} -2y_F + z_F = -2 & (1) \\ -y_F - z_F = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) : \quad -3y_F = 0 \rightarrow y_F = 0 \xrightarrow{(1)} z_F = -2$$

Le point fixe est $F(1,0,-2)$.

Vérifions que F appartient aussi à β, quelle que soit la valeur de "a" :

$$(a+1).\,1 + (a+1).\,0 - 2a.(-2) - 5a - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$a+1+4a-5a-1 = 0 \qquad \text{ok}.$$

Autre méthode pour la question ② a).

Pour prouver que deux droites sont gauches, nous pouvons utiliser la méthode présentée dans le document "faisceaux.pdf" (page 4).

La droite c est l'intersection des plans

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y + 2a - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv z + a + 3 = 0 \end{cases}$$

Déterminons deux points P et Q de la droite

$$b \equiv \frac{x-4a-1}{a} = \frac{y-2a-2}{1} = \frac{z}{-a} \qquad (a \in \mathbb{R}_0)$$

- $P(4a+1,\ 2a+2,\ 0) \in b$
- si $x = 1$: $\quad -4 = y - 2a - 2 = \dfrac{z}{-a}$

  donc $Q(1,\ 2a-2,\ 4a) \in b$.

Calculons maintenant le déterminant $\begin{vmatrix} \pi_1(P) & \pi_2(P) \\ \pi_1(Q) & \pi_2(Q) \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 4a+1 + 2a+2 + 2a-1 & a+3 \\ 1 + 2a-2 + 2a-1 & 4a+a+3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8a+2 & a+3 \\ 4a-2 & 5a+3 \end{vmatrix} = 40a^2 + 24a + 10a + 6 - 4a^2 - 12a + 2a + 6$$

$$= 36a^2 + 24a + 12$$

$$= 12.\,(\underbrace{3a^2 + 2a + 1}_{\Delta = -8}) \neq 0$$

Quelle que soit la valeur de "a", le déterminant est différent de 0. Les droites b et c sont gauches.

③ La courbure d'une fonction est définie par

$$C_{(x)} = \left| \frac{f''_{(x)}}{\left(1+\left(f'_{(x)}\right)^2\right)^{3/2}} \right|$$

a) Courbure de $f_{(x)} = \ln x$ $\quad f'_{(x)} = \frac{1}{x} \quad f''_{(x)} = -\frac{1}{x^2}$

$$C_{(x)} = \left| \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{1}{x^2 \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^2 \cdot \frac{(x^2+1)^{3/2}}{x^3}}$$

$$\longrightarrow \quad C_{(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} \qquad (x>0)$$

b) $$C'_{(x)} = \frac{1 \cdot (x^2+1)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+1)^3}$$

$$= (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2+1-3x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{5/2}}.$$

c) Domaine de définition de $f_{(x)} = \ln x$: $]0,+\infty[$.

x	//////	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$C'_{(x)}$	//////	X	+	0	−
$C_{(x)}$	//////	X	↗	MAX	↘

La courbure est maximale pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$C_{max} = \frac{\sqrt{2}/2}{\left(3/2\right)^{3/2}} \simeq 0,38490$$

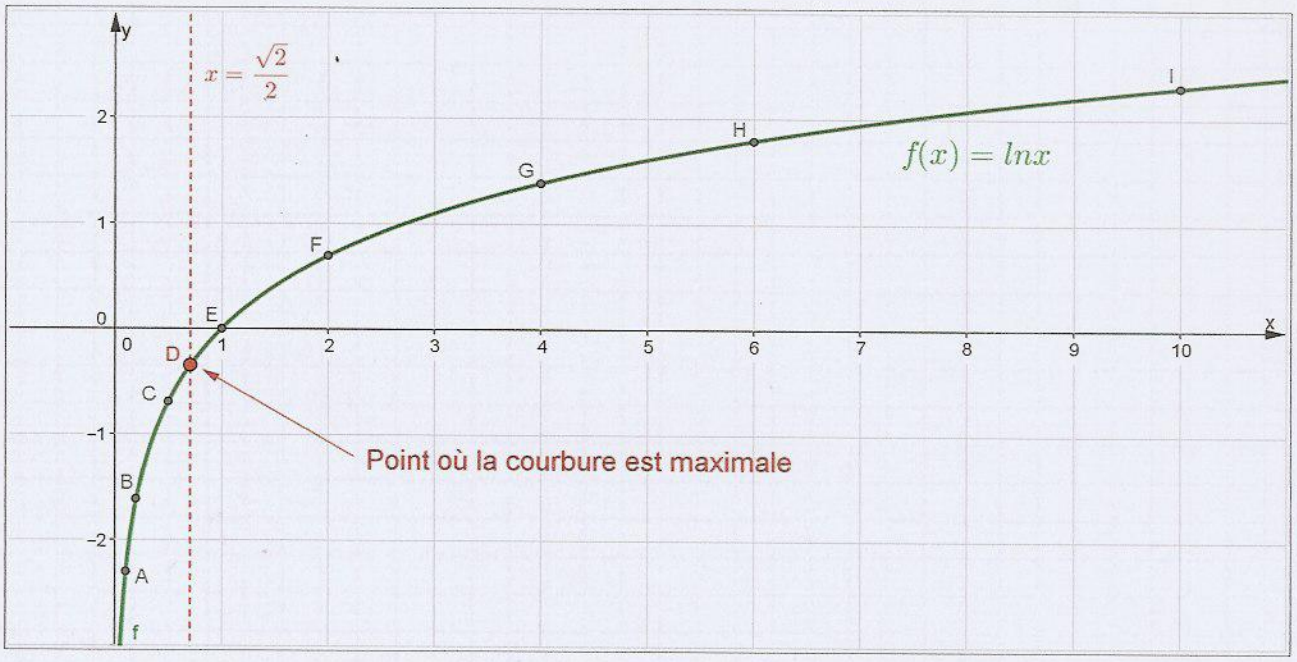
Bien qu'un maximum existe, calculons tout de même les limites de la courbure aux bornes du domaine :

1°/ $$\lim_{x\to 0^+} C_{(x)} = \frac{0^+}{1^{3/2}} = 0^+$$

2°/ $$\lim_{x\to +\infty} C_{(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+.$$

La courbure de $f_{(x)} = \ln x$ tend vers 0 aux bornes du domaine.
Connaissant le graphique de cette fonction, on pouvait le deviner.

Courbure du graphique de $f(x) = \ln x$



Quelques valeurs de la courbure

Point	Abscisse	Courbure	
A	0,1	0,0985	
B	0,2	0,1886	
C	0,5	0,3578	
D	0,7071	0,3849	maximum
E	1	0,3536	
F	2	0,1789	
G	4	0,0571	
H	6	0,0267	
I	10	0,0099	

4) a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^1\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x} . x^1\,dx$

<u>Intégration par parties</u> : $u = x \to u' = 1$
$v' = e^{-x} \to v = -e^{-x}$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\left[-xe^{-x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}\,dx \right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(-te^{-t} - \left[e^{-x}\right]_0^t \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1 \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{-t}{e^t}}_{RH} - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-t}}_{0} + 1 = 1 .$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{e^t} = 0$$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^2\,dx$ $\qquad u = x^2 \to u' = 2x$
$v = e^{-x} \to v = -e^{-x}$

$$= \underbrace{\left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{} + 2.\underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx}_{1 \text{ (voir (a))}} = 2 .$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{e^x} \overset{RH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{e^x} \overset{RH}{=} -2. \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \right)$$

c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n\,dx = n!$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0)$

1°/ La propriété est vérifiée pour $n = 1$.

En effet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} . x^1\,dx \overset{(a)}{=} 1 = 1!$

2°/ <u>Hypothèse de récurrence</u> : Supposons la propriété vraie pour $n = k$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^k\,dx = k! \quad \text{(H.R.)}$$

Prouvons que cela implique qu'elle est vraie pour $n = k+1$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{k+1}\,dx \overset{\substack{\text{par}\\\text{parties}}}{=} \underbrace{\left[-e^{-x} . x^{k+1}\right]_0^{+\infty}}_{0} + (k+1)\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} x^k\,dx}_{k! \text{ (H.R.)}}$$

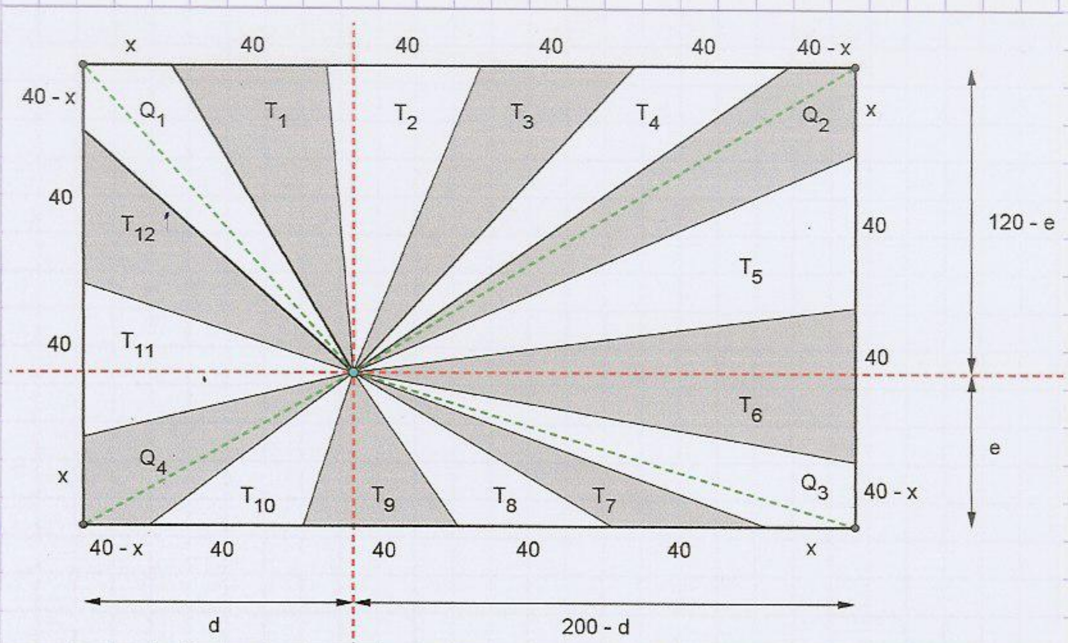
$$\left(\begin{array}{l} u = x^{k+1} \to u' = (k+1).x^k \\ v' = e^{-x} \to v = -e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= (k+1).\, k!$$

En effet : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{k+1}}{e^x} = 0$

$$= (k+1)! \quad \text{cqfd}$$

⑤



Les triangles T_1, T_2, T_3 et T_4 ont tous la même aire car ils ont la même base (40) et la même hauteur (120 − e).
La somme des aires grises T_1 et T_3 est donc égale à la somme des aires blanches T_2 et T_4.
Le triangle T_5 a la même aire que T_6 (base : 40 ; hauteur : 200 − d).
La somme des aires grises T_7 et T_9 est égale à la somme des aires blanches T_8 et T_{10} (triangles de base 40 et de hauteur e).
Enfin, le triangle blanc T_{11} a la même aire que le triangle gris T_{12} (base : 40 ; hauteur : d).

Finalement, la différence entre le total des aires grises et celui des aires blanches se situe au niveau des quadrilatères.
Cette différence vaut $\frac{1}{100}\cdot(200\times 120) = 240$ (cm²).

Donc : $Q_2 + Q_4 = Q_1 + Q_3 + 240$.

Pour calculer les aires Q_i, chaque quadrilatère est partagé en deux triangles (segments verts pointillés).

$$\left[\frac{(40-x)(120-e)}{\cancel{2}} + \frac{x.(200-d)}{\cancel{2}}\right] + \left[\frac{(40-x).e}{\cancel{2}} + \frac{x.d}{\cancel{2}}\right]$$

$$= \left[\frac{x.(120-e)}{\cancel{2}} + \frac{(40-x).d}{\cancel{2}}\right] + \left[\frac{x.e}{\cancel{2}} + \frac{(40-x).(200-d)}{\cancel{2}}\right] + \overset{480}{\cancel{240}}$$

$\rightarrow$ $(40-x).120 + x.200 = x.120 + (40-x).200 + 480$

$4800 - 120x + 200x = 120x + 8000 - 200x + 480$

$160x = 3680$

$\boxed{x = 23 \text{ (cm)}.}$