EXEMPLES DE QUESTIONS EN MATHÉMATIQUES

1) Analyse

1. Soient la fonction f de R dans R définie par :
$f(x) = (2x+1)e^{-2x}$
et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f).

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déterminer une équation cartésienne
- de la tangente à C au point d'abscisse 0
- des asymptotes (éventuelles) de C

c) Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant :
- les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale).
- Les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
- Les extréma de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
- Les points d'inflexion de f et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f.

d) Tracer soigneusement le courbe C d'après le résultat du c).

e) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g (de R dans R) définie par :
$g(x) = f(|x|)$

f) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel a le nombre de solutions de l'équation
$f(x) = a$

2. Etudier la fonction :

$$f(x) = \frac{(x+a)^2}{x+2a}$$

en discutant, s'il y a lieu, selon la valeur du paramètre $a \in$ R.
En particulier, déterminer :

a. le domaine de définition de f,

b. le domaine de continuité de f,

c. les asymptotes éventuelles,

d. croissance / décroissance / extrema,

e. concavité / points d'inflexion.

Esquisser le graphe de f.

3. Calculez la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

4. a) Calculer $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

b) En déduire $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) Soit $f(x) = \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}$ du

Calculer $f'(\frac{1}{2})$.

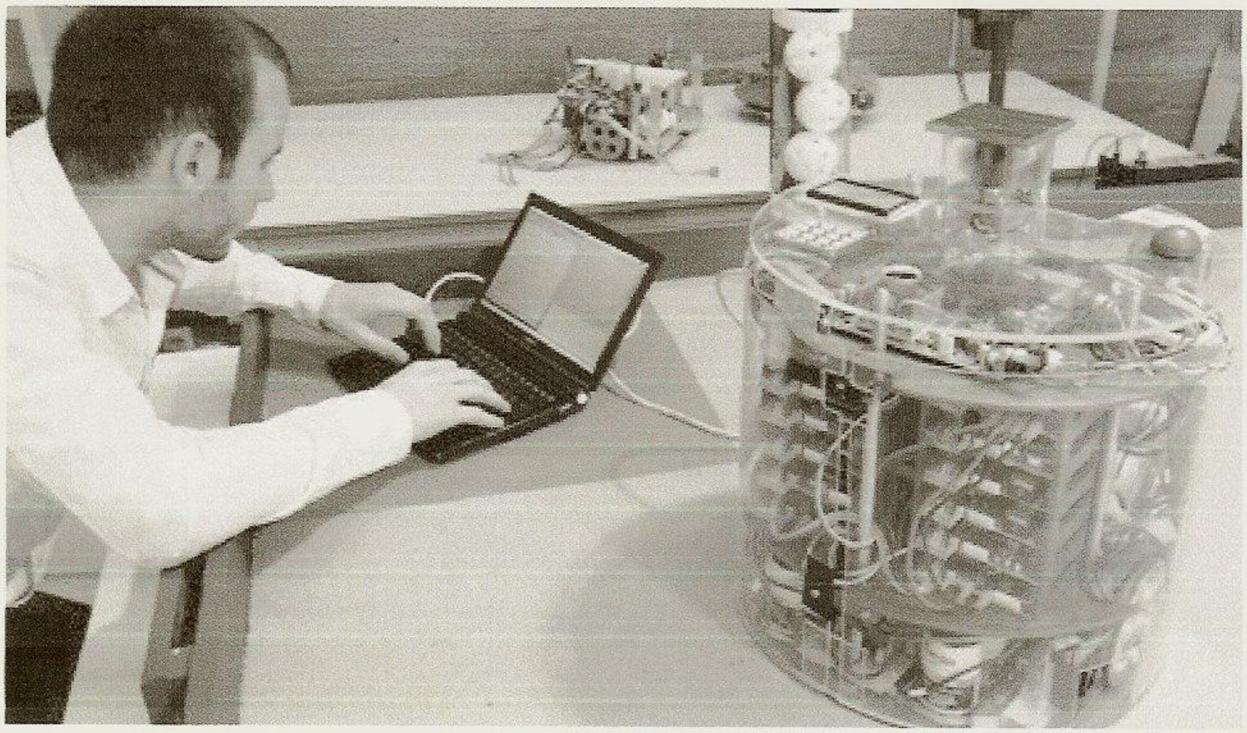
5. Calculer l'intégrale (indéfinie) : $I(\lambda) = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + \lambda}$ (λ constante réelle)

Discuter les différents cas d'après les valeurs de λ.

6. a) Calculez le volume obtenu en faisant tourner autour de l'axe des x la surface déterminée par

$y^2 \leq x \exp(-x^2)$ et $0 \leq x \leq a$

b) Déterminez a pour que ce volume soit égal à $\pi/4$.



2) Algèbre

1. La somme des trois chiffres d'un nombre naturel est 17.
   En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines on obtient 22.
   La différence entre le nombre et celui obtenu en inversant l'ordre des chiffres est 495.
   Quels sont les nombres possibles qui vérifient ces propriétés ?

2. Trois grues effectuent le déchargement d'un navire, chacune avec sa vitesse de transbordement propre. Cette vitesse représente le volume de marchandise déchargée par unité de temps.
   Pour vider complètement le navire, il faut 6 jours si elles travaillent toutes les trois ensemble de façon ininterrompue. Par contre, si seulement la première et la deuxième fonctionnent, il faudra 12 jours. Enfin, si l'on fait travailler d'abord la première seule pendant 10 jours, le déchargement peut ensuite être terminé en 2 jours par la première et la troisième travaillant ensemble.
   On demande le nombre de jours nécessaires à chaque grue pour effectuer le déchargement toute seule.
   Mettez d'abord le problème en équation, ensuite résolvez-le. Expliquez votre raisonnement.

3. Discuter le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

4. Résoudre dans IR l'équation :

$$4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x}$$

5. Résoudre dans les complexes l'équation :

$$iz^2 - (1+i)z = 2(i-1)$$

6. Résoudre dans les réels l'inéquation :

$$\sqrt{\frac{6x-11}{3x-2}} \leq \frac{1}{x}$$

3) Trigonométrie et calcul numérique

1. Résoudre l'équation :

$$1+\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x-\cos 2x+\cos 3x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Sachant que $\sin x - \cos x = 0{,}2$.

Calculer $\sin 2x$

4. Soient a, b deux nombres réels strictement positifs tels que $ab < 1$, démontrer que :

a) $\text{Arctg } a + \text{Arctg } \dfrac{1}{a} = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\text{Arctg } a + \text{Arctg } b < \dfrac{\pi}{2}$

c) $\text{Arctg } a + \text{Arctg } b = \text{Arctg } \dfrac{a+b}{1-ab}$

5. Si I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC et si α, β, γ désignent les angles BIC, CIA, AIB démontrer que :

$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}$

6. Connaissant les distances suivantes :

Bruxelles	-	Lisbonne	1713 km
Athènes	-	Bruxelles	2089 km
Berlin	-	Lisbonne	2310 km
Athènes	-	Berlin	1801 km
Bruxelles	-	Rome	1182 km
Lisbonne	-	Rome	1873 km
Athènes	-	Rome	1040 km

Calculer la distance Berlin – Bruxelles, en supposant une Terre plane.

Suggestion : utiliser uniquement les formules de calcul d'angles ou de côtés dans des triangles, après avoir représenté graphiquement la situation géographique des villes.

4) Géométrie et géométrie analytique

1. On donne un triangle ABC. Le milieu de $[B, C]$ est M et G' est le symétrique par rapport à M du centre de gravité G du triangle. On note D l'intersection de AB avec CG', E celle de DG avec BG' et F celle de AE avec CD. Montrer que :

   a. les droites AC, BG' et la parallèle à BC menée par D sont concourantes ;

   b. $|DF| = |FG'| = |G'C|$

2. Par un point A, on mène deux tangentes AM et AN à un cercle de centre O. Par un point E de l'arc MN, on mène une troisième tangente BEC au cercle où les points B et C sont les points d'intersection de la troisième tangente avec les tangentes AM et AN.

   On vous demande :

   - de réaliser un dessin clair et précis du problème posé ;
   - de déterminer en fonction de la distance AM le périmètre du triangle ABC.

3. Si O est le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC (O est le point d'intersection des médiatrices) et si M est un point quelconque du plan, démontrer que $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal au vecteur $|\overrightarrow{MA}|^2\,\overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{MB}|^2\,\overrightarrow{CA} + |\overrightarrow{MC}|^2\,\overrightarrow{AB}$.

4. On considère une pyramide de sommet S et dont la base est un quadrilatère convexe (plan) $ABCD$.
   Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si le plan $ABCD$ est parallèle aux droites d'intersection des plans SAB et SCD d'une part, SBC et SAD d'autre part.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé OXY, on considère un triangle rectangle isocèle OAB posé sur les axes, avec $OA = OB = a$

   - Déterminer analytiquement l'ensemble des points M du plan tels que les pieds des 3 perpendiculaires abaissées de M sur les 3 côtés (éventuellement prolongés) du triangle appartiennent à une circonférence centrée à l'origine O.
   - Dessiner les différents éléments, avec $a = 6$ cm.

6. Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne les points fixes $A(5, 0)$ et $B(-5, 0)$. Un point M parcourt le cercle γ de diamètre BA. Par M, on abaisse sur BA la perpendiculaire MP (P est situé sur BA). Déterminez le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle OMP.

7. L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés $OXYZ$.
On donne les points A, B, et C, de coordonnées respectives (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) qui avec O constituent quatre sommets d'un cube.
On appelle DE l'arête du cube, parallèle à OZ, la plus éloignée de OC. Et on nomme M le point milieu de DE (NB. D est dans le plan Z=0).

a. Déterminez une équation cartésienne du plan perpendiculaire à CM en C.
b. Calculez les coordonnées du point de percée S de DE dans ce plan.
c. Calculez le volume de la pyramide de sommet S et de base $OADB$.
d. Calculez l'angle entre CS et CA.
e. Déterminez des équations cartésiennes de la droite CM.
f. Calculez la distance qui sépare CM de l'origine O.
g. Calculez l'angle entre AM et MC.

MONS Exemples de questions dans la brochure de présentation FPMs.

I. ANALYSE.

1 $f(x) = (2x+1) \cdot e^{-2x}$ $\quad$ dom $f = \mathbb{R}$.

a) $f'(x) = 2 \cdot e^{-2x} + (2x+1) \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$

$= 2 \cdot e^{-2x} \cdot (1 - 2x - 1) = -4x \cdot e^{-2x}$

$f''(x) = -4 \cdot e^{-2x} + (-4x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$

$= -4 \cdot e^{-2x} \cdot (1-2x) = 4 \cdot e^{-2x} \cdot (2x-1)$

b) point d'abscisse 0 : $(0,1)$

$\rightarrow$ $t \equiv y - 1 = f'(0) \cdot (x - 0)$ $\qquad f'(0) = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{t \equiv y = 1}$ Tangente horizontale.

Asymptote ? verticale : non (voir domaine).

A.H. ? $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \text{"} +\infty . 0 \text{"}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{e^{2x}} = \text{"}\dfrac{+\infty}{+\infty}\text{"}$

$\overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{2e^{2x}} = \dfrac{\text{"}1\text{"}}{+\infty} = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{AH \equiv y = 0}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \text{"} -\infty . e^{+\infty} \text{"} = -\infty$

A.O. ? $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{e^{2x} \cdot x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{e^{2x} \cdot \cancel{x}} = \text{"}\dfrac{2}{e^{-\infty}}\text{"}$

$= \text{"}\dfrac{2}{0^+}\text{"} = +\infty$.

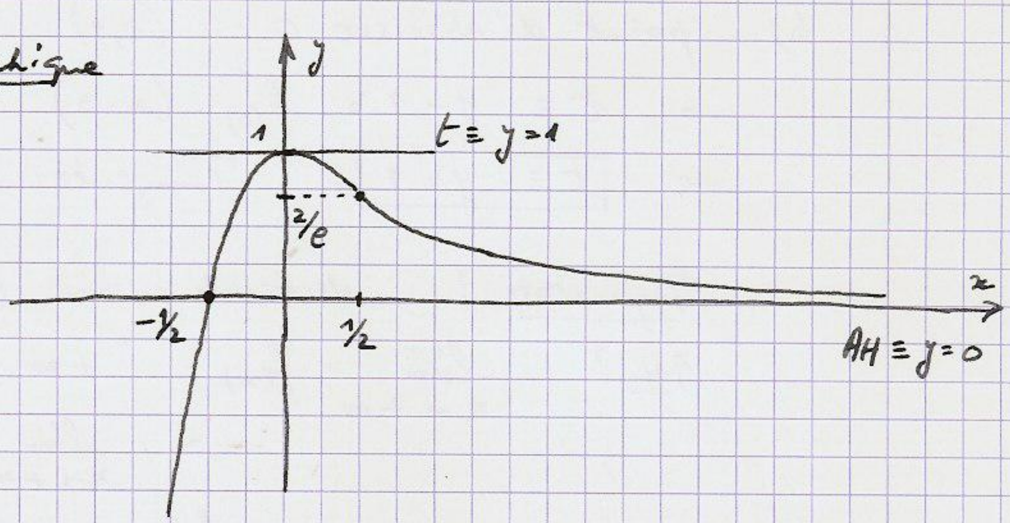
Pas d'asymptote oblique.

c) <u>Tableau récapitulatif f, f' et f''</u>.

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
[$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$]
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$			MAX $(0,1)$	$\searrow$	PI $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$	$\searrow$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \simeq 0{,}7358$$

d) <u>Graphique</u>



e) $$g(x) = f(|x|) = (2|x| + 1) \cdot e^{-2|x|}$$

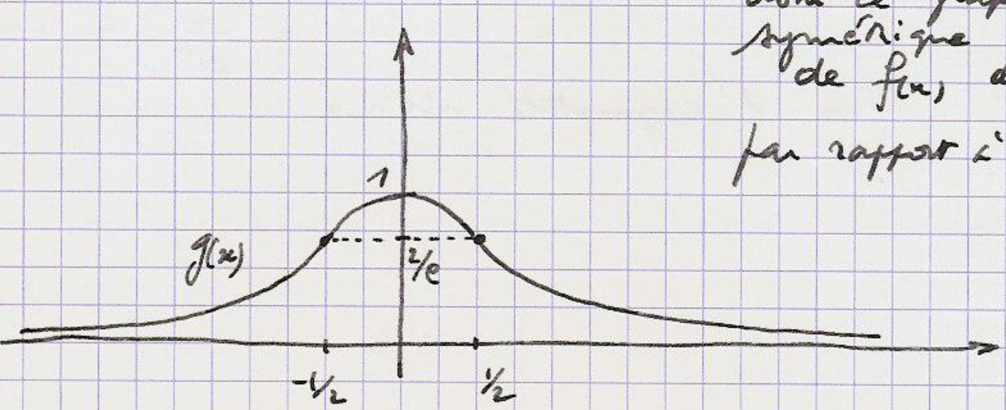
<u>Si $x \geq 0$</u> $\quad |x| = x \longrightarrow \quad g(x) = f(x)$

<u>Si $x \leq 0$</u> $\quad |x| = -x \longrightarrow \quad g(x) = (-2x+1) \cdot e^{2x}$

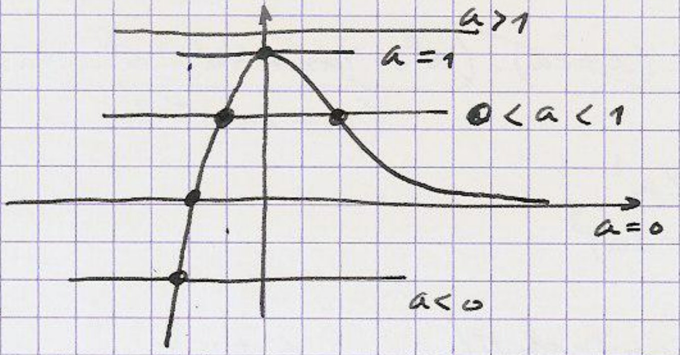
$$= \underbrace{f(-x)}$$

dont le graphe est le symétrique de celui de $f(x)$ dans $[0, +\infty[$

par rapport à l'axe Oy.



f) Nbre de solutions de l'équation $f(x) = a$



$$\text{Si} \begin{cases} a > 1 & : \text{ aucune solution} \\ a = 1 & : \text{ 1 seule solution } (x = 0) \\ 0 < a < 1 & : \text{ 2 solutions distinctes.} \\ a \leq 0 & : \text{ 1 seule solution} \end{cases}$$

$(x = -1/2 \text{ si } a = 0)$

---

(2) $f(x) = \dfrac{(x+a)^2}{x+2a}$ $\quad$ a : paramètre réel.

a) b) $\left\{ \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2a\} = \text{dom}_c f. \right.$

c) $\boxed{AV \equiv x = -2a}$ $(a \neq 0)$ $\quad$ Sauf si $a = 0$: point rouge $(0,0)$

AH ? Non car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x} = \pm\infty$

AO ? $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 2ax + a^2}{x^2 + 2ax} = 1$

$p = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + \cancel{2ax} + a - \cancel{x^2} - \cancel{2ax}}{x + 2a} = 0.$

$\boxed{AO \equiv y = x}$

Remarque : Si $a = 0$ $\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \neq 0 \\ \text{n'existe pas si } x = 0 \end{cases}$

d) $f'(x) = \dfrac{2(x+a).(x+2a) - (x+a)^2}{(x+2a)^2} = \dfrac{(x+a)(2x + 4a - x - a)}{(x+2a)^2}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{(x+a).(x+3a)}{(x+2a)^2}}$ $\qquad \dfrac{x^2 + 4ax + 3a^2}{(x+2a)^2}$

$$f''_{(x)} = \frac{\overbrace{(2x+4a)}^{2(x+2a)}(x+2a)^2 - (x^2+4ax+3a^2)\cdot 2(x+2a)}{(x+2a)^4}$$

$$= \frac{2\cdot\cancel{(x+2a)}\cdot(\cancel{x^2}+\cancel{4ax}+4a^2-\cancel{x^2}-\cancel{4ax}-3a^2)}{(x+2a)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2a^2}{(x+2a)^3}.$$

Tableau récapitulatif. $(a \neq 0)$

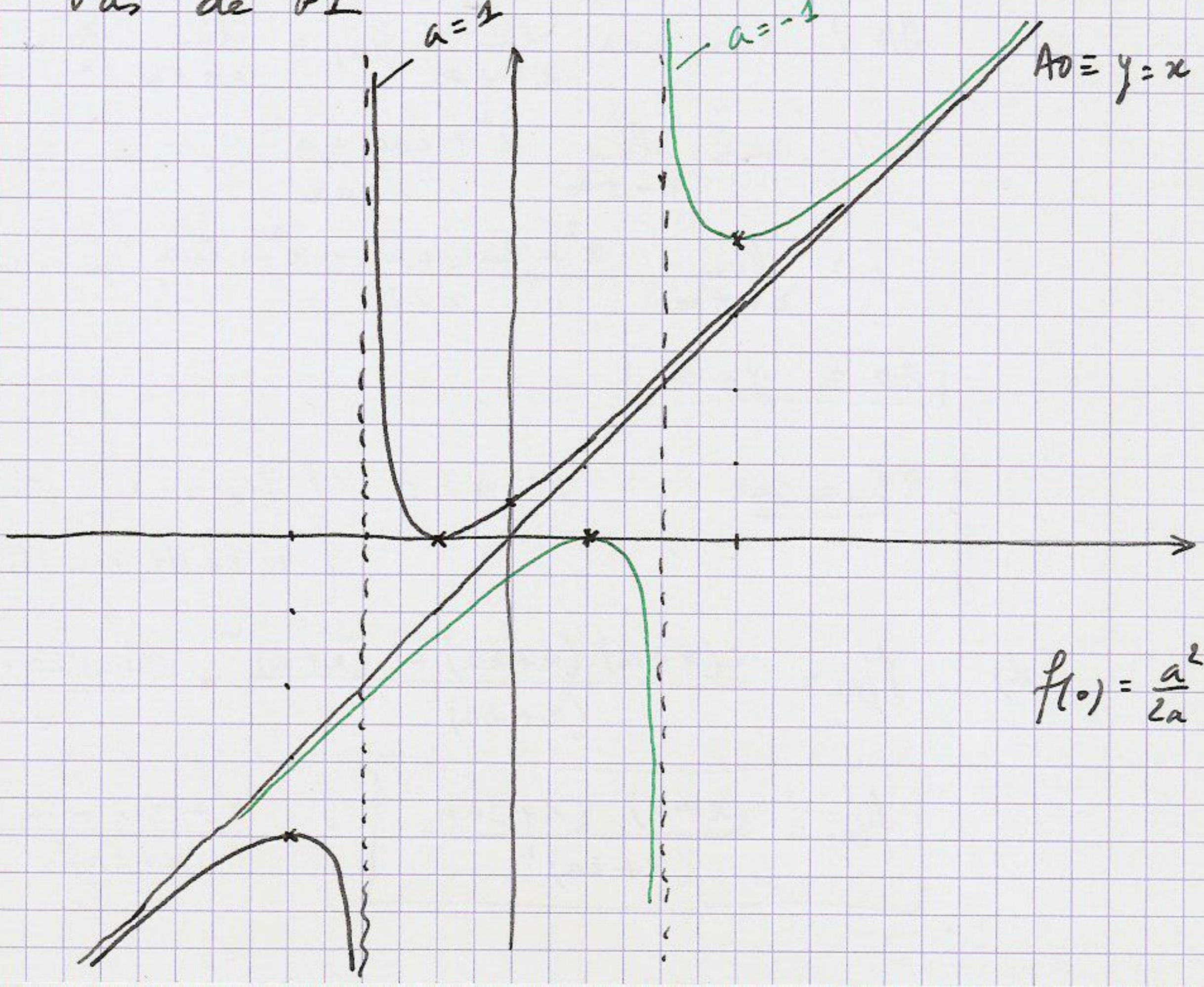
si $a<0$		$-a$		$-2a$		$-3a$	
si $a>0$: x		$-3a$		$-2a$		$-a$	
$f'_{(x)}$	$+$	0	$-$	X	$-$	0	$+$
$f''_{(x)}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f_{(x)}$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$ $-\infty$ | $+\infty$	AV $x=-2a$	$\searrow$	min	$\nearrow$

MIN
MAX $(-3a, -4a)$

$$f(-3a) = \frac{(-2a)^2}{-a} = -4a$$

min $(-a, 0)$
MAX

Pas de PI



$$f(0) = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ dom $f = [-1,+\infty[\setminus \{0\}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x}-1).(\sqrt{1+x}+1).\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{\underbrace{(\sqrt[3]{1+x}-1).\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}.(\sqrt{1+x}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{(*)}{\cancel{x}}.\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{\underset{(*)}{\cancel{x}}.(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{3}{2}$

Utilisation de $(a-b).(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ (*)

---

④ a) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ posons $x = \cos u$

$dx = -\sin u\,du$

$= \int \sqrt{1-\cos^2 u}.(-\sin u).du$

$= -\int \sin^2 u\,du$

$\cos 2u = 1-2\sin^2 u$

$\dfrac{\cos 2u - 1}{2} = -\sin^2 u$

$= +\int \dfrac{\cos 2u - 1}{2}\,du$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 2u}{2} - u\right) + C$

$= \dfrac{1}{4}.2.\sin u.\cos u - \dfrac{1}{2}u + C$

$= \dfrac{1}{2}.\sqrt{1-x^2}.x - \dfrac{1}{2}.\arccos x + C$

$= \dfrac{1}{2}.\left(x.\sqrt{1-x^2} - \arccos x\right) + C$

b) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x.\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

$\left(\begin{array}{l} u = x \to u' = 1 \\ v' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \to v = -\sqrt{1-x^2} \end{array}\right)$

$= -x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \dfrac{1}{2}\arccos x + C$

$= \boxed{-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \dfrac{1}{2}.\arccos x + C}$

c) $f(x) = \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\, du$

$f'(\frac{1}{2}) = ?$ $\quad f(x) = F(x) - F(0)$

où F est primitive de $\cancel{x}\cdot \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = F'(x) = \left[\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\right]_{u=x}$$

$$\rightarrow \quad f'(\tfrac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1/4}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

---

5 $\quad I(\lambda) = \int \frac{dx}{x^2+2x+\lambda}$

si $\lambda = 1$ $\quad I(1) = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1} + C$

Racines du dénominateur ?

$\Delta = 4 - 4\lambda = 4.(1-\lambda)$

si $\lambda < 1$ alors $\Delta > 0 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{2}$

$$= -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

$$I(\lambda) = \int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right) dx \qquad A(x-x_2) + B(x-x_1) = 1$$

Si $x = x_1 \rightarrow A = \frac{1}{x_1 - x_2}$

Si $x = x_2 \rightarrow B = \frac{1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \int \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\left(\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \cdot \ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C$$

$x_1 - x_2 = -1 + \sqrt{1-\lambda} + 1 + \sqrt{1-\lambda}$

$= 2\sqrt{1-\lambda}$

$$= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \cdot \ln\left|\frac{x+1-\sqrt{1-\lambda}}{x+1+\sqrt{1-\lambda}}\right| + C}$$

si $\lambda > 1$ alors $\Delta < 0$ pas de racine au dén.

$$I(\lambda) = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+\lambda-1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+\lambda-1}$$

$$= \frac{1}{\lambda-1} \cdot \int \frac{dx}{1+\frac{(x+1)^2}{\lambda-1}}$$

posons $u = \frac{x+1}{\sqrt{\lambda-1}} \longrightarrow u^2 = \frac{(x+1)^2}{\lambda-1}$

$$du = \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\, dx$$

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda-1} \cdot \int \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}dx}\sqrt{\lambda-1} \cdot du}{1+u^2}$$

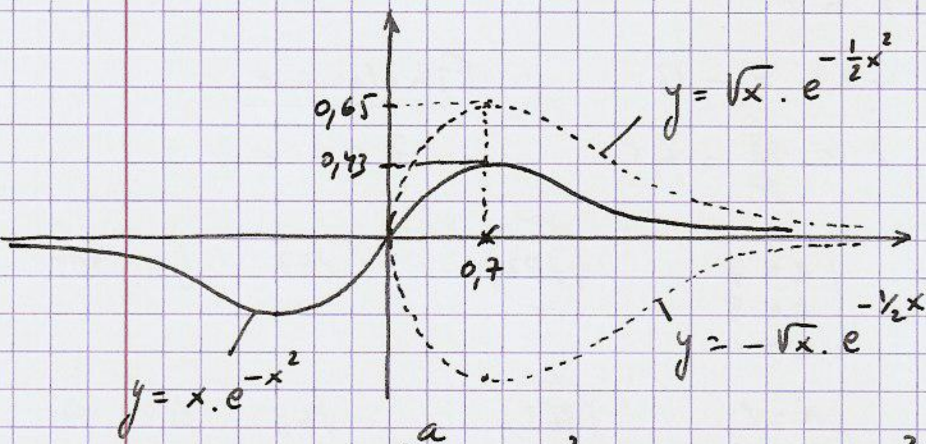
$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot \arctan u + C$$

$$\boxed{I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{\lambda-1}}\right) + C.}$$

---

6 a) $y^2 \leq x \cdot e^{-x^2}$ pour $x \in [0,a]$

$-\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq y \leq \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour $x \in [0,a]$



Volume d'une sorte de goutte d'eau.

$$V = \pi \cdot \int_0^a x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \left[e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{\pi}{2} \cdot \left(e^{-a^2} - 1\right)$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{a^2}}\right)}$$

b) $V = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^{a^2}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{a^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = \ln 2$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{\ln 2}$ car $a \geq 0$

II ALGÈBRE.

① Naturel de 3 chiffres : $n = 100a + 10b + c$

$$\begin{cases} a + b + c = 17 \\ b + 2a = 22 \\ (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 495 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 17 & (1) \\ 2a + b = 22 & (2) \\ (99a - 99c = 495) \\ a - c = 5 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3)$: $2a + b = \cancel{1}\,22 \quad (4)$

Système indéterminé car (4) équivalente à (2).

$a = \lambda \longrightarrow b = 22 - 2\lambda$
$\qquad\qquad\quad c = \lambda - 5$

" $S = \{ (\lambda, 22 - 2\lambda, \lambda - 5) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ ".

⚠ $0 \leq a, b, c \leq 9$

$0 \leq \lambda \leq 9$

$0 \leq \lambda - 5 \leq 9 \iff 5 \leq \lambda \leq 14$ $\quad 5 \leq c \leq 9$

$0 \leq 22 - 2\lambda \leq 9$

$-22 \leq -2\lambda \leq -13$

$11 \geq \lambda \geq \frac{13}{2} = 6{,}5$

Finalement

$7 \leq \lambda \leq 9$

Vérifions :

$\begin{cases} a = 7 \\ b = 8 \\ c = 2 \end{cases}$ $\quad$ 782 $\quad$ 287 $\quad \Delta = 495$

$\begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{cases}$ $\quad$ 863 $\quad$ 368 $\quad \Delta = 495$

$\begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \\ c = 4 \end{cases}$ $\quad$ 944 $\quad$ 449 $\quad \Delta = 495$

OK.

(2) Soit Q la quantité totale à décharger et v_1, v_2, v_3 les vitesses respectives des grues.

$$\begin{cases} 6v_1 + 6v_2 + 6v_3 = Q & (1) \\ 12v_1 + 12v_2 = Q & (2) \\ (10v_1 + 2v_1 + 2v_3 = Q) & \\ 12v_1 + 2v_3 = Q & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (2) : & 12v_1 + 12v_2 = Q \\ 2\times(1) : & 12v_1 + 12v_2 + 12v_3 = 2Q \\ \hline (-) & -12v_3 = -Q \end{array}$$

$\rightarrow v_3 = \dfrac{Q}{12}$

Dans (3) : $12v_1 = Q - 2.\dfrac{Q}{12} = \dfrac{5Q}{6} \rightarrow v_1 = \dfrac{5Q}{72}$

Dans (2) : $12v_2 = Q - 12.\dfrac{5Q}{72} = \dfrac{Q}{6} \rightarrow v_2 = \dfrac{Q}{72}$

Conclusion : la grue 1 seule aurait besoin de $\dfrac{72}{5} = 14{,}4$ jours ;
" " 2 " " " " 72 jours ;
" " 3 " " " " 12 jours.

---

(3) $$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 & (1) \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 & (2) \\ x + y + z = 1 - a & (3) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1-a & 1-a \\ a & 1+a & 1+a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ car les colonnes 2 et 3 sont identiques.

$\rightarrow$ le système est impossible ou indéterminé.

$\boxed{D_x = 0}$ p.r la m̂ raison.

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1-a \\ a & a-a^2 & 1+a \\ 1 & 1-a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 1-a \\ a-a^2 & 1+a \end{vmatrix} - (1-a).\begin{vmatrix} a & 1-a \\ a & 1+a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 \\ a & a-a^2 \end{vmatrix}$$

$\longrightarrow$

(quelques mises en évidence ...)

$$= a.\begin{vmatrix} a & 1-a \\ 1-a & 1+a \end{vmatrix} - a.(1-a).\begin{vmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} + a^2.\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= a.\left(a+\cancel{a^2}-1+2a-\cancel{a^2}\right) - a.(1-a)\left(\cancel{1}+a-\cancel{1}+a\right) + a^2.(1-a-a)$$

$$= 3a^2 - a - 2a^2 + \cancel{2a^3} + a^2 - \cancel{2a^3} = 2a^2 - a$$

$$\boxed{D_y = a.(2a-1)} \qquad D_y = 0 \iff a=0 \text{ ou } a = 1/2$$

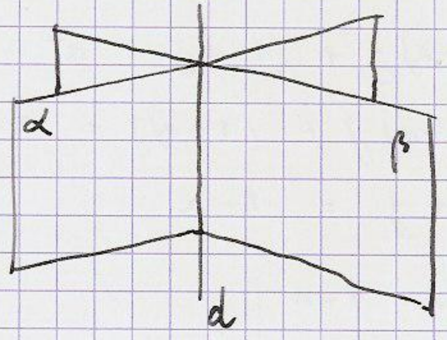
$$D_z = \begin{vmatrix} a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & a-a^2 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = -D_y \rightarrow \boxed{D_z = a.(1-2a)}$$

1°/ <u>Si $a=0$</u> le système s'écrit
$$\begin{cases} y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+y+z=1 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

le système est ~~sign~~ simplement indéterminé.

$$\boxed{S = \left\{ (1, \lambda, -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

<u>Interprétation géométrique</u>



$\alpha \equiv y+z=0$

$\beta \equiv x+y+z=1$

$\alpha \cap \beta = d$

avec $d \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

2°/ <u>Si $a=\frac{1}{2}$</u> le système s'écrit
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=\frac{1}{4} \\ x+y+z=\frac{1}{2} \end{cases}$$
éq. équiv.

il est équivalent à
$$\begin{cases} x+3y+3z=\frac{1}{2} & (1) \\ x+y+z=\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$(1)-(2)$: $2y+2z=0 \rightarrow y+z=0$

dans (2) : $x = 1/2$.

le système est simplement indéterminé

$$\boxed{S = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}, \lambda, -\lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Int. géométrique : comme pour $a=0$ avec

$\alpha \equiv x+y+z = 1/2$

$\beta \equiv x+3y+3z = \frac{1}{2}$

$\alpha \cap \beta = d$ avec $d \equiv \begin{cases} x = 1/2 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

3/ Si $a \neq 0$ et $a \neq \frac{1}{2}$ le système est impossible

$$\boxed{S = \emptyset}$$

exemples * si $a=1$ $\begin{cases} x = 1 & (1) \\ x + 2y + 2z = 0 & (2) \\ x + y + z = 0 & (3) \end{cases}$

de (3) : $y+z = -1$
de (2) : $2y+2z = -1$ éq. incompatibles.

* si $a=-1$ $\begin{cases} -x + 2y + 2z = 1 & (1) \\ -x = -2 \rightarrow x = 2 & (2) \\ x+y+z = 2 & (3) \end{cases}$

de (1) : $2y+2z = 3$
de (3) : $y+z = 0$ incompatibles.

Autre façon de travailler : élimine l'inconnue x deux fois de suite.

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 & (1) \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 & (2) \\ x+y+z = 1-a & (3) \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ faire $\begin{cases} (2) - a.(3) \\ (1) - (2) \end{cases} \longrightarrow$

$$(2) \quad ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2$$

$$a \times (3) \quad ax + ay + az = a - a^2$$

$$(-) \quad : \quad y + z = 0 \quad (4)$$

$$(1)-(2) : \quad -2ay - 2az = 2a^2 - a$$

$$: \quad 2a(y+z) = a(1-2a) \quad (5)$$

De (4) dans (5) : $\quad 0 = a.(1-2a)$

Il faut donc que $a = 0$ ou $a = 1/2$

* Si $a \neq 0$ et $a \neq \frac{1}{2}$: système impossible

* Si $a = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$: Voir solutions de la $1^{ère}$ méthode.

---

(4) Résoudre $\quad 4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x}$

$$4^x + (2^2)^x = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}}$$

$$2.4^x = 3^x.\left(3^{-\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{2}{\sqrt{3}} \longrightarrow x = 1/2 \qquad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

---

(5) Résoudre $\quad iz^2 - (1+i)z = 2(i-1)$ dans $\mathbb{C}$.

$$iz^2 - (1+i)z + 2(1-i) = 0$$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4.i.2.(1-i)$$

$$= \cancel{1} + 2i + \cancel{i^2} - 8i + 8i^2 = -8 - 6i$$

Racines carrés de $-8-6i$? (équation binôme)

$\longrightarrow$

$(a+bi)^2 = -8-6i$

$a^2 + 2abi - b^2 = -8-6i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ ab = -3 \end{cases}$

$\rightarrow \quad a^2 - \dfrac{9}{a^2} = -8 \quad \rightarrow \quad a^4 + 8a^2 - 9 = 0$

$\rho = 64 + 36 = 100$

$a^2 = \dfrac{-8 \pm 10}{2} \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ \cancel{a^2 = -9} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \mp 3 \end{cases}$

Les racines carrés de Δ sont : $1-3i$ et $-1+3i$.

Donc : $\quad z = \dfrac{1+i \pm (1-3i)}{2i}$

$z_1 = \dfrac{1+i+1-3i}{2i} = \dfrac{2-2i}{2i} = \dfrac{(1-i)}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i-i^2}{i^2} = -1-i$

$z_2 = \dfrac{1+i-1+3i}{2i} = 2$

$$\boxed{S = \{-1-i, 2\}}$$

---

(6) $\quad \sqrt{\dfrac{6x-11}{3x-2}} \leqslant \dfrac{1}{x}$

Conditions : 1°/ $\dfrac{1}{x} \geqslant 0 \rightarrow x > 0$

2°/ $\dfrac{6x-11}{3x-2} \geqslant 0$

x		$2/3$		$11/6$	
$6x-11$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
N/D	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

Domaine de l'inéquation :

$$\left]0, \frac{2}{3}\right[\cup \left[\frac{11}{6}, +\infty\right[$$

Elevons les deux membres de l'inéquation au carré, en supposant que nous sommes dans le domaine de l'inéquation.

$$\frac{6x-11}{3x-2} \leq \frac{1}{x^2} \iff \frac{6x-11}{3x-2} - \frac{1}{x^2} \leq 0$$

$\longrightarrow$

$$\iff \frac{6x^3 - 11x^2 - 3x + 2}{(3x-2)\cdot x^2} \leq 0 \qquad \left(\frac{n(x)}{d(x)} \leq 0\right)$$

Le numérateur s'annule pour $x = 2$

	6	−11	−3	2
2		12	2	−2
	6	1	−1	0

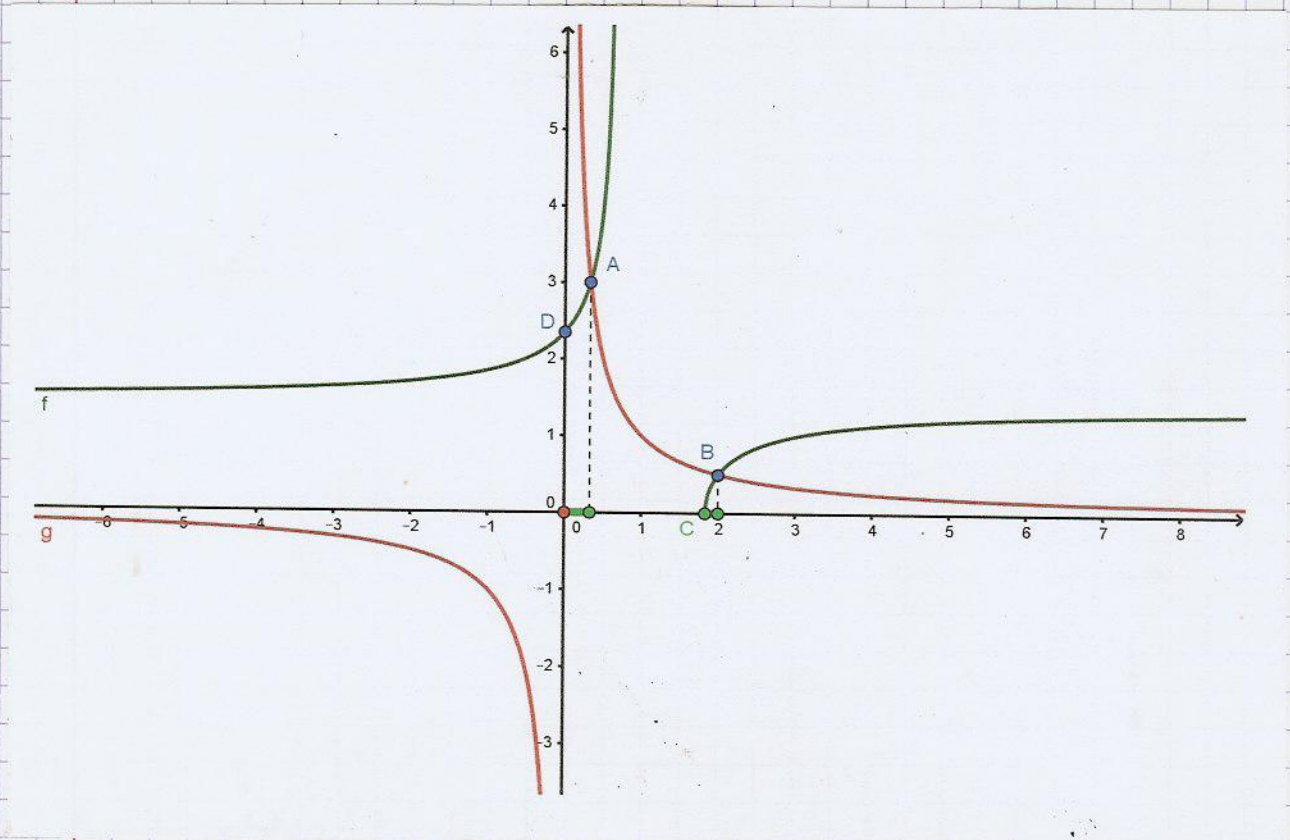
$$n(x) = (x-2)\underbrace{(6x^2 + x - 1)}$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{12} \quad \begin{cases} 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$$

x		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{11}{6}$		2	
$x-2$			−	−	−	−		−		0	+
$6x^2+x-1$			−	0	+	+		+		+	+
$(3x-2)\cdot x^2$			−	−	−	0		+		+	+
$\frac{n(x)}{d(x)}$			−	0	+			−		0	+

$$S = \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{11}{6}, 2\right]$$



$$f(x) = \sqrt{\frac{6x-11}{3x-2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) \leq g(x)$$

$$\iff 0 < x \leq \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{11}{6} \leq x \leq 2$$

III. TRIGONOMÉTRIE et CALCUL NUMÉRIQUE

① Résoudre $1+\sin x+\sin 2x+\sin 3x$

$$= \cos x - \underbrace{\cos 2x}_{2\cos^2 x - 1} + \cos 3x$$

$$\cancel{1}+\sin x+\sin 2x+\sin 3x-\cos x+2\cos^2 x-\cancel{1}-\cos 3x=0$$

$$2.\sin 2x.\cos x + 2.\sin x.\cos x - 2.\cos 2x.\cos x + 2\cos^2 x=0$$

$$\cos x.\left(\cancel{2}.\sin 2x+\cancel{2}.\sin x-\cancel{2}.\cos 2x+\cancel{2}\cos x\right)=0$$

$$\cos x.\left[(\sin 2x+\sin x)-(\cos 2x-\cos x)\right]=0$$

$$\cos x.\left(2.\sin\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}+2.\sin\frac{3x}{2}.\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

$$2.\cos x.\sin\frac{3x}{2}.\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

$\cos x = 0$ ou $\sin\frac{3x}{2}=0$ ou $\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\qquad \frac{3x}{2}=k\pi$ $\qquad$ (*) $\tan\frac{x}{2}=-1$

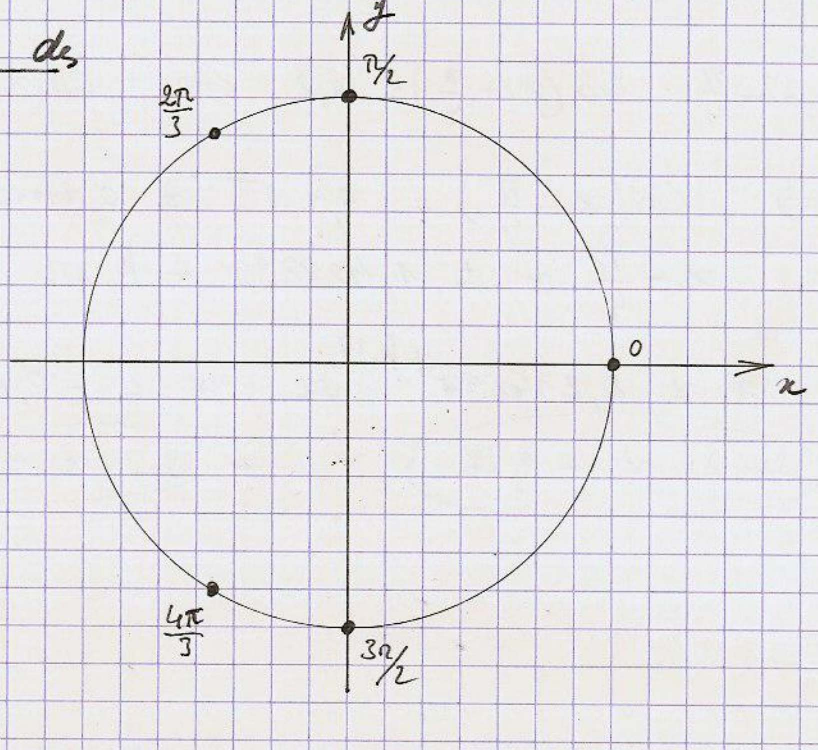
$x=\frac{2k\pi}{3}$ $\qquad \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

$x=-\frac{\pi}{2}+k.2\pi$

⚠ Condition :

$\cos\frac{x}{2}\neq 0 \iff \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \iff x\neq\pi+k2\pi$

Représentation des solutions.



(2) Sachant que $\sin x - \cos x = 0,2$

(3)? calculer $\sin 2x$.

$$\sin 2x = 2 . \sin x . \cos x = \dots ?$$

<u>Cherchons $\cos x$</u>

$$\sin x = 0,2 + \cos x$$

$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 0,2 + \cos x$$

$$1 - \cos^2 x = 0,04 + 0,4 . \cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x + 0,4 . \cos x - 0,96 = 0$$

$$\Delta = \frac{16}{100} + 8 . \frac{96}{100} = \frac{784}{100} = \left(\frac{28}{10}\right)^2$$

$$\cos x = \frac{-0,4 \pm 2,8}{4} \quad \begin{cases} \cos x = 0,6 \\ \cos x = -0,8 \end{cases}$$

Si $\cos x = 0,6 \longrightarrow \sin x = 0,8$

Si $\cos x = -0,8 \longrightarrow \sin x = -0,6$

Dans les deux cas : $\sin 2x = 2 \times 0,6 \times 0,8 = 0,96$.

<u>Autre façon</u> $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0,2$

$$\longrightarrow \quad 2 . \sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} . \cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} = 0,2$$

$$2 . \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) . \cos\frac{\pi}{4} = 0,2$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{0,2}{2\,\sqrt{2}/2} = 0,1 . \sqrt{2}$$

$\longrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} \simeq 0,141897$ ou $x - \frac{\pi}{4} \simeq 2,999696$

$\longrightarrow \quad x \simeq 0,927295$ ou $x \simeq 3,785094$

$\sin 2x = 0,96$ $\qquad$ $\sin 2x = 0,96$.

<u>Et enfin, quand on ouvre les yeux ...</u>

$$(\sin x - \cos x)^2 = 0,04$$

$$\underbrace{\sin^2 x} - 2 . \sin x . \cos x + \underbrace{\cos^2 x} = 0,04$$

$$1 - 0,04 = 2 . \sin x \cos x \longrightarrow 0,96 = \sin 2x \quad !!$$

(4) $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ et $ab < 1$

a) $\underbrace{\arctan a + \arctan \frac{1}{a}}_{f(a)} \overset{?}{=} \frac{\pi}{2}$

$$f'(a) = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}} \cdot \left(\frac{-1}{a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+a^2} + \frac{-1}{\frac{(a^2+1)}{\cancel{a^2}} \cdot \cancel{a^2}} = 0 \quad \cancel{\frac{a^2 \ldots a^2}{(1+a^2) \cdot a^2}}$$

Donc $f(a)$ est une fct constante.

Cherchons une valeur particulière :

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

b) $\underbrace{\arctan a + \arctan b}_{E} < \frac{\pi}{2}$

$$\tan(E) = \frac{\tan(\arctan a) + \tan(\arctan b)}{1 - \tan(\arctan a) \cdot \tan(\arctan b)}$$

$$= \frac{a+b}{1-ab} > 0 \quad \left(\text{car } \begin{matrix} a+b>0 \\ 1-ab>0 \end{matrix}\right)$$

Donc : $0 + k\pi < E < \frac{\pi}{2} + k\pi$. $(*)$

mais $-\frac{\pi}{2} < \arctan a < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \arctan b < \frac{\pi}{2}$

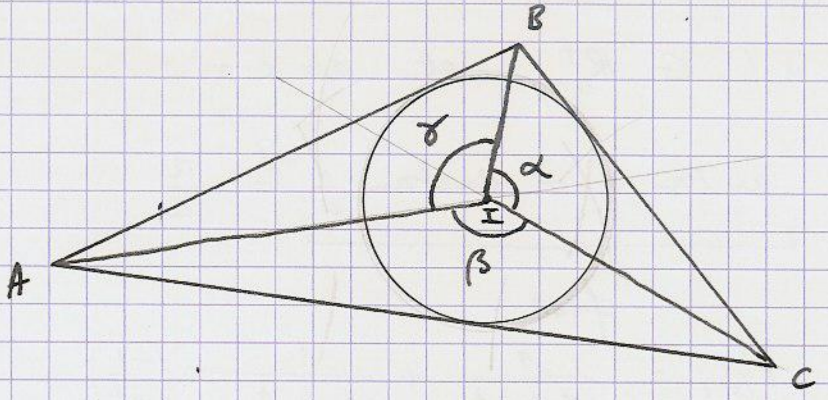
$-\pi < \arctan a + \arctan b < \pi$

Donc, dans $(*)$, seule $k=0$ est acceptable.

$\longrightarrow$ $\boxed{0 < E < \frac{\pi}{2}}$

c) $\tan(E) = \frac{a+b}{1-ab} \longrightarrow E = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$

5



I est l'intersection des bissectrices du Δ.

$$4.\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma \overset{?}{=} \sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}$$

$\underline{2^{e}\text{ membre}}$ $= 2.\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}.\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} + \underbrace{\sin\left[\pi-(\hat{A}+\hat{B})\right]}_{\sin(\hat{A}+\hat{B})}$

$$= 2.\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}.\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} + 2.\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}.\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

$$= 2.\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}.\left(\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}+\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)$$

$$= 2.\underbrace{\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}_{\sin\left(\frac{\pi-\hat{C}}{2}\right)}.\,2.\cos\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}$$

$$= 4.\cos\frac{\hat{C}}{2}.\cos\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}$$

$\underline{1^{er}\text{ membre}}$ $= 4.\sin\left[\pi-\frac{(\hat{B}+\hat{C})}{2}\right].\sin\left[\pi-\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right].\sin\left[\pi-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right]$

$$= 4.\sin\left(\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}\right).\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}\right).\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}\right)$$

$$= 4.\underbrace{\sin\left(\cancel{\frac{\hat{B}}{2}}+\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}-\cancel{\frac{\hat{B}}{2}}\right)}.\underbrace{\sin\left(\cancel{\frac{\hat{A}}{2}}+\frac{\pi}{2}-\cancel{\frac{\hat{A}}{2}}-\frac{\hat{B}}{2}\right)}.\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}\right)\right)}$$

$$= 4.\cos\frac{\hat{A}}{2}\;.\;\cos\frac{\hat{B}}{2}\;.\;\underbrace{\cos\left(\frac{\pi-(\hat{A}+\hat{B})}{2}\right)}_{\cos\frac{\hat{C}}{2}}$$

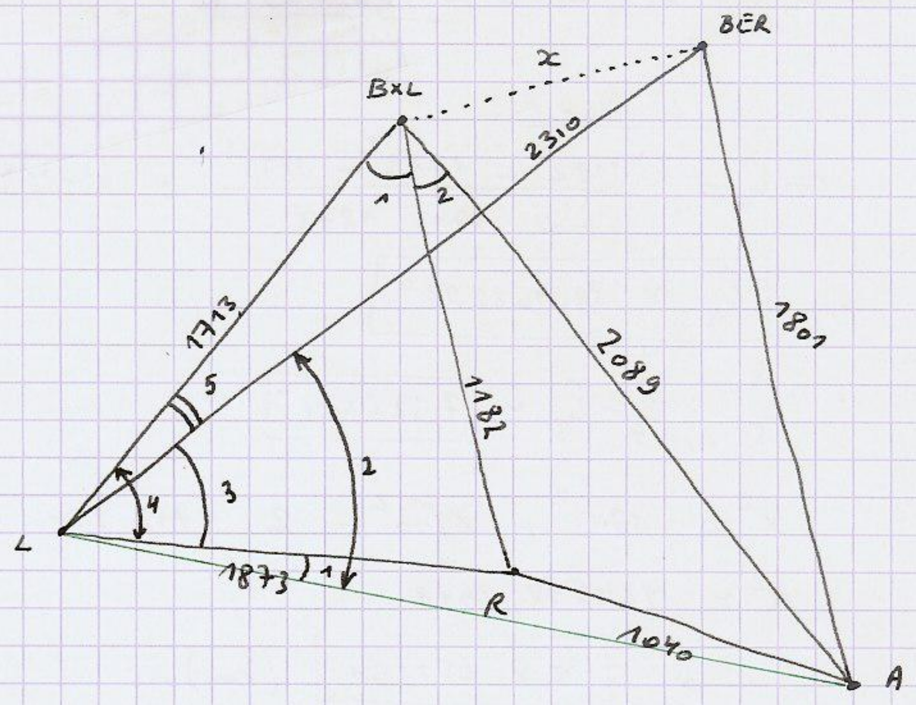
$\underline{\text{Remarque}}$ le 1^{er} membre peut se transformer plus rapidement si on sait que

$$\left|\begin{array}{l}\alpha = 90^\circ+\hat{A}/2\\ \beta = 90^\circ+\hat{B}/2\\ \gamma = 90^\circ+\hat{C}/2\end{array}\right.$$

cqfd.

(propriété démontrée dans le cours de 6e, lieux géométriques, page 2).

6



x = distance Berlin - Bruxelles.

1/ $\cos \widehat{BXL}_1 = \dfrac{1873^2 - 1713^2 - 1182^2}{-2 \cdot 1713 \cdot 1182}$ (triangle L-BXL-R)

$\simeq 0{,}2033 \longrightarrow \boxed{\widehat{BXL}_1 \simeq 78{,}268639°}$

2/ Dans R-BXL-A : $\cos \widehat{BXL}_2 = \dfrac{1040^2 - 1182^2 - 2089^2}{-2 \cdot 1182 \cdot 2089} \simeq 0{,}9476$

$\longrightarrow \boxed{\widehat{BXL}_2 \simeq 18{,}636730°}$

3/ Dans L-BXL-A :

$|LA|^2 = 1713^2 + 2089^2 - 2 \cdot 1713 \cdot 2089 \cdot \cos(\overbrace{\widehat{BXL}_1 + \widehat{BXL}_2}^{96{,}905369°})$

$\longrightarrow \boxed{|LA| \simeq 2856{,}355159 \text{ (km)}}$

4/ Dans L-R-A : $\cos \hat{L}_1 = \dfrac{1040^2 - 1873^2 - |LA|^2}{-2 \cdot 1873 \cdot |LA|} \simeq 0{,}9893$

$\longrightarrow \boxed{\hat{L}_1 \simeq 8{,}393678°}$

5/ Dans L-BER-A : $\cos \hat{L}_2 = \dfrac{1801^2 - 2310^2 - |LA|^2}{-2 \cdot 2310 \cdot |LA|} \simeq 0{,}7768$

$\longrightarrow \boxed{\hat{L}_2 \simeq 39{,}029207°}$

6°/ $\hat{L}_3 = \hat{L}_2 - \hat{L}_1 \simeq \boxed{30{,}635529°}$

7°/ <u>Dans L-BxL-R</u>

$$\cos \hat{L}_4 = \frac{1182^2 - 1713^2 - 1873^2}{-2 \cdot 1713 \cdot 1873} \simeq 0{,}7863$$

$\rightarrow \boxed{\hat{L}_4 \simeq 38{,}162293°}$

8°/ $\hat{L}_5 = \hat{L}_4 - \hat{L}_3 \simeq \boxed{7{,}526764°}$

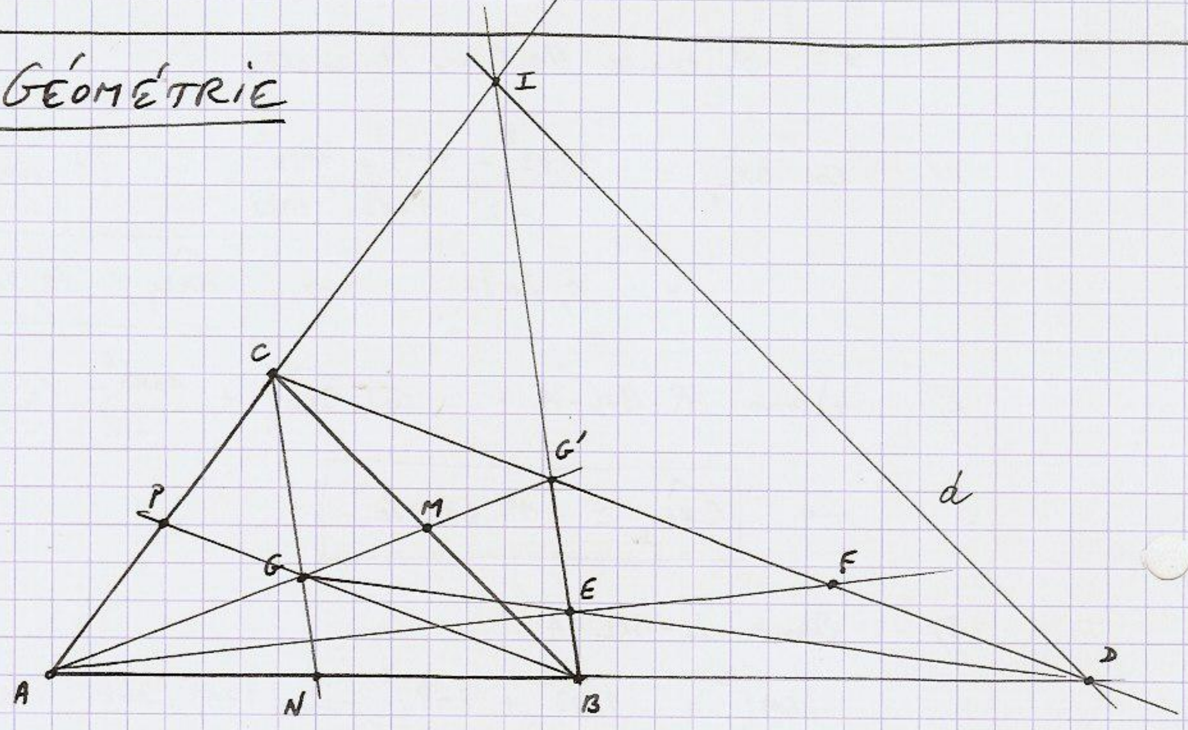
9°/ $x^2 = 1713^2 + 2310^2 - 2 \cdot 1713 \cdot 2310 \cdot \cos \hat{L}_5$

$x^2 \simeq 424598{,}2649$

$\longrightarrow \boxed{x \simeq 651{,}61}$ (km).

IV. <u>GÉOMÉTRIE</u>

1



<u>Hypothèse</u>

Triangle ABC.
M milieu de [BC]
G centre de gravité de ABC
G' symétrique de G par rapport à M

$AB \cap CG' = \{D\}$
$DG \cap BG' = \{E\}$
$AE \cap CD = \{F\}$

$d \parallel BC$ et $d \ni D$

<u>Thèse</u>

1. AC, BG' et d sont concourantes
2. $|DF| = |FG'| = |G'C|$

Démonstration de ①

1/ Les segments $[GG']$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu M. Donc, $GBG'C$ est un parallélogramme.

2/ CG est une médiane qui coupe $[AB]$ en son milieu N. Comme $BG' \parallel CG = CN$, BG' coupe AC en un point I tel que C est le milieu de $[AI]$ (par le thm de Thalès).

3/ BG est une médiane qui coupe $[AC]$ en son milieu P. Comme $BG = BP \parallel CG'$, CG' coupe AB en un point D tel que B est le milieu de $[AD]$ (par le thm de Thalès).

4/ Dans le triangle AID, comme B et C sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[AI]$, le côté DI est parallèle à BC et donc $DI = d$.

Conclusion : le point I est commun à AC $(= AI)$ et d.

Démonstration de ②

1/ G est le milieu de $[AG']$.

En effet $|AG| = 2|GM|$ (car G centre de gravité du Δ ABC)
$|GG'| = 2|GM|$ (car $GBG'C$ parallélo.)

Donc, DG est une médiane du Δ DAG'.

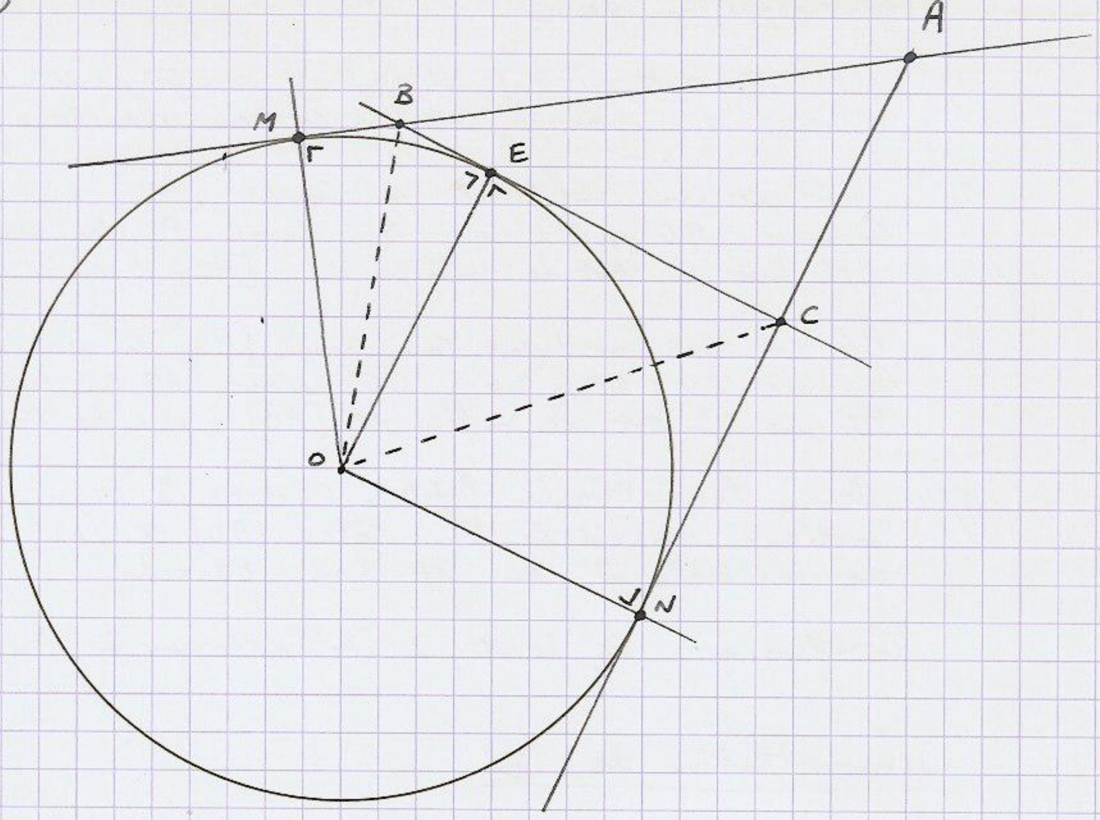
2/ B étant le milieu de $[AD]$, $G'B$ est une autre médiane du Δ DAG'.

3/ Donc, comme E est l'intersection des médianes DG et $G'B$, E est le centre de gravité du Δ DAG' et la droite AE est la 3^e médiane de ce triangle $\rightarrow$ F est le milieu de $[G'D]$

4/ $|G'F| = |FD|$ et comme G' est le centre de gravité du Δ AID, on a $|CG'| = \frac{1}{2}|G'D| = |G'F|$.

Donc, $|G'F| = |FD| = |CG'|$.

(2)



Périmètre du triangle ABC : p.

$$p = |AB| + |BC| + |CA|$$
$$= \left(|AM| - |BM|\right) + \left(|BE| + |EC|\right) + \left(|AN| - |CN|\right)$$

Or, $|BE| = |BM|$ car les triangles rectangles OMB et OEB sont isométriques (vu que $|OM| = |OE|$ et $[OB]$ est commun)

Et aussi : $|EC| = |CN|$ car les triangles rectangles OEC et ONC sont isométriques (vu que ...)

Donc :

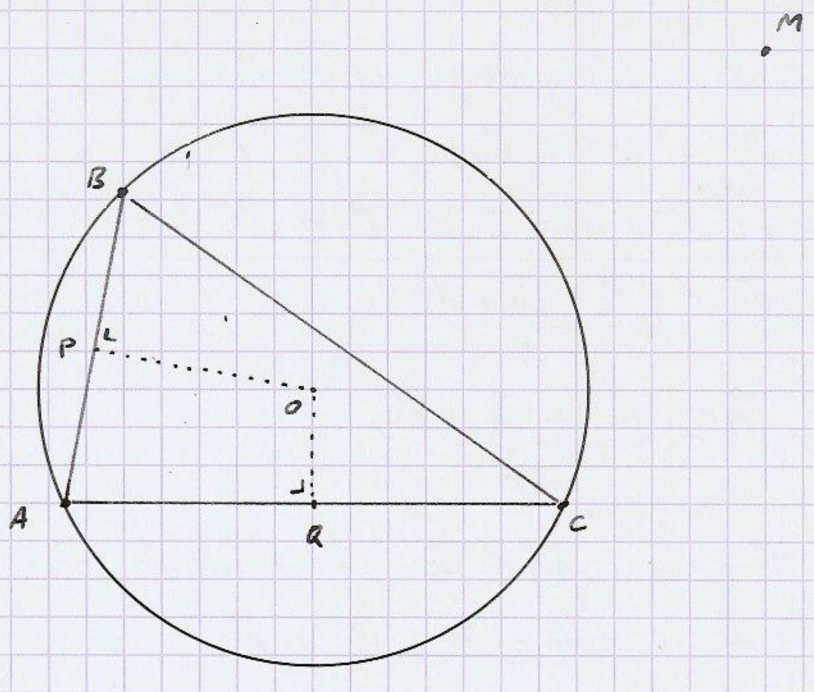
$$p = |AM| - \cancel{|BM|} + \cancel{|BM|} + \cancel{|EC|} + |AN| - \cancel{|EC|}$$
$$= |AM| + |AN|$$

$$\boxed{p = 2\,|AM|}$$

car $|AN| = |AM|$

(les triangles rectangles OMA et ONA étant isométriques vu que $|OM| = |ON|$ et $[OA]$ commun).

3



Hypothèse : O centre du cercle circonscrit au triangle ABC

M point quelconque du plan

Thèse : $\vec{OM} \perp (MA^2 . \vec{BC} + MB^2 . \vec{CA} + MC^2 . \vec{AB})$

Démonstration

* Voyons d'abord sur un cas particulier : si $M = A$.

La thèse devient $\vec{OA} \perp (AB^2 . \vec{CA} + AC^2 . \vec{AB})$

$$\vec{OA} \odot (AB^2 . \vec{CA} + AC^2 . \vec{AB}) = AB^2 . \underbrace{\vec{OA} \odot \vec{CA}} + AC^2 . \underbrace{\vec{OA} \odot \vec{AB}}$$

$$= AB^2 . QA . 2QA + AC^2 (- AP . 2AP)$$

$$= 4AP^2 . 2QA^2 - 4QA^2 . 2AP^2 = 0$$

(prouvé ds le cas de figure ci-dessus).

Généralisons .

$$\vec{OM} \odot (MA^2 . \vec{BC} + MB^2 . \vec{CA} + \vec{MC}^2 . \vec{AB}) \stackrel{?}{=} 0$$

1er membre $= \underbrace{MA^2} . \vec{OM} \odot \vec{BC} + \underbrace{MB^2} . \vec{OM} \odot \vec{CA} + \underbrace{MC^2} . \vec{OM} \odot \vec{AB}$

$\vec{MA}^2 = (\vec{MO} + \vec{OA})^2$

$$(\vec{MA}^2 . \vec{OM} \odot \vec{BC})$$

$$\to (MO^2 + OA^2 + 2\,\vec{MO} \odot \vec{OA}) . \vec{OM} \odot \vec{BC}$$

$$(MB^2 . \vec{OM} \odot \vec{CA}) \to (MO^2 + \cancel{OB^2}^{\,OA^2} + 2\,\vec{MO} \odot \vec{OB}) . \vec{OM} \odot \vec{CA}$$

$$(MC^2 . \vec{OM} \odot \vec{AB}) \; + \to (MO^2 + \cancel{OC^2}^{\,AB^2} + 2\,\vec{MO} \odot \vec{OC}) . \vec{OM} \odot \vec{AB}$$

car $OA^2 = OB^2 = OC^2$ (rayon du cercle circonscrit, au carré)

$$MO^2 . \vec{OM} \odot (\underbrace{\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}}_{\vec{0}})$$

$$+ \; OA^2 . \vec{OM} \odot (\underbrace{\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}}_{\vec{0}})$$

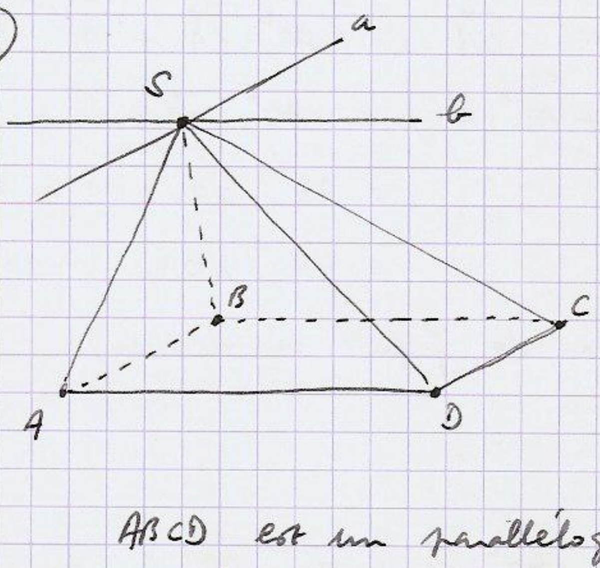
$$+ \; 2 . \vec{MO} \odot \vec{OA} . \vec{OM} \odot \vec{BC} + 2\,\vec{MO} \odot \vec{OB} . \vec{OM} \odot \vec{CA}$$
$$+ \; 2 . \vec{MO} \odot \vec{OC} . \vec{OM} \odot \vec{AB}$$

$$= 2 . \vec{MO} \odot \vec{OA} . \vec{OM} \odot (\vec{BO} + \vec{OC}) + 2 . \vec{MO} \odot \vec{OB} . \vec{OM} \odot (\vec{CO} + \vec{OA})$$
$$+ \; 2 . \vec{MO} \odot \vec{OC} . \vec{OM} \odot (\vec{AO} + \vec{OB})$$

$$= 2 . \vec{MO} \odot \vec{OA} . \vec{OM} \odot \vec{BO} + 2 . \vec{MO} \odot \vec{OA} . \vec{OM} \odot \vec{OC}$$
$$+ \; 2 . \vec{MO} \odot \vec{OB} . \vec{OM} \odot \vec{CO} + 2 . \vec{MO} \odot \vec{OB} . \vec{OM} \odot \vec{OA}$$
$$+ \; 2 . \vec{MO} \odot \vec{OC} . \vec{OM} \odot \vec{AO} + 2 . \vec{MO} \odot \vec{OC} . \vec{OM} \odot \vec{OB}$$

$$= 0 \, !$$

4



Soit $SAB \cap SCD = a$

$SBC \cap SAD = b$

$ABCD$ est un parallélogramme

$$\iff (ABCD \parallel a) \text{ et } (ABCD \parallel b)$$

1ère partie ($\Rightarrow$)

Montrons que si ABCD est un parallélogramme

: alors ABCD // a et ABCD // b

1/ ABCD est un parallélo. $\Rightarrow$ AB // CD

or $\begin{cases} AB \subset SAB \\ CD \subset SCD \end{cases}$ donc AB et CD sont parallèles à la dte d'intersection de SAB et SCD (par le théorème du toit).

$\Rightarrow$ a // AB // CD. (1)

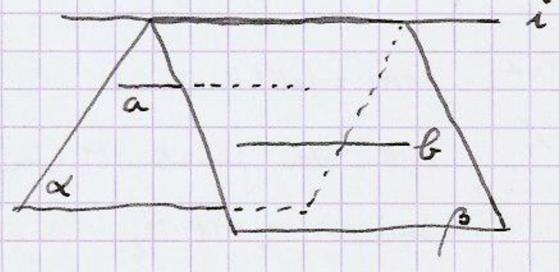
2/ ABCD est un parallélo. $\Rightarrow$ BC // AD

or $\begin{cases} BC \subset SBC \\ AD \subset SAD \end{cases}$ donc BC et AD sont // ... b

b // BC // AD (2)

3/ d'après (1) : a // ABCD (car a // AB $\subset$ ABCD)
(2) : b // ABCD (car b // BC $\subset$ ABCD).

Le "théorème du toit"



Hypothèse $\alpha \cap \beta = i$
$a \subset \alpha$
$b \subset \beta$
$a \parallel b$

Thèse $a \parallel i$
$b \parallel i$

Démonstration (par l'absurde)

1/ Supposons $i \not\parallel a$ et que $i \cap a = \{A\}$.

Or, $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \beta$ ← CONTRADICTOIRE

Mais $A \in i \Rightarrow A \in \beta$
$A \in i \Rightarrow A \in a$ } A serait commun à a et β

$\Rightarrow$ $i \parallel a$

2/ Supposons $i \not\parallel b$ et que $i \cap \beta = \{B\}$
Or, $b \parallel a \Rightarrow b \parallel \alpha$ ← CONTRADICTOIRE
Mais $B \in i \Rightarrow B \in \alpha$
$B \in i \Rightarrow B \in b$ } B commun à α et b $\Rightarrow$ $i \parallel b$

$2^{\text{ème}}$ partie ($\Leftarrow$)

Montrons que, si $ABCD \parallel a$ et $ABCD \parallel b$

alors $ABCD$ est un parallélogramme.

1/ Montrons que $AB \parallel CD$.

Supposons que non : $AB \cap CD = \{I\}$ (*)

Ce point I appartiendrait à

- SAB
- SCD
- $ABCD$

$\left.\begin{array}{l} SAB \\ SCD \end{array}\right\}$ donc à $SAB \cap SCD = a$

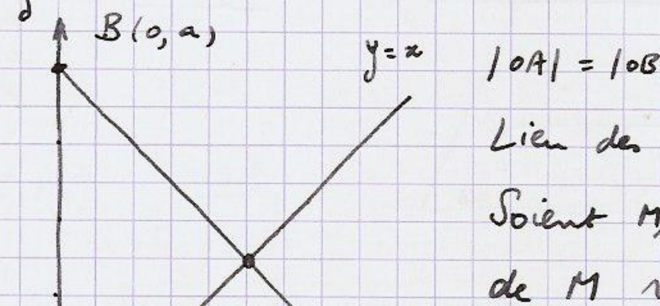
Mais alors I appartiendrait à la fois à la droite a et au plan $ABCD$, alors que $ABCD \parallel a$.

Donc l'hypothèse (*) est à rejeter et $AB \parallel CD$.

2/ Par un raisonnement analogue, on montre que $AD \parallel BC$.

3/ $ABCD$ est un parallélogramme (d'après 1/ et 2/).

5



$|OA| = |OB| = a$

Lieu des points $M(x_M, y_M)$?

Soient M_1 et M_2 les projections $\perp$ de M respectivement sur OA et sur OB

$\longrightarrow \begin{cases} M_1(x_M, 0) \\ M_2(0, y_M) \end{cases}$

Comme M_1 et M_2 doivent appartenir à un cercle $\mathscr{C}$

$\left\{\begin{array}{l}\text{centré en } O \\ \text{et de rayon } R\end{array}\right.$: $|OM_1| = |OM_2| = R = |x_M| = |y_M|$

Donc M appartient à la droite $y = x$

ou à la droite $y = -x$.

$\longrightarrow$

1^{er} cas : M a pour coordonnées (R, R).

Soit M_3 sa projection sur AB.

Le cercle $\mathcal{C}$ doit être tangent à AB en M_3 milieu de [AB]

et $|OM_3| = R \rightarrow x_{M_3} = y_{M_3} = \frac{1}{2}a$.

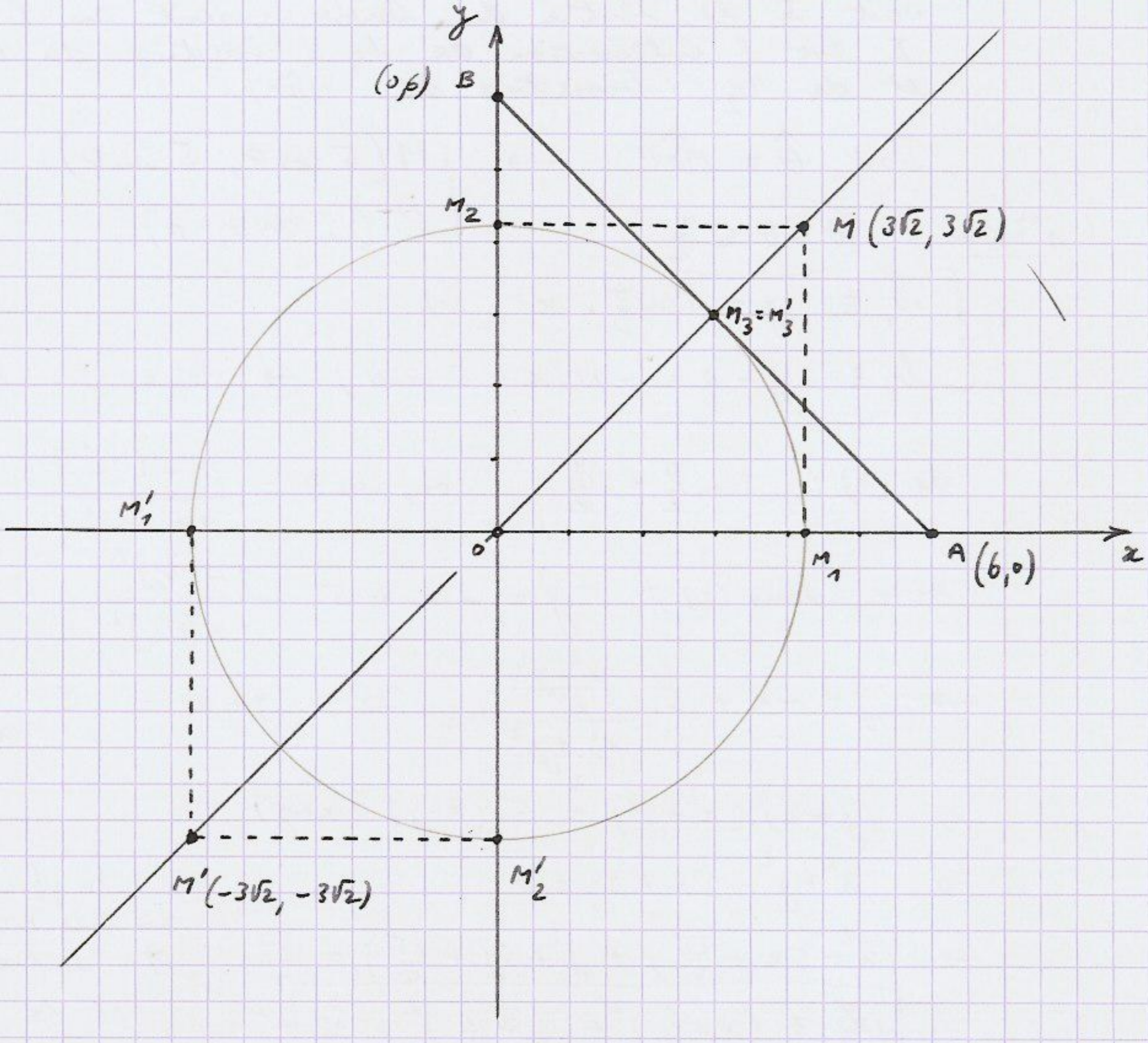
car $M_3\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = R \rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Finalement : $\boxed{M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \text{ ou } M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \;(*)}$

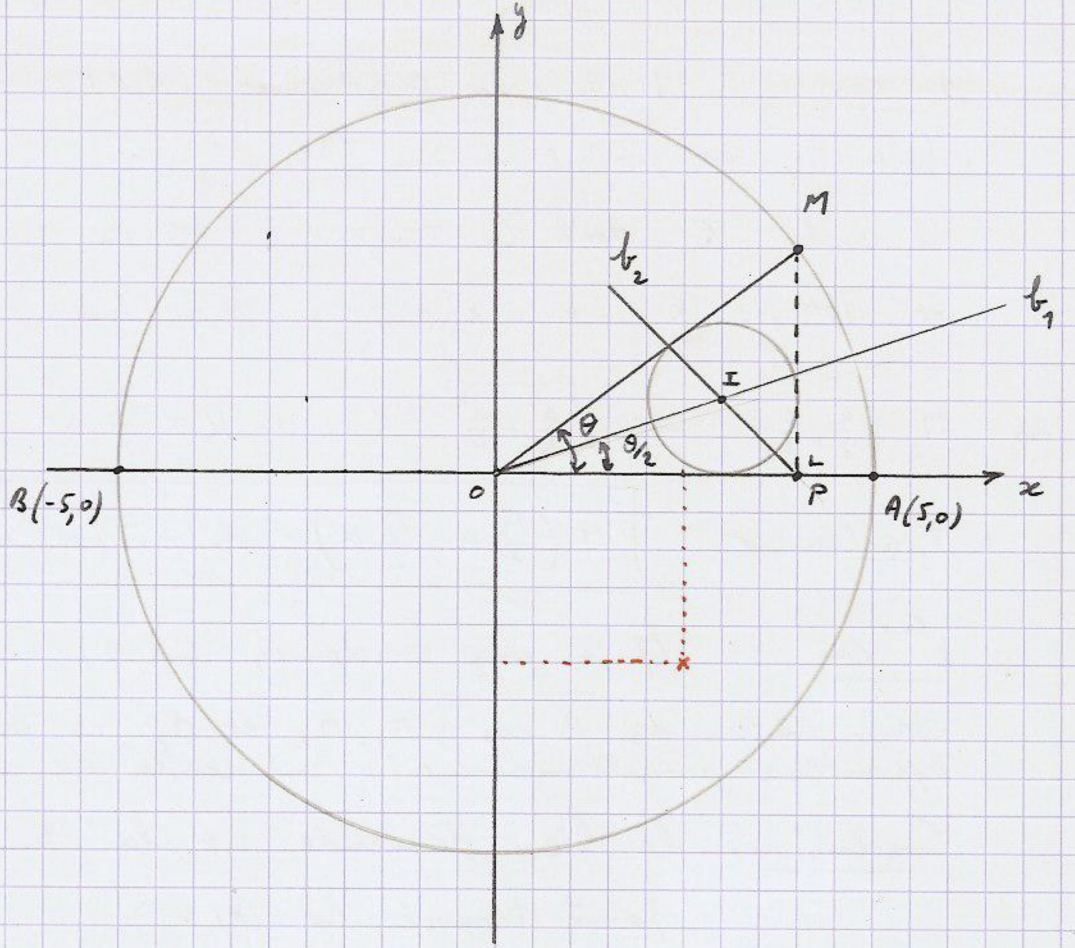
$2^{ème}$ cas : M a pour coordonnées $(-R, R)$ ou $(R, -R)$.

Dans aucun des 2 cas, M_1, M_2, et M_3 ne peuvent appartenir simultanément à un cercle de centre O.

Conclusion : le lieu demandé est la paire de points trouvée en $(*)$.



(6)



Soit I le centre du cercle inscrit au Δ OMP.
I est l'intersection de b_1 (bissectrice de $\widehat{OPM}$) et de b_2 (bissectrice de $\widehat{MOP}$).

Soit $\hat{\theta} = \widehat{MOP} \longrightarrow \begin{cases} M(5\cos\theta,\ 5\sin\theta) \\ P(5\cos\theta,\ 0) \end{cases}$

1^{er} cas : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} b_1 \equiv \quad y = \tan\frac{\theta}{2} \cdot x \quad (1) \\ b_2 \equiv \quad y - 0 = -1 \cdot (x - 5\cos\theta) \rightarrow b_2 \equiv y = -x + 5\cos\theta. \quad (2) \end{cases}$$

de (1) : $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{x}$ or, $\cos\theta = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$ (formules en $\tan\frac{\theta}{2}$)

Donc, dans (2) : $y = -x + 5 \cdot \dfrac{1 - (y/x)^2}{1 + (y/x)^2}$

$$\rightarrow y = -x + 5 \cdot \frac{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \rightarrow y + x = 5 \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow \cancel{(y+x)} \cdot (x^2 + y^2) = 5 \cdot (x - y) \cdot \cancel{(x+y)}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$$

$$\rightarrow \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 5y + \frac{25}{4}\right) = \frac{50}{4}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathcal{L}_1 \equiv \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}}$$

(1^{er} quadrant).

le lieu de I est un ~~arc~~ cercle de centre $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2^e quadrant : $\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$

$$\begin{cases} b_1 \equiv y = \tan\frac{\theta}{2}.x \\ b_2 \equiv y = x - 5\cos\theta \end{cases}$$

(pente de $b_2 = 1$ et non plus (-1)).

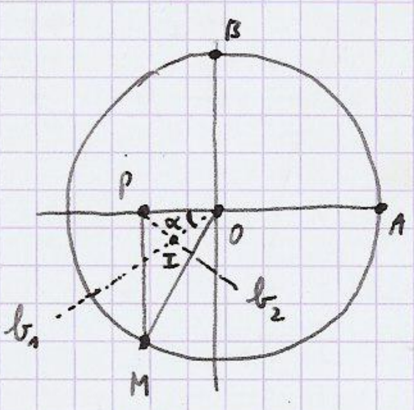
→ $y - x = 5.\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (calculs analogues)

→ $(y-x)(x^2+y^2) = 5(x-y)(x+y)$ → $-x^2-y^2 = 5x+5y$

→ $x^2+y^2+5x+5y=0$ → $\boxed{\mathcal{L}_2 \equiv \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}}$

Arc de cercle de centre $\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$ et $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$
limité au 2^e quadrant.

3^e quadrant : $\pi < \theta \le \frac{3\pi}{2}$



b_2 a pour pente (-1)

Angle formé par b_1 et Ox ?

$180° + \alpha$ avec $\alpha = \frac{\theta - 180°}{2}$

→ $180° + \frac{\theta}{2} - 90° = 90° + \frac{\theta}{2}$

→ $b_2 \equiv y = \tan\left(90° + \frac{\theta}{2}\right).x$

$b_2 \equiv y = -\cot\frac{\theta}{2}.x$ (3)

et $b_2 \equiv y = -x + 5\cos\theta$ (4)

de (3) : $\tan\frac{\theta}{2} = -\frac{x}{y}$

dans (4) : $y = -x + 5.\frac{1-\frac{x^2}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}$

$y = -x + 5.\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ → $\cancel{(y+x)}(y^2+x^2) = 5(y-x)\cancel{(y+x)}$

→ $x^2+y^2+5x-5y=0$ → $\boxed{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}}$

$\mathcal{L}_3$ est un arc de cercle du 3^e quadrant centré en $\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ et $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

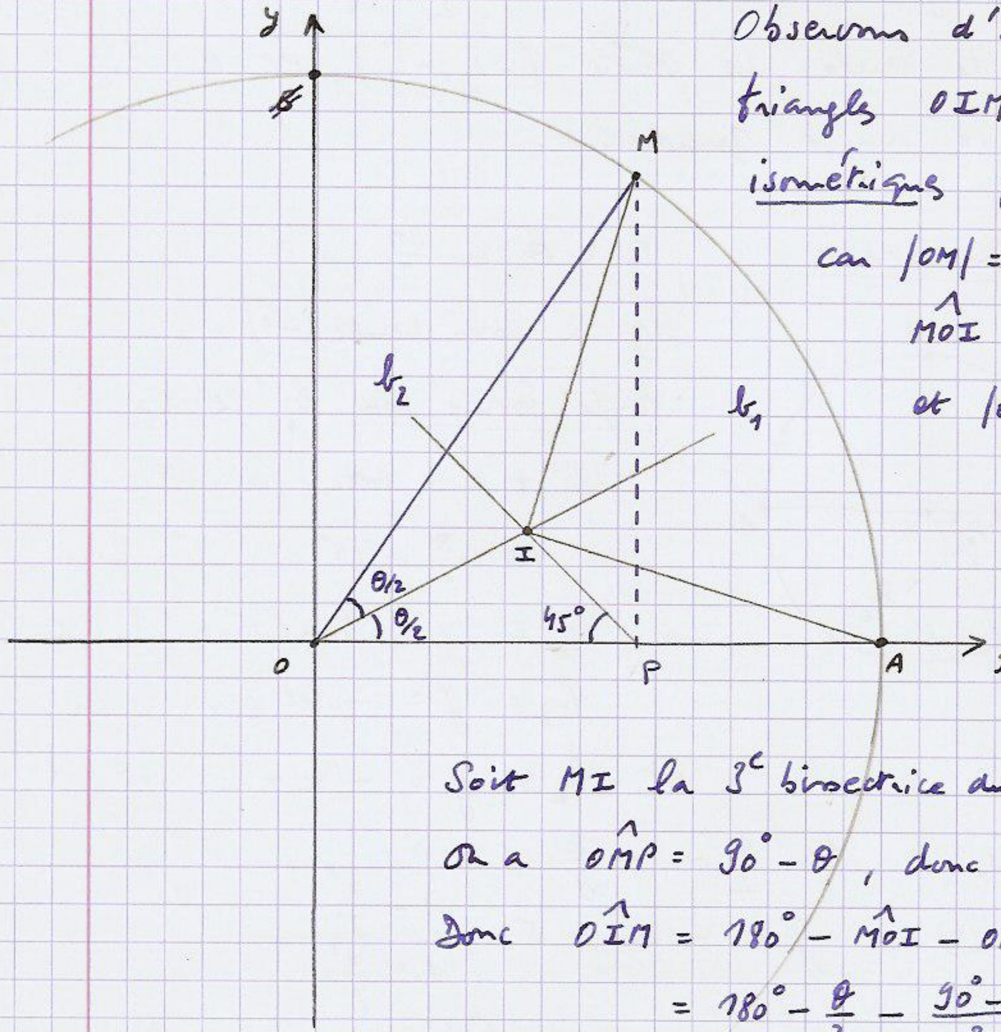
Il s'agit du symétrique par rapport à Ox de l'arc $\mathcal{L}_2$.

4^e quadrant : $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$

$\boxed{\mathcal{L}_4 \equiv \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}}$ (symétrique par rapport à Ox de $\mathcal{L}_1$).

Autre méthode

Après les calculs réalisés pour le 1^{er} quadrant, on comprend, pour des raisons de symétrie, que le lieu cherché sera la réunion de quatre arcs de cercle $\rightarrow$ cela nous met sur la voie des arcs capables !



Observons d'abord que les triangles OIM et OIA sont <u>isométriques</u> (situation "C-A-C" car $|OM| = |OA| =$ rayon cercle

$\widehat{MOI} = \widehat{AOI} = \frac{\theta}{2}$

et $|OI|$ est commun).

Soit MI la 3^e bissectrice du triangle OMP.

On a $\widehat{OMP} = 90° - \theta$, donc $\widehat{OMI} = \frac{90° - \theta}{2}$.

Donc $\widehat{OIM} = 180° - \widehat{MOI} - \widehat{OMI}$

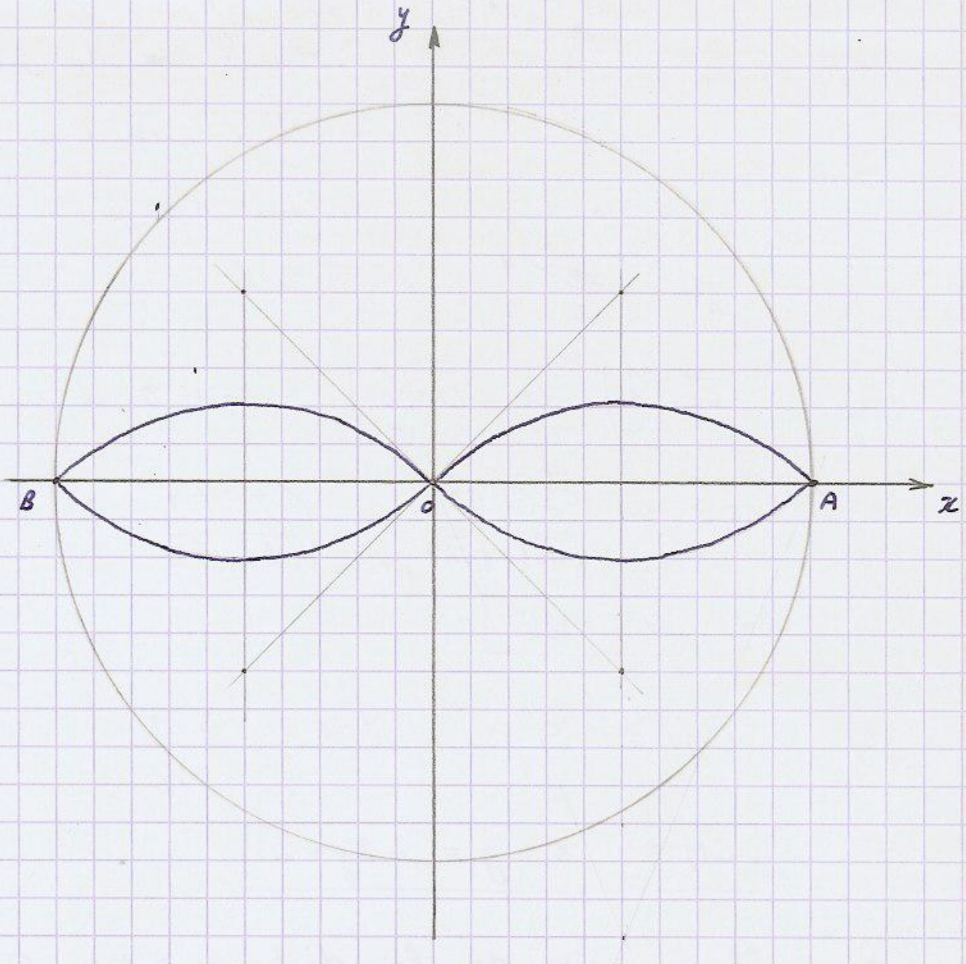
$= 180° - \frac{\theta}{2} - \frac{90° - \theta}{2}$

$= 180° - \frac{\theta}{2} - 45° + \frac{\theta}{2} = 135°$.

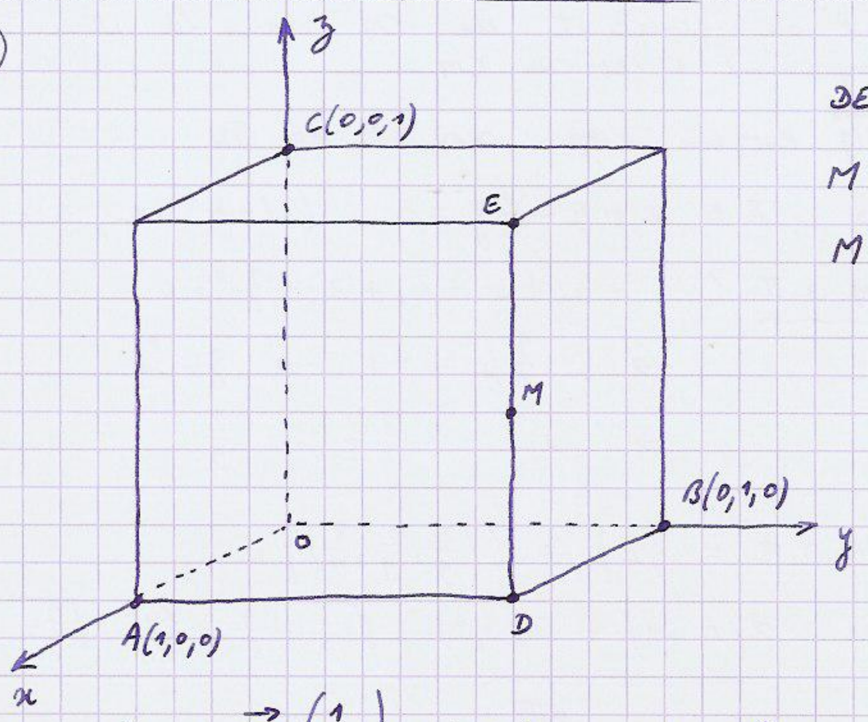
Et donc, dans le triangle OIA, nous avons $\widehat{OIA} = 135°$ aussi !

Donc, si l'angle $\widehat{OIA}$ est constant, cela signifie que le point I parcourt un arc de cercle de corde [OA] (arc capable de 135° sur la corde [OA]).

Donc, le lieu de I est la réunion des 4 arcs capables de 135° construits sur les cordes [OA] et [OB]. $\longrightarrow$



7



DE // Oz

M milieu de [DE]

$M(1,1,\frac{1}{2})$

a) $\vec{CM}\begin{pmatrix}1\\1\\-1/2\end{pmatrix}$ vecteur normal au plan α cherché

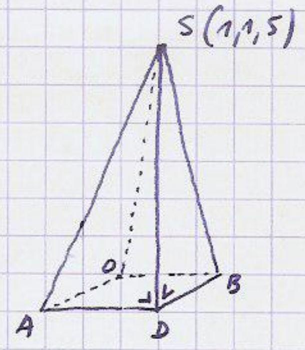
$\rightarrow$ $\boxed{\alpha \equiv x+y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}=0}$

car $(0,0,1) \in \alpha$

b) $DE \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ car DE est l'intersection des plans ADE $(x=1)$ et BDE $(y=1)$.

$\rightarrow$ remplaçons dans l'équation de α : $1+1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}=0 \rightarrow z=5 \longrightarrow$ $\boxed{DE \cap \alpha = \{S\} = \{(1,1,5)\}}$

c)



Volume de la pyramide

$= \frac{1}{3} \times$ surface de base $\times$ hauteur

$= \frac{1}{3} \times 1 \times 5 = \boxed{\frac{5}{3} \text{ (uv)}}$

d) $\vec{CS}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{CA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ soit θ l'angle /e/ $\vec{CS}$ et $\vec{CA}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{CS}\odot\vec{CA}}{\|\vec{CS}\|.\|\vec{CA}\|} = \frac{1+0-4}{\sqrt{18}.\sqrt{2}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$$

$\rightarrow \boxed{\theta = 120°}$

e) $CM \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1/2}$ $\quad \vec{CM}\begin{pmatrix}1\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

$\boxed{CM \equiv \quad x = y = -2z+2}$

f) Il s'agit de la distance entre O et le point de percée I de CM dans le plan π comprenant O et $\perp$ CM.

$\vec{CM}$ est un vecteur normal de π

$\rightarrow \pi \equiv x + y - \frac{1}{2}z = 0$ ($d=0$ car $O \in \pi$)

$CM \cap \pi$? $\quad -2z+2-2z+2-\frac{1}{2}z = 0$

$\rightarrow -\frac{9}{2}z = -4 \rightarrow z = 8/9$

$\rightarrow x = -2.\frac{8}{9}+2 = \frac{2}{9}$

$CM \cap \pi = \{I\} = \left\{\left(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\}$

Donc $d(O, CM) = d(O, I) = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{64}{81}} = \sqrt{\frac{72}{81}} = \frac{6\sqrt{2}}{9}$

$\boxed{d(O, CM) = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

g) Angle entre les vecteurs $\vec{MA}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\vec{MC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1/2\end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{MA}\odot\vec{MC}}{\|\vec{MA}\|.\|\vec{MC}\|} = \frac{0+1-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}.\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{3/4}{\frac{\sqrt{5}.3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\rightarrow \boxed{\varphi \simeq 63,4349°}$

Fin