Calculer la fonction dérivée première de

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\left(\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)' = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{1/2}\right]^2} \cdot \left[\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'$$

$$= \frac{1}{\frac{1+\cos x+1-\cos x}{\cancel{1+\cos x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin x.(1+\cos x)-(1-\cos x).(-\sin x)}{(1+\cos x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin x + \cancel{\sin x.\cos x} + \sin x - \cancel{\cos x.\sin x}}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+\cos x)^{1/2}}{(1-\cos x)^{1/2}} \cdot \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^1}$$

$$= \frac{\sin x}{2.(1-\cos x)^{1/2}.(1+\cos x)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sin x}{2.(1-\cos^2 x)^{1/2}} = \frac{\sin x}{2(\sin^2 x)^{1/2}} = \frac{\sin x}{2.|\sin x|}$$

Donc, si $\sin x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{2}$

si $\sin x < 0$: $f'(x) = -\frac{1}{2}$

Conclusion :

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } \pi + k.2\pi < x < 2\pi + k.2\pi \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 + k.2\pi < x < \pi + k.2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

Remarques

1°/ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k.2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ car il faut que $\cos x \neq -1$.

Notons que comme $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a aussi $1-\cos x \geq 0$ et $1+\cos x \geq 0$ et le radicand est toujours positif quand il existe.

2°/ Le résultat pour $f'(x)$ indique que $f(x)$ est une fonction du premier degré "par morceaux". Approfondissons...

À première vue, il n'est pas évident que $f(x)$ soit une fonction du 1er degré. Pour transformer son expression, utilisons les formules "en $\tan\frac{x}{2}$".

Nous savons que $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t = \tan\frac{x}{2}$.

Donc : $$f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}} = \arctan\sqrt{\dfrac{\frac{1+t^2-1+t^2}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{\cancel{1+t^2}}}}$$

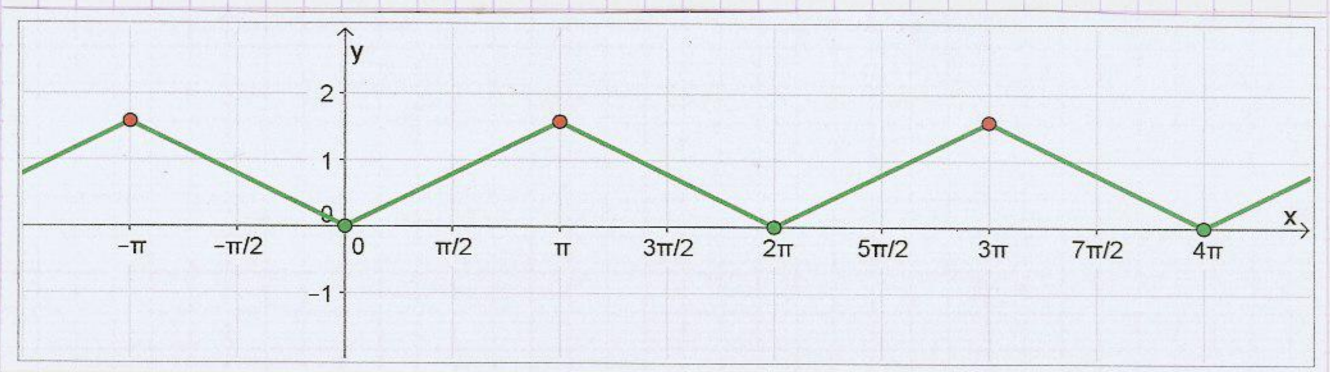
$$= \arctan\sqrt{\frac{2t^2}{2}} = \arctan|t|$$

$$= \arctan\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{x-k2\pi}{2} \text{ si } \tan\frac{x}{2} \leq 0 & (\text{si } -\pi+k.2\pi \leq x < k.2\pi) \\ \dfrac{x-k2\pi}{2} \text{ si } \tan\frac{x}{2} \geq 0 & (\text{si } 0+k2\pi \leq x < \pi+k.2\pi) \end{cases}$$

Nous retrouvons bien $f'(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{si } \pi+2k\pi < x < 2\pi+k2\pi \\ 1/2 & \text{si } k2\pi < x < \pi+k2\pi \end{cases}$

Pour les valeurs de x, les inégalités sont strictes car pour $x = k.2\pi$ et $x = \pi + k.2\pi$, la fonction n'est pas dérivable (il y a des points anguleux dans le graphique de f.).



Les "points rouges" ont pour coordonnées $(\pi + k.2\pi, \frac{\pi}{2})$ $k \in \mathbb{Z}$.

En effet, $\lim\limits_{x\to\pi+k.2\pi} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ (exercice).*

---

* $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) =$ "$\arctan\sqrt{\dfrac{1-(-1)}{1+(-1)}}$" $=$ "$\arctan\sqrt{\dfrac{2}{0^+}}$" $=$ "$\arctan(+\infty)$" $= \dfrac{\pi}{2}$.

On : $\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} =$ "$\sqrt{\dfrac{2}{0^+}}$" $= +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

Calculer la fonction dérivée première de

$$f(x) = \frac{1}{b^2+x}\cdot\left(2\sqrt{x^3}+3b^2\sqrt{x}\right) - 3b.\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{b}\right).$$

Dérivons d'abord le premier terme.

$$\left(\frac{2\sqrt{x^3}+3b^2\sqrt{x}}{b^2+x}\right)' = \frac{\left(2.\frac{3}{2}.x^{\frac{1}{2}}+3b^2.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right).(b^2+x)-\left(2x^{\frac{3}{2}}+3b^2.x^{\frac{1}{2}}\right).1}{(b^2+x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{3b^2x^{\frac{1}{2}}}+3x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}b^4x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}b^2.x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-\cancel{3b^2x^{\frac{1}{2}}}}{(b^2+x)^2}$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}b^4x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}b^2x^{\frac{1}{2}}}{(b^2+x)^2} \qquad (1)$$

Dérivons le second terme.

$$\left[3b.\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{b}\right)\right]' = 3\cancel{b}.\frac{1}{1+\frac{x}{b^2}}.\frac{1}{2\cancel{b}}.x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3b^2}{b^2+x}.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} \qquad (2)$$

Soustrayons : (1) − (2)

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}b^4x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}b^2x^{\frac{1}{2}}}{(b^2+x)^2} - \frac{3b^2x^{-\frac{1}{2}}}{2(b^2+x)}$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}+3b^4x^{-\frac{1}{2}}+3b^2x^{\frac{1}{2}}-3b^2x^{-\frac{1}{2}}.(b^2+x)}{2(b^2+x)^2}$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}+\cancel{3b^4x^{-\frac{1}{2}}}+\cancel{3b^2x^{\frac{1}{2}}}-\cancel{3b^4x^{-\frac{1}{2}}}-\cancel{3b^2x^{\frac{1}{2}}}}{2(b^2+x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2}x^{\frac{3}{2}}}{\cancel{2}(b^2+x)^2} = \frac{\sqrt{x^3}}{(b^2+x)^2}.$$