ULB – Examen d'admission 2002

ALGEBRE

1. Trouver un polynôme du 4^e degré $P(x)$ sachant qu'il est divisible par x et x^2+5, que le reste de sa division par $x-1$ vaut -30 et que le reste de sa division par $x-2$ vaut -54.

2. Déterminer toutes les valeurs réelles de a pour lesquelles :

$$ax^2 - x + a \geq 0 \qquad , \qquad \forall x > 0$$

3. Si a et b sont deux nombres réels, quelle condition doivent-ils vérifier pour que l'équation:

$$az^2 + bz + a = 0$$

admette deux solutions complexes conjuguées ?
Dans ce cas, calculer le module de ces solutions.

4. Calculer l'expression :

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$$

Vérifier le résultat obtenu pour $n = 9$.
Indication : calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre réel a, le système :

$$\begin{cases} ax + 3y + 3z = a \\ x + az = a \\ 2x + ay = 0 \end{cases}$$

ALGÈBRE - ULB (juillet 2002)

① $P(x)$, du 4ᵉ degré, divisible par $\begin{cases} x \\ x^2+5 \end{cases}$

Donc $P(x) = x.(x^2+5).(ax+b)$

Or $\begin{cases} P(1) = -30 \\ P(2) = -54 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6.(a+b) = -30 \\ 18.(2a+b) = -54 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} a+b = -5 & (1) \\ 2a+b = -3 & (2) \end{cases}$

$(2)-(1)$: $a = 2 \rightarrow b = -7$.

$\boxed{P(x) = x.(x^2+5).(2x-7)}$ ou $\boxed{P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 35x}$

② $ax^2 - x + a \geq 0 \quad (\forall x > 0)$

$\Delta = 1 - 4a^2$

<u>1ᵉʳ cas</u> $\Delta < 0 \iff 4a^2 > 1 \iff a < -\frac{1}{2}$ ou $a > \frac{1}{2}$

Si $a < -\frac{1}{2}$, le trinôme est toujours strictemᵗ négatif.

Si $a > \frac{1}{2}$, " " " " " positif.

Donc $a > \frac{1}{2}$ convient.

<u>2ème cas</u> $\Delta = 0 \iff a = -\frac{1}{2}$ ou $a = \frac{1}{2}$

Si $a = \frac{1}{2}$, le trinôme est positif $\forall x \in \mathbb{R}$
(NB : il s'annule pour $x = 1$)

Si $a = -\frac{1}{2}$, le trinôme est négatif $\forall x \in \mathbb{R}$
(il s'annule en $x = -1$).

<u>3ème cas</u> $\Delta > 0 \iff -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

1°/ $0 < a < \frac{1}{2}$

$P = \text{"}\frac{c}{a}\text{"} = 1 > 0$
$S = \text{"}-\frac{b}{a}\text{"} = \frac{1}{a} > 0$ $\Bigg\}$ les deux racines x_1 et x_2 sont positives.

$\mathbb{R}_0^+$

x		0		x_1		x_2	
ax^2-x+a	+	+	+	0	$\underline{-}$	0	+

(car $a>0$)

ne va pas !

2°/ $-\frac{1}{2} < a < 0$ $\quad P = 1$, $S = \frac{1}{a} < 0$ $\Big\}$ les deux racines sont négatives

x		x_1		x_2		0	
$ax^2 - x + a$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$

(car $a<0$)

et donc, dans $\mathbb{R}_0^+$ le trinôme est négatif.

Conclusion : il faut que $\boxed{a \geq \frac{1}{2}}$

③ $az^2 + bz + a = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Deux solutions complexes conjugués ?

Comme il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels, les solutions seront complexes et conjugués si $\Delta \leq 0$.

En effet, si $\Delta > 0$, les solutions seront réelles et distinctes. Si $\Delta = 0$, une solution réelle double (et un réel est son propre conjugué).

$$\Delta \leq 0 \iff b^2 - 4a^2 \leq 0$$
$$\iff b^2 \leq 4a^2 \iff \boxed{-2a \leq b \leq 2a}$$

Le produit des solutions vaut 1 ("$P = \frac{c}{a}$").

Donc $\underbrace{(x+iy)(x-iy)}_{\text{solut}^{\circ\circ}\text{ conjugués}} = 1$

$\longrightarrow x^2 + y^2 = 1$ et donc $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$\boxed{\text{les solutions sont de module 1}}$

Quelques vérifications.

Si $a = 3$, il faut donc : $-6 \leq b \leq 6$.

1°/ si $b = \pm 6$ l'équation est $3z^2 \pm 6z + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (z \pm 1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = \mp 1$

Dans les deux cas, une seule solution réelle (donc sa propre conjuguée).

2°/ si $b = 2$: $3z^2 + 2z + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4.3.3 = -32$

$\rightarrow z = \dfrac{-2 \pm 4\sqrt{2}\,i}{6}$ — $z_1 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,i$, $z_2 = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,i$ conjugués.

modules: $\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9}.2 = 1$

3°/ si $b = -1$: $3z^2 - z + 3 = 0$

$\Delta = -35$

$z = \dfrac{1 \pm \sqrt{35}\,i}{6} = \dfrac{1}{6} \pm \dfrac{\sqrt{35}}{6}\,i$ sol. conjugués

modules: $\dfrac{1}{36} + \dfrac{35}{36} = 1$

4°/ si $b = 7$: $3z^2 + 7z + 3 = 0$

$\Delta = 49 - 36 = 13$

$\rightarrow$ 2 sol. réelles distinctes

$z_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{13}}{6}$ et $z_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{13}}{6}$.

(4) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

Suivons l'indication :

1°/ $$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{1} \cdot i^k \quad \text{(Newton)}$$

$$= C_n^0 i^0 + C_n^1 . i + C_n^2 . i^2 + C_n^3 . i^3$$

$$+ C_n^4 . i^4 + \dots + C_n^{n-1} . i^{n-1} + C_n^n . i^n$$

$$= C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + C_n^5 i \dots$$

$$\dots + \begin{cases} \pm C_n^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \pm C_n^n i & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

exemples :

$$(1+i)^6 = C_6^0 + C_6^1 i - C_6^2 - C_6^3 i + C_6^4 + C_6^5 i - C_6^6$$
$$(1+i)^7 = C_7^0 + C_7^1 i - C_7^2 - C_7^3 i + C_7^4 + C_7^5 i - C_7^6 - C_7^7 i$$
$$(1+i)^8 = C_8^0 + C_8^1 i - \dots \quad \dots \quad + C_8^8$$
$$(1+i)^9 = C_9^0 + C_9^1 i - \dots \quad \dots \quad + C_9^9 i$$

Ainsi :

$$(1+i)^9 = \overbrace{\left(C_9^0 - C_9^2 + C_9^4 - C_9^6 + C_9^8\right)}^{(*)}$$

$$+ \left(C_9^1 - C_9^3 + C_9^5 - C_9^7 + C_9^9 \right) . i$$

L'expression que l'on nous demande de calculer est la partie réelle de $(1+i)^9$.

2°/ $$(1+i)^9 = \left(\sqrt{2} . \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9 . \operatorname{cis} \frac{9\pi}{4}$$

et la partie réelle vaut $(\sqrt{2})^9 . \cos \frac{9\pi}{4}$

$$= (\sqrt{2})^9 . \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

et en effet $(*) = 1 - 36 + 126 - 84 + 9 = 16$

⑤ $\begin{cases} ax + 3y + 3z = a \\ x + az = a \\ 2x + ay = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^3.\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ a & 0 \end{vmatrix} + 0 + a.(-1)^5.\begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}$$

$$= 3a - a.(a^2-6)$$

$$= -a^3 + 9a = a.(9-a^2)$$

$$= a.(3-a).(3+a)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a.(-1)^5.\begin{vmatrix} a & 3 \\ a & a \end{vmatrix} = -a.(a^2-3a)$$

$$= a^2.(3-a)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a & 3 \\ 1 & a & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.(-1)^4.\begin{vmatrix} a & 3 \\ a & a \end{vmatrix} = 2(a^2-3a) = 2a.(a-3)$$

$$D_z = \left|\begin{matrix} a & 3 & a \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & a \end{matrix} = 6a + a^2 - a^3 = a.(-a^2+a+6)$$

$$= a.(3-a)(a+2)$$

1^{er} cas $\quad a \neq 0$ et $a \neq 3$ et $a \neq -3$ (càd $D \neq 0$)

$$x = \frac{a^2.(3-a)}{a.(3-a).(3+a)} = \frac{a}{3+a}$$

$$y = \frac{2a(a-3)}{a(3-a)(3+a)} = \frac{-2}{3+a}$$

$$z = \frac{a(3-a)(a+2)}{a(3-a)(3+a)} = \frac{a+2}{a+3}$$

Le système admet une solution unique :

$$S = \left\{\left(\frac{a}{3+a}, \frac{-2}{3+a}, \frac{a+2}{3+a}\right)\right\}$$

2^e cas $\quad D = 0$

1°/ si $a = 0$

$\begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$

Système simplement indéterminé

$S = \{(0, \lambda, -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

2°/ si $a = 3$

$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 & (1) \\ x + 3z = 3 & (2) \\ 2x + 3y = 0 & (3) \end{cases}$

$(1) - (2)$:

$2x + 3y = 0$

équivalente à (3)

Système simplement indéterminé

$S = \left\{\left(\lambda, -\frac{2\lambda}{3}, \frac{3-\lambda}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

3°/ si $a = -3$

$$\begin{cases} -3x + 3y + 3z = -3 & (1) \\ x \qquad\quad - 3z = -3 & (2) \\ 2x - 3y \qquad = 0 & (3) \end{cases}$$

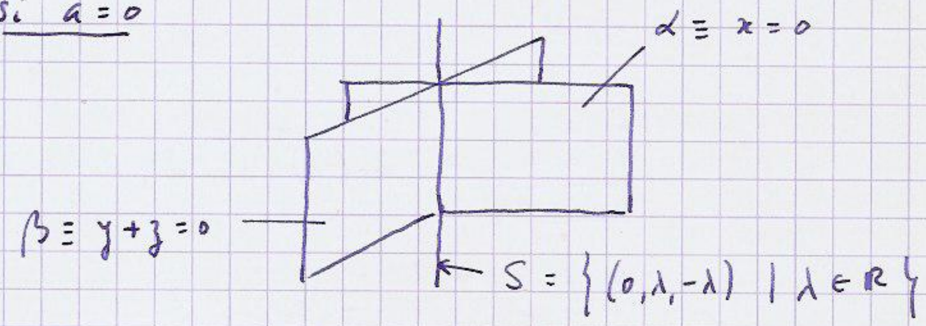
$(1) + (2)$: $\quad -2x + 3y = -6$

$\qquad\qquad\qquad 2x - 3y = 6 \quad$ incompatible avec (3)

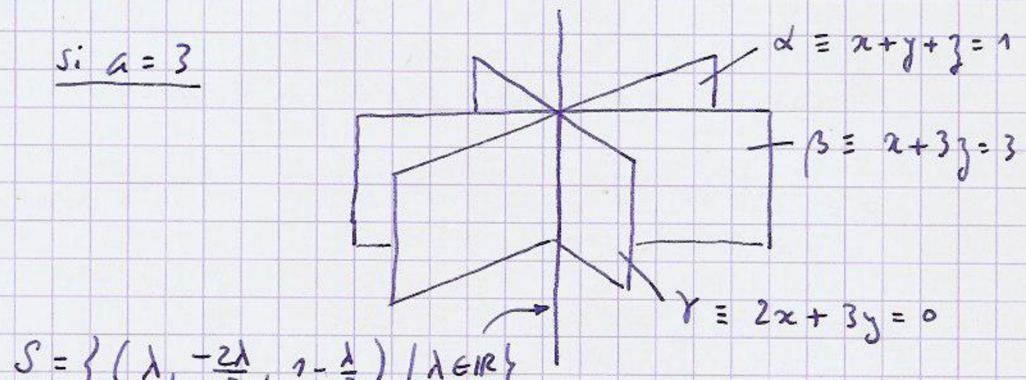
Système impossible : $S = \emptyset$

Interprétations géométriques

1°/ si $a = 0$



2°/ si $a = 3$



3°/ si $a = -3$