SYSTÈME D'ÉQUATIONS (UMONS - JUILLET 2018)

Résoudre le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 4\left(\log_x y + \log_y x\right) = 17 \\ x\,y = 3^5 \end{cases}$$

où $x > y > 1$.

Solution

Rappelons d'abord une propriété découlant de la formule de changement de base de logarithme. Sous les conditions d'existence habituelles, nous avons :

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}} \; .$$

Si nous posons $u = \log_x y$, la première équation du système peut alors s'écrire : $4\left(u + \dfrac{1}{u}\right) = 17$.

Il suit : $4\left(\dfrac{u^2+1}{u}\right) = 17 \quad \Leftrightarrow \quad 4u^2 - 17u + 4 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 225$ et nous obtenons les solutions $u = \dfrac{17 \pm 15}{8}$, c'est-à-dire $u = 4$ ou $u = ¼$.

Si $u = 4$, alors $\log_x y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^4$.

Remplaçant dans la seconde équation du système, nous obtenons : $x\,.\,x^4 = 3^5 \rightarrow x = 3$.
Et donc $y = 3^4 = 81$.
Cette solution n'est pas acceptable sous les conditions de l'énoncé du problème ($x > y > 1$) .

Mais comme le système est parfaitement symétrique en x et en y , nous avons aussi comme solution $x = 81$ et $y = 3$.
C'est d'ailleurs le résultat que l'on obtiendrait en partant de $u = ¼$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{S = \left\{\left(81\,,3\right)\right\}}$.

<u>Vérification</u> : $\begin{cases} 4\left(\log_{81} 3 + \log_3 81\right) \overset{?}{=} 17 \\ 81\,.\,3 \overset{?}{=} 3^5 \end{cases}$. En effet : $\begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{4} + 4\right) = 17 \\ 243 = 243 \end{cases}$.

Notons enfin que s'il n'y avait pas la condition $x > y > 1$, l'ensemble des solutions du système serait évidemment $S = \left\{\left(81\,,3\right), \left(3\,,81\right)\right\}$.