RESTE DE LA DIVISION D'UN POLYNÔME PAR LE PRODUIT $(x - a).(x - b)$

Exemple de problème

Les restes de la division du polynôme $p(x)$ par $(x - 1)$ et $(x - 2)$ sont respectivement 2 et 6 .
Calculer le reste de la division de $p(x)$ par $(x - 1).(x - 2)$.

Solution

Le reste de la division de $p(x)$ par $(x - 1)$ étant égal à 2 , nous avons :

$$p(x) = (x-1).q_1(x) + 2 \quad (1) .$$

De même, comme le reste de la division de $p(x)$ par $(x - 2)$ vaut 6 , nous avons :

$$p(x) = (x-2).q_2(x) + 6 \quad (2) .$$

Multiplions (1) par $(x - 2)$ et ensuite (2) par $(x - 1)$. Nous obtenons :

$$p(x).(x-2) = (x-1).(x-2).q_1(x) + 2.(x-2) \quad (3)$$

$$p(x).(x-1) = (x-2).(x-1).q_2(x) + 6.(x-1) \quad (4)$$

Soustrayons membre à membre (3) - (4) :

$$p(x).\left[(x-2)-(x-1)\right] = (x-1).(x-2).\left[q_1(x) - q_2(x)\right] + 2.(x-2) - 6.(x-1)$$

$$p(x).(-1) = (x-1).(x-2).\left[q_1(x) - q_2(x)\right] + (-4x+2)$$

ou encore

$$p(x) = (x-1).(x-2).\left[q_2(x) - q_1(x)\right] + (4x-2) .$$

Le reste de la division de $p(x)$ par par $(x - 1)$ et $(x - 2)$ est donc : $\boxed{4x - 2}$.

Généralisation

Les restes de la division du polynôme $p(x)$ par $(x - a)$ et $(x - b)$ sont respectivement r_1 et r_2 .
Calculer le reste de la division de $p(x)$ par $(x - a).(x - b)$.

Solution

Le reste de la division de $p(x)$ par $(x - a)$ étant égal à r_1 , nous avons :

$$p(x) = (x-a).q_1(x) + r_1 \quad (1) .$$

De même, comme le reste de la division de $p(x)$ par $(x - b)$ vaut r_2 , nous avons :

$$p(x) = (x-b).q_2(x) + r_2 \quad (2) .$$

Multiplions (1) par $(x - b)$ et ensuite (2) par $(x - a)$. Nous obtenons :

$$p(x).(x-b) = (x-a).(x-b).q_1(x) + r_1.(x-b) \quad (3)$$

$$p(x).(x-a) = (x-b).(x-a).q_2(x) + r_2.(x-a) \quad (4)$$

Soustrayons membre à membre (3) - (4) :

$$p(x).\left[(x-b)-(x-a)\right]=(x-a).(x-b).\left[q_1(x)-q_2(x)\right]+r_1.(x-b)-r_2.(x-a)$$

$$p(x).(a-b)=(x-a).(x-b).\left[q_1(x)-q_2(x)\right]+(r_1-r_2)x+ar_2-br_1$$

et finalement

$$p(x)=\frac{(x-a).(x-b)}{a-b}.\left[q_1(x)-q_2(x)\right]+\frac{(r_1-r_2)x+ar_2-br_1}{a-b}\quad .$$

Conclusion

Le reste de la division de $p(x)$ par $(x - a) . (x - b)$ est $\frac{r_1-r_2}{a-b}x+\frac{ar_2-br_1}{a-b}$.

Exemple

Soit le polynôme $p(x)=2x^4-x^3+3x^2+1$.

Le reste de la division de $p(x)$ par $(x + 1)$ est $r_1 = p(-1) = 7$.
Le reste de la division de $p(x)$ par $(x - 2)$ est $r_2 = p(2) = 37$.

Pour trouver le reste de la division de $p(x)$ par $(x + 1) . (x - 2)$, utilisons la formule ci-dessus, avec $a = - 1$ et $b = 2$:

$$\frac{7-37}{-1-2}x+\frac{(-1).37-2.7}{-1-2}=10x+17\quad .$$

Vérifions en effectuant la division euclidienne de $p(x)$ par $(x+1).(x-2)=x^2-x-2$:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4-x^3+3x^2+1 & x^2-x-2 \\
\hline
-(2x^4-2x^3-4x^2) & 2x^2+x+8 \\
\hline
x^3+7x^2+1 & \\
-(x^3-x^2-2x) & \\
\hline
8x^2+2x+1 & \\
-(8x^2-8x-16) & \\
\hline
\boxed{10x+17} &
\end{array}$$
