UNE INÉQUATION IRRATIONNELLE - ULB 2019

Résoudre dans **R** l'inéquation suivante :

$$3\frac{x}{2}-1 > -\sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5} \ .$$

Solution

Déterminons d'abord le domaine de l'inéquation.

La condition d'existence du radical est $\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5>0$.

Dans le membre de gauche, le discriminant du trinôme est $\Delta=\frac{9}{4}-4.\frac{1}{2}.5=-\frac{31}{4}<0$.

Dans ce cas, le trinôme a toujours le signe du coefficient de x^2 , donc strictement positif, et la condition d'existence est toujours vérifiée. Le domaine de l'inéquation est **R** .

Avant de commencer la résolution, il est important de se rappeler que lorsqu'une racine carrée existe, elle est positive. Par exemple, il est faux d'écrire $\sqrt{9}=-3$!

Si $a\geq 0$, alors $\sqrt{a}$ existe et $\sqrt{a}\geq 0$.

Pour la résolution, envisageons deux cas.

Premier cas : $3\frac{x}{2}-1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq\frac{2}{3}$

Le premier membre de l'inégalité est positif tandis que le second est strictement négatif. L'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de x telles que $x\geq\frac{2}{3}$.

Second cas : $3\frac{x}{2}-1<0 \quad\Leftrightarrow\quad x<\frac{2}{3}$

Les deux membres de l'inégalité sont négatifs. Pour progresser, il faut élever au carré les deux membres de l'inéquation. Mais alors, il faut « retourner » l'inégalité !

En effet, dans $\mathbf{R}^-$, la fonction « carré » est strictement décroissante :

$$\forall a,b\in R^- :\ a<b\ \Rightarrow\ a^2>b^2 \ .$$

Nous obtenons donc :

$$\left(3\frac{x}{2}-1\right)^2 < \frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+5 \ .$$

Développons …

$$\frac{9x^2}{4} - 3x + 1 < \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7x^2}{4} - \frac{3}{2}x - 4 < 0 \ .$$

Nous sommes ramenés à une inéquation du second degré basique (cours de 4[e]).

Le trinôme du membre de gauche a pour discriminant $\Delta = \frac{9}{4} - 4.\frac{7}{4}.(-4) = \frac{121}{4}$.

Ses racines sont $x = \dfrac{\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{3 \pm 11}{7}$ c'est-à-dire $x_1 = -\frac{8}{7}$ et $x_2 = 2$.

Dressons le tableau de signes du trinôme, sans oublier d'y insérer la valeur $x = 2/3$ puisqu'il faut tenir compte du fait que $x < 2/3$.

x		$-\frac{8}{7}$		$\frac{2}{3}$		2	
$\frac{7x^2}{4} - \frac{3}{2}x - 4$	+	0	-	-	-	0	+

Le trinôme est strictement négatif lorsque $-\frac{8}{7} < x < \frac{2}{3}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left] -\frac{8}{7}, +\infty \right[$.

Vérification graphique : $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{8}{7}$.