UN PROBLÈME D'ALGÈBRE - UMONS 2014

SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Résoudre dans $\mathbf{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} .$$

Solution

Réécrivons le système en mettant l'inconnue « y » en évidence dans la première équation :

$$\begin{cases} y.(2x - y - 5) = 0 & (1) \\ y = x^2 - 4x + 3 & (2) \end{cases} .$$

L'équation (1) est équivalente à $y = 0$ ou $2x - y - 5 = 0$.

Premier cas : $y = 0$

Nous remplaçons alors y par 0 dans (2) et obtenons : $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4$ et comme solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

Nous obtenons une première conclusion : les couples (1 , 0) et (3 , 0) sont des solutions du système.

Second cas : $y \neq 0$

Nous pouvons alors diviser les deux membres de (1) par y et le système se ramène à

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 & (3) \\ y = x^2 - 4x + 3 & (4) \end{cases} .$$

Nous prenons l'expression de y donnée par (4) et la substituons dans (3) :

$$2x - \left(x^2 - 4x + 3\right) - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 6x - 8 = 0 \quad .$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4$ et comme solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$.

Remplaçant ces valeurs dans (4) , nous trouvons $y_1 = -1$ et $y_2 = 3$.

Nous obtenons une seconde conclusion : les couples (2 , - 1) et (4 , 3) sont des solutions du système.

Conclusion

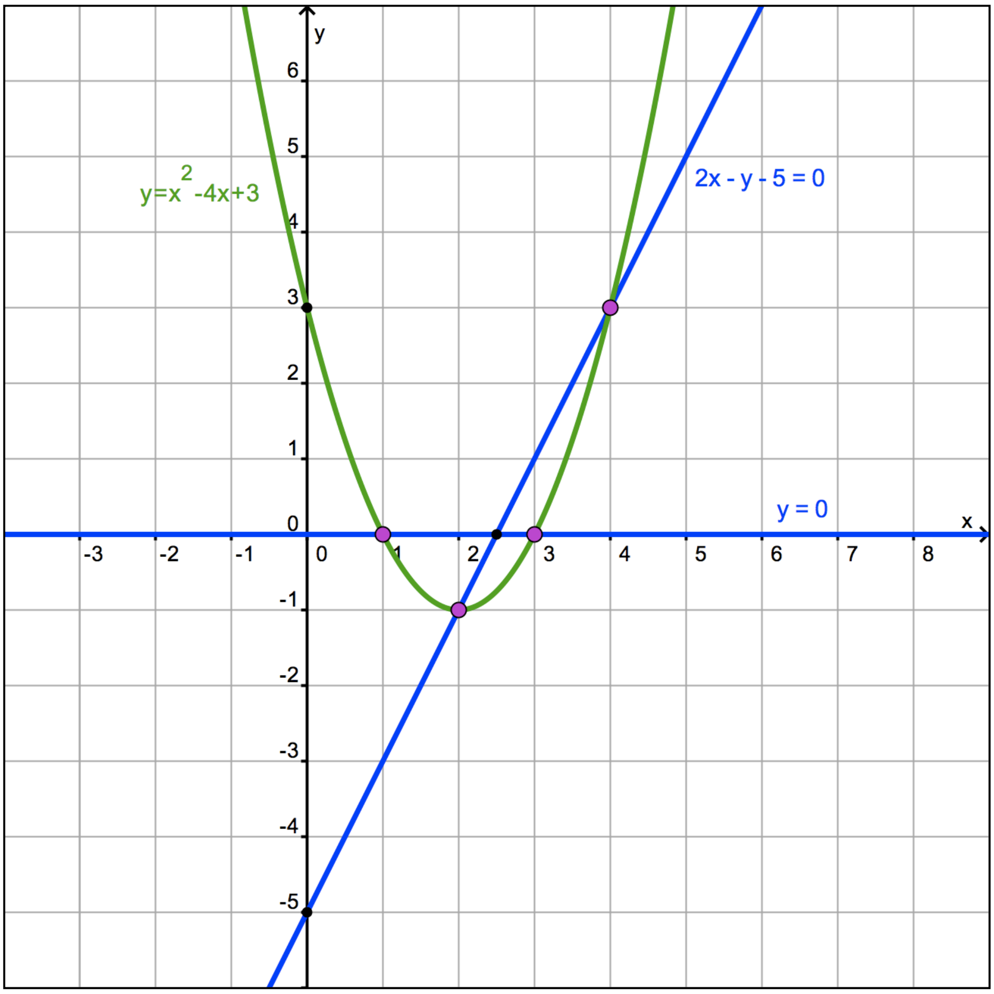
L'ensemble des solutions du système est $S = \left\{ (1,0), (3,0), (2,-1), (4,3) \right\}$.

Vérification graphique

L'équation $2xy - y^2 - 5y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y=0) \vee (2x - y - 5 = 0)$ est représentée graphiquement par la réunion des droites d'équations $y = 0$ et $2x - y - 5 = 0$. [1]

L'équation $y = x^2 - 4x + 3$ représente évidemment une parabole.

Les solutions du système sont les coordonnées des points d'intersection des deux droites et de la parabole.
Le graphique ci-dessous confirme que $S = \{ (1,0), (3,0), (2,-1), (4,3) \}$.



[1] Si vous introduisez l'équation $2xy - y^2 - 5y = 0$ dans GEOGEBRA, vous verrez peut-être le logiciel nommer l'objet obtenu « hyperbole dégénérée » . C'est une autre histoire : il faut étudier la théorie des coniques.