TIR OBLIQUE D'UN PROJECTILE

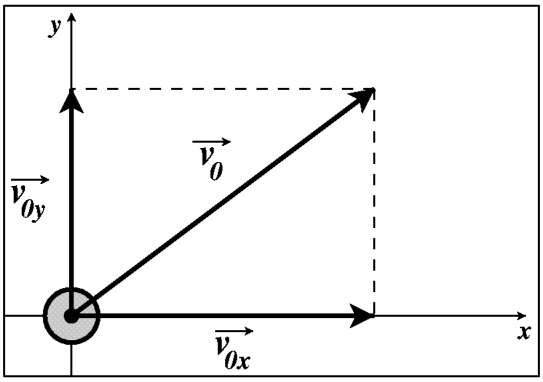
À partir du ras du sol, un projectile est tiré suivant une direction oblique déterminée, avec une vitesse initiale connue. Nous allons calculer quelle trajectoire il va suivre, en négligeant les forces de frottement dues à la résistance de l'air.

Exemple de situation

Supposons que les composantes horizontale et verticale de la vitesse initiale soient connues.
Par exemple, $v_{0x} = 40\ \text{(m/s)}$ et $v_{0y} = 30\ \text{(m/s)}$, ce qui correspond à $v_0 = 50\ \text{(m/s)}$.

La seule force agissant sur le projectile une fois qu'il est lancé, est la force de la pesanteur, de direction verticale.

Par conséquent, le projectile subit verticalement une accélération égale à $-g$. Horizontalement, il ne subit aucune accélération.



Pour simplifier, nous prendrons une valeur approchée de g égale à $10\ \text{(m/s}^2\text{)}$.

Nous avons ainsi : $a_x = 0\ \text{(m/s}^2\text{)}$ et $a_y = -10\ \text{(m/s}^2\text{)}$.

Si nous assimilons le projectile à un point dans un repère, sa projection sur l'axe des abscisses se déplace en MRU, tandis que sa projection sur l'axe des ordonnées est animée d'un MRUA.
Or, le cours de physique nous fournit les formules suivantes pour trouver la position d'un mobile en fonction du temps :

$$e(t) = v_0 t + e_0 \ \text{(MRU)} \qquad \text{et} \qquad e(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + e_0 \ \text{(MRUA)}.$$

Désignant par $x(t)$ et par $y(t)$ respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point en fonction du temps t, nous avons ainsi :

$$x(t) = 40t \qquad \text{et} \qquad y(t) = -5t^2 + 30t\,.$$

Ces équations sont les *équations paramétriques* de la trajectoire T du projectile. L'abscisse et l'ordonnée de celui-ci dépendent du *paramètre* t.

$$\boxed{T \equiv \begin{cases} x(t) = 40t & (1) \\ y(t) = -5t^2 + 30t & (2) \end{cases}}$$

Afin d'établir le lien entre abscisse et ordonnée, il faut maintenant éliminer le paramètre.

De l'équation (1), nous obtenons : $t = \frac{x(t)}{40}$.

Remplaçant dans l'équation (2), nous trouvons :

$$y(t) = -5\frac{x^2(t)}{1600} + 30\frac{x(t)}{40} \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \boxed{y = -\frac{x^2}{320} + \frac{3x}{4}}.$$

Nous avons ainsi obtenu *l'équation cartésienne* de la trajectoire. Nous reconnaissons qu'il s'agit d'une *parabole*.
Nous pouvons maintenant répondre à des questions classiques telles que « quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ? » ou « quelle est la portée du tir ? »[1].

Exercices

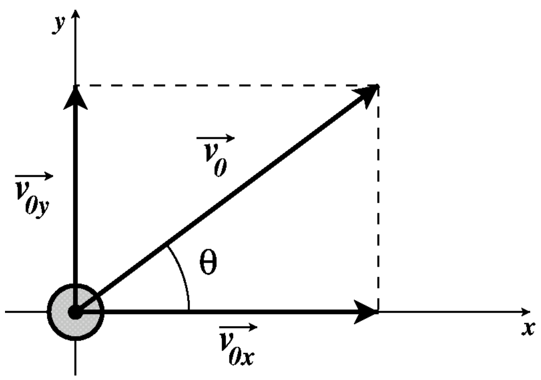
1. Déterminer les équations paramétriques et l'équation cartésienne de la trajectoire dans le cas où $v_{0x} = 10$ (m/s) et $v_{0y} = 50$ (m/s).

2. Supposons que l'on connaisse la vitesse initiale et l'angle de tir par rapport à l'horizontale. Par exemple, $v_0 = 50$ (m/s) et $\theta = 60°$.

   a) Déterminer les composantes horizontale et verticale de la vitesse initiale.

   b) Déterminer les équations paramétriques et l'équation cartésienne de la trajectoire.

3. Généraliser la solution de l'exercice 2, afin d'obtenir des formules pour les équations paramétriques et cartésienne de la trajectoire.
   La vitesse initiale sera désignée par v_0 , l'accélération de la pesanteur par g et l'angle de tir par θ.



[1] Réponses : hauteur maximale de 45 mètres pour une portée de 240 mètres.