Fonctions réciproques

1. Introduction

Exemple 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$.

Nous sommes habitués à déterminer l'*image* d'un réel par une fonction.
Par exemple, l'image par f du réel 5 est ici $f(5) = 2.5 + 3 = 13$.

Il est tout aussi courant de vouloir déterminer l'*antécédent* d'un réel.
Ainsi, nous pouvons demander l'antécédent de 27 , ce qui revient à demander « quel est le réel x dont 27 est l'image ? » .

Nous écrirons alors : $f(x) = 27 \rightarrow 2x + 3 = 27 \rightarrow x = \dfrac{27-3}{2} = 12$.

La réponse est que 27 est l'image de 12 , autrement dit que $f(12) = 27$.

Nous noterons aussi $f^{-1}(27) = 12$ ou f^{-1} est une nouvelle fonction appelée « fonction réciproque de f » .

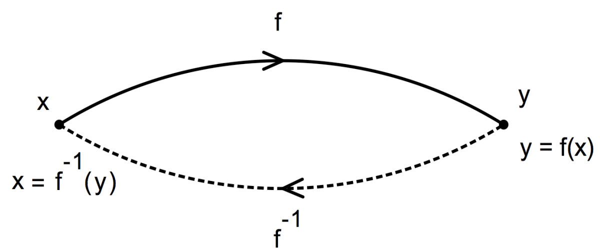
Nous répondrons de la même façon à la question plus générale « de quel réel x le réel y est-il l'image ? » :

$$f(x) = y$$

$$2x + 3 = y$$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$



L'expression analytique de la fonction réciproque de f est ainsi $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

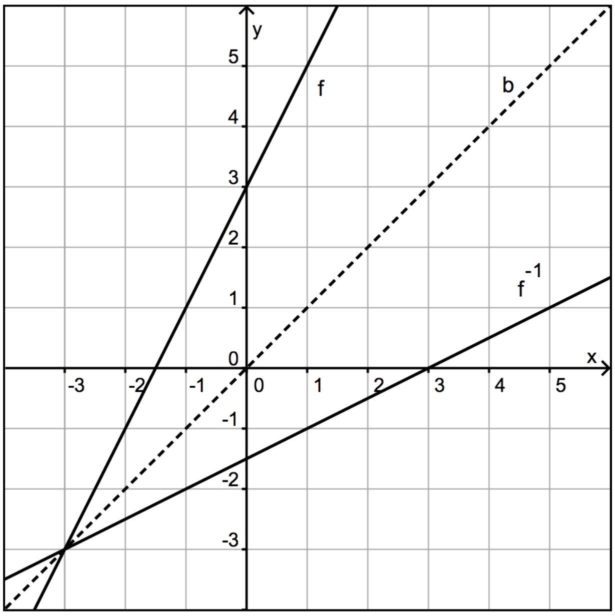
Cette expression permet de répondre directement à une question comme « de quel réel 51 est-il l'image par f ? » (on dit aussi « quelle est l'image réciproque de 51 ? ») :

$$f^{-1}(51) = \frac{51-3}{2} = 24 \ .$$

Le réel 51 est l'image de 24 (ce qui se vérifie par $f(24) = 51$) .

Point de vue graphique

Voici les graphiques de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.



Nous observons que ces deux graphiques sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant $b \equiv y = x$.

Composée de deux fonctions réciproques

Si l'on fait suivre f par f^{-1} (ou inversément) on revient à la case départ !

Vérifions dans le cas de notre exemple/

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}[f(x)] \\ &= f^{-1}(2x+3) \\ &= \frac{(2x+3)-3}{2} \\ &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f[f^{-1}(x)] \\ &= f\left(\frac{x-3}{2}\right) \\ &= 2 \,.\, \frac{x-3}{2} + 3 \\ &= x\end{aligned}$$

La composée d'une fonction et de sa fonction réciproque est la fonction identique.

Exercice

Déterminez la fonction réciproque de $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

Tracez ensuite les graphiques de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

Calculez les composées $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$. Et enfin, notez vos constatations.

Exemple 2

Soit la fonction $f(x) = x^2$. Déterminez la (?) fonction réciproque de f .

La situation n'est plus aussi simple que dans le premier exemple (et le premier exercice).
Par exemple, à la question « de quel réel 9 est-il l'image ? » , nous pouvons tout aussi bien répondre 3 que - 3 .

En effet : $f(x) = y \rightarrow x^2 = y \rightarrow x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Et donc : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ou $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

La nouveauté tient au fait que la fonction $f(x) = x^2$ peut prendre la même valeur pour deux valeurs différentes de la variable : f n'est pas une *injection* [1] de **R** dans $\mathbf{R}^+$.

Il faut alors définir des *restrictions* [2] de f qui ne prennent qu'une seule fois chacune de leurs valeurs et déterminer la réciproque de chacune de ces restrictions (que nous nommerons *réciproques partielles* de f).

Le graphique nous aide à déterminer des restrictions adéquates.

Nous pouvons d'abord considérer f_1 qui est une injection de $\mathbf{R}^-$ dans $\mathbf{R}^+$:

$$f_1 : \mathrm{R}^- \rightarrow \mathrm{R}^+ : x \rightarrow x^2$$

$$f_1^{-1} : \mathrm{R}^+ \rightarrow \mathrm{R}^- : x \rightarrow -\sqrt{x}$$

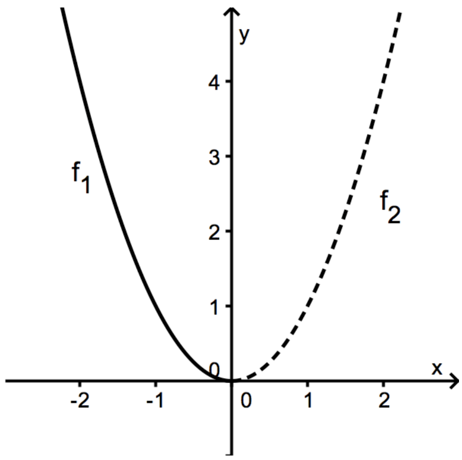
(première réciproque partielle de f)

Et ensuite, f_2 qui est une injection de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$:

$$f_2 : \mathrm{R}^+ \rightarrow \mathrm{R}^+ : x \rightarrow x^2$$

$$f_2^{-1} : \mathrm{R}^+ \rightarrow \mathrm{R}^+ : x \rightarrow \sqrt{x}$$

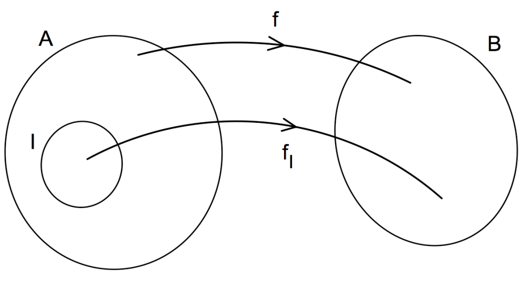
(seconde réciproque partielle de f)



Point de vue graphique à la page suivante.

[1] La fonction f est une injection de l'ensemble A vers l'ensemble B si et seulement si deux éléments distincts dans A ont des images distinctes dans B : si $a , b \in$ A et $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
Notons que toute fonction strictement croissante est injective.
En effet, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$, et si $a > b$, alors $f(a) > f(b)$. Donc, si $a \neq b$, on a bien $f(a) \neq f(b)$.
De même, toute fonction strictement décroissante est injective.

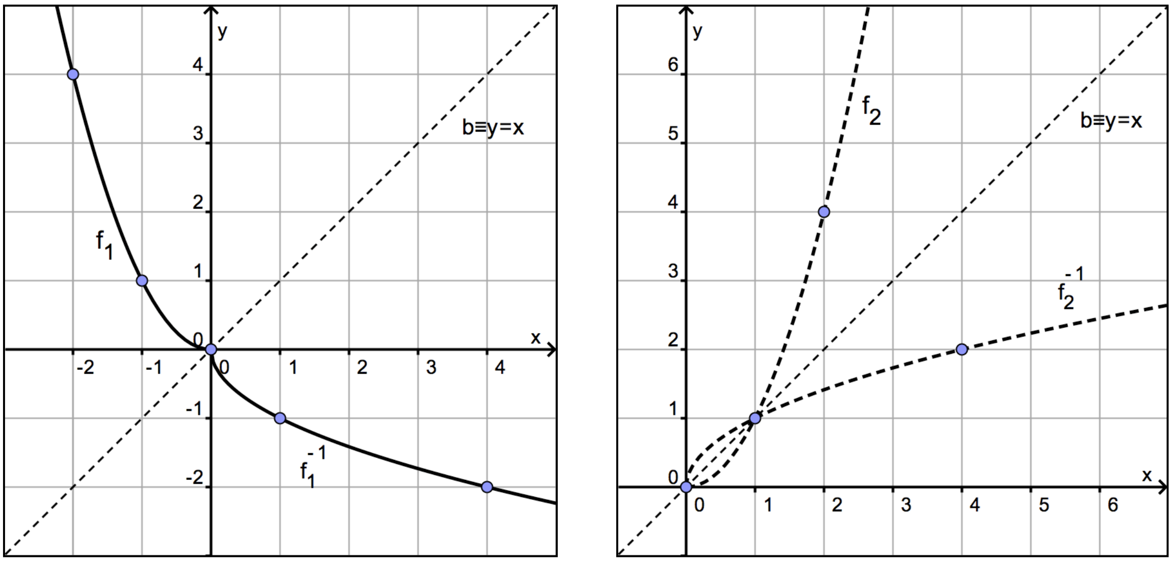
[2] Si f est une application d'un ensemble A dans un ensemble B et si I est une partie non vide de A , l'application de I dans B qui à tout x fait correspondre $f(x)$ s'appelle restriction de f à I et on la note f_I ou f/I . Cette restriction de f à I est unique.
Dans le schéma ci-dessous, f_I est la restriction à I de l'application f .



Point de vue graphique

Nous avons représenté ci-dessous, dans des repères orthonormés, chacune des restrictions choisies pour f et la réciproque partielle correspondante.

Nous observons de nouveau la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Composée

Nous pouvons encore vérifier que la composée de chaque restriction avec la réciproque partielle correspondante donne bien la fonction identique.

Par exemple : $\left(f_2^{-1} \circ f_2\right)(x) = f_2^{-1}\left[f_2(x)\right]$

$$= f_2^{-1}\left(x^2\right)$$

$$= -\sqrt{x^2}$$

$$= -(-x) \qquad \text{(en effet, comme } x \in \mathbf{R}^- \text{, on a } \sqrt{x^2} = -x \text{)}$$

$$= x$$

Exercice

Vérifiez que les autres composées donnent bien la fonction identique.

Exercices résolus

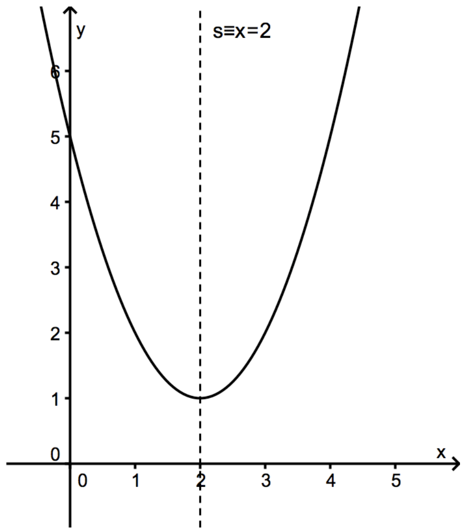
1. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

   a) Déterminez la (les) fonction(s) réciproques(s) de f.

   b) Vérifiez graphiquement et algébriquement (composée).

Solution

Traçons d'abord le graphique de f. Cela nous aidera à choisir des restrictions injectives de cette fonction.



La parabole possédant un axe de symétrie en $x = 2$, il est naturel de définir :

f_1 comme la restriction de f à $]-\infty, 2]$,

f_2 comme la restriction de f à $[2, +\infty[$.

Déterminons maintenant les fonctions réciproques partielles, comme d'habitude, en résolvant par rapport à x l'équation $y = f(x)$:

$$y = x^2 - 4x + 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + (5 - y) = 0 \;\text{ avec }\; \Delta = 16 - 4.(5-y) = -4 + 4y = 4(y-1) \;;$$

$$\text{d'où } \; x = \frac{4 \pm 2\sqrt{y-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{y-1} \;.$$

Nous en concluons :

$f_1 :]-\infty, 2] \to [1, +\infty[\,:\, x \to x^2 - 4x + 5$

$f_1^{-1} : [1, +\infty[\to]-\infty, 2] \,:\, x \to 2 - \sqrt{x-1}$ (en effet, il faut que $f_1^{-1}(x) \leq 2$)

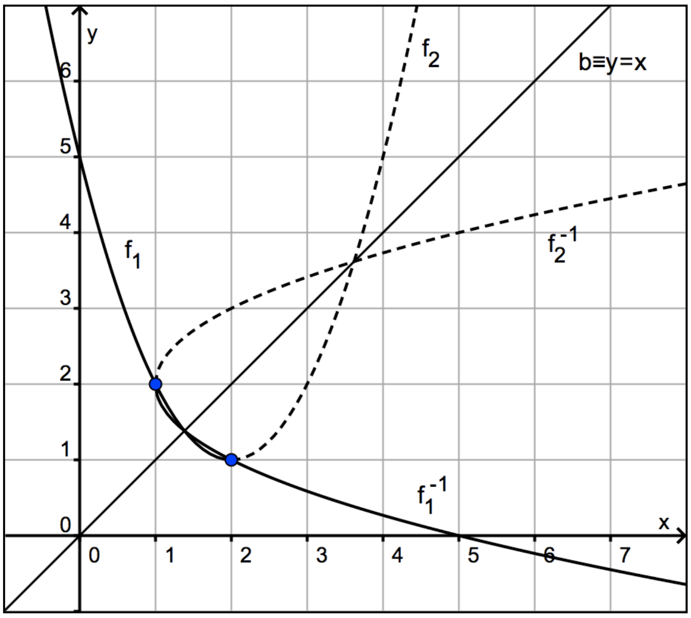
$f_2 : [2, +\infty[\to [1, +\infty[\,:\, x \to x^2 - 4x + 5$

$f_2^{-1} : [1, +\infty[\to [2, +\infty[\,:\, x \to 2 + \sqrt{x-1}$ (en effet, il faut que $f_1^{-1}(x) \geq 2$)

Remarquons que le domaine de définition de chaque restriction de f est égal à l'ensemble image de la fonction réciproque partielle correspondante et vice versa.

Notons encore que chaque réciproque partielle a pour domaine $[1, +\infty[$ ce qui correspond bien à la condition d'existence des expressions $2 \pm \sqrt{x-1}$.

Vérification graphique



Les arcs de courbe en trait plein sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant. Il en va de même pour les arcs de courbe en pointillés.

Vérification d'une des composées

$$\begin{aligned}
\left(f_2^{-1} \circ f_2\right)(x) &= f_2^{-1}\left[f_2(x)\right] \\
&= f_2^{-1}(x^2 - 4x + 5) \\
&= 2 - \sqrt{(x^2 - 4x + 5) - 1} \\
&= 2 - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \\
&= 2 - \sqrt{(x-2)^2} \\
&= 2 - (-x + 2) \\
&= x
\end{aligned}$$

expliquez ... (*)

(*) La fonction f_2 étant définie dans $]-\infty, 2]$, nous avons $x \leq 2$ et donc $x - 2 \leq 0$.

C'est pourquoi $\sqrt{(x-2)^2} = -(x-2)$

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$.

   a) Déterminez la (les) fonction(s) réciproque(s) de f.

   b) Vérifiez graphiquement et algébriquement (composée).

Solution

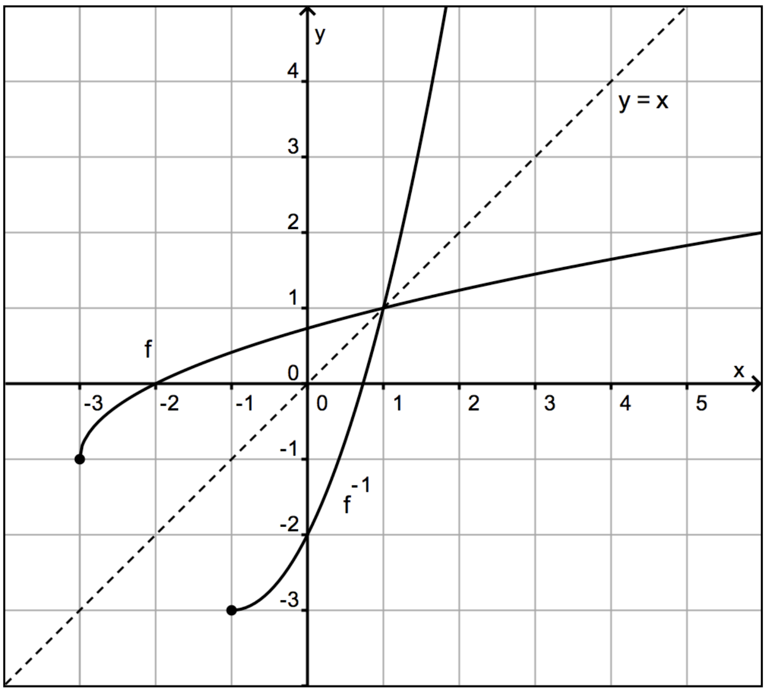
Le graphique de f s'obtient en translatant celui de $y = \sqrt{x}$ de 3 unités vers la gauche et de 1 unité vers le bas. La fonction f est ainsi strictement croissante dans $[-3, +\infty[$ et son ensemble image est $[-1, +\infty[$; elle est donc une injection de $[-3, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$.

Nous pouvons calculer f^{-1} directement sans faire de restriction :

$$y = \sqrt{x+3} - 1 \;\rightarrow\; y + 1 = \sqrt{x+3} \;\rightarrow\; (y+1)^2 = x + 3 \;\rightarrow\; x = (y+1)^2 - 3 \;.$$

Dès lors : $f^{-1} : [-1, +\infty[\;\rightarrow [-3, +\infty[\;:\; x \rightarrow (x+1)^2 - 3$.

Enfin, il est important de préciser que la réciproque de f est la fonction $(x+1)^2 - 3$ **restreinte à l'intervalle $[-1, +\infty[$** et non considérée sur tout l'ensemble **R** .



Exercices

1. Déterminez la (les) fonction(s) réciproque(s) de chacune des fonctions suivantes.
Réalisez les représentations graphiques.

a) $f(x) = -2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 3$

c) $f(x) = 4 - x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

f) $f(x) = (x-2)^2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \sqrt{4-x}$

i) $f(x) = \sqrt{2+x} - 3$

j) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

---

2. Déterminez l'expression générale de la fonction réciproque d'une fonction du premier degré $f(x) = mx + p$ $(m \neq 0)$.

---

3. Une fonction involutive [3] est une fonction égale à sa réciproque.
Recherchez des exemples de telles fonctions.
D'un point de vue graphique, qu'ont-elles de particulier ?

---

4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$. Calculez l'image réciproque de 3.

Et l'image réciproque de 0 ?

---

5. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2+x} - 3$.
À l'aide de la composée, vérifiez que la fonction $g(x) = x^2 + 6x + 7$ est bien la fonction réciproque de f.
Précisez à quel intervalle il faut restreindre g pour qu'elle soit la fonction réciproque de f.

---

6. Déterminez la fonction réciproque de $f(x) = \dfrac{2x+1}{4-3x}$.

---

7. Une fonction constante a-t-elle une fonction réciproque ? Expliquez.

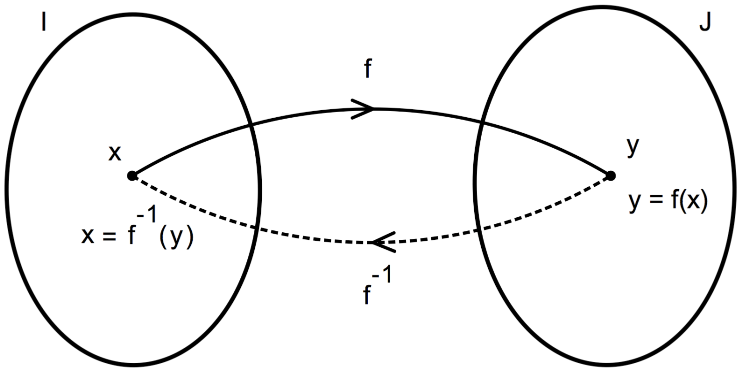
---

[3] Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $*$ qui admet un élément neutre e.
Un élément x de E est involutif si, en composant x avec lui-même, le résultat obtenu est e : $x * x = e$.
L'élément x admet donc un symétrique qui est lui-même.
Dans le cadre de ce chapitre, nous travaillons dans l'ensemble E des fonctions réelles muni de la loi de composition interne o et dont l'élément neutre est la fonction identique.
La fonction $f(x) = 1/x$ est un exemple d'élément involutif de E car :

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1/x) = 1/(1/x) = x \ .$$

2. Fonction réciproque d'une fonction injective

Si f est une fonction injective de domaine I et d'ensemble image J [4], alors à chaque élément y de J correspond exactement un élément x de I. Puisque x est unique, nous pouvons définir une fonction f^{-1} de J vers I telle que $f^{-1}(y) = x$.



La fonction f^{-1} est appelée *fonction réciproque* de f.

$$\boxed{x \in \mathrm{I} \text{ et } f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in \mathrm{J} \text{ et } f^{-1}(y) = x}$$

Une fonction injective ne peut avoir qu'une seule fonction réciproque.
Si f^{-1} est la fonction réciproque de f, alors f est la fonction réciproque de f^{-1} et nous dirons que f et f^{-1} sont réciproques l'une de l'autre.

Notons encore que :

$$\boxed{\operatorname{dom} f = \operatorname{im} f^{-1} \text{ et } \operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f}$$

3. Composée de deux fonctions réciproques

Soit f une injection de I vers J.

a) La composée $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de I.

En effet, soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $f(x) = y \in \mathrm{J}$.

Nous avons : $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(y) = x$.

b) La composée $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de J.

En effet, soit $y \in \mathrm{J}$ tel que $f^{-1}(y) = x \in \mathrm{I}$.

Nous avons : $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$.

---

[4] Dans la suite, I et J désignerons toujours deux parties de $\mathbf{R}$.

4. Graphiques de deux fonctions réciproques l'une de l'autre (en repère orthonormé)

4.1. Propriété

Dans un repère orthonormé, les points $P(r,s)$ et $Q(s,r)$ sont symétriques par rapport à la droite $b \equiv y = x$.

Preuve

- Si $r = s$, c'est évident car P et Q sont confondus sur la droite b .
- Voyons si $r \neq s$.

  Le segment $[PQ]$ est perpendiculaire à b car $m_{PQ} = \dfrac{r-s}{s-r} = -1$ et $m_b = 1$.

  Le milieu de $[PQ]$ est $M\left(\dfrac{r+s}{2}, \dfrac{s+r}{2}\right)$ et il appartient donc à b .

  La droite b est donc la médiatrice de $[PQ]$, et ainsi axe de symétrie de $[PQ]$.

4.2. Graphiques de deux fonctions réciproques l'une de l'autre

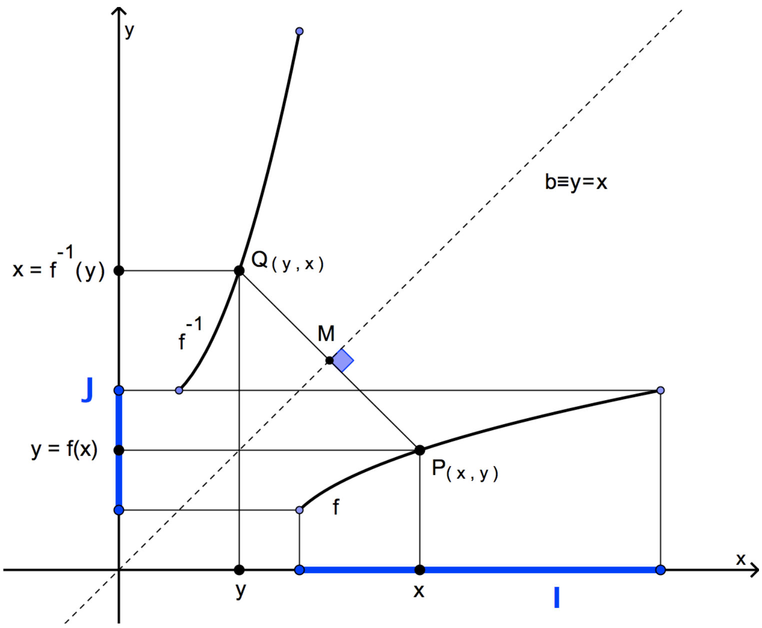
Dans un repère orthonormé, les graphiques de deux fonctions réciproques l'une de l'autre sont symétriques par rapport à la droite $b \equiv y = x$.

Preuve

Soient I et J deux parties de $\mathbf{R}$ et f une injection de I vers J .

Si $y = f(x)$, alors le point P de coordonnées (x , y) appartient au graphique de f .

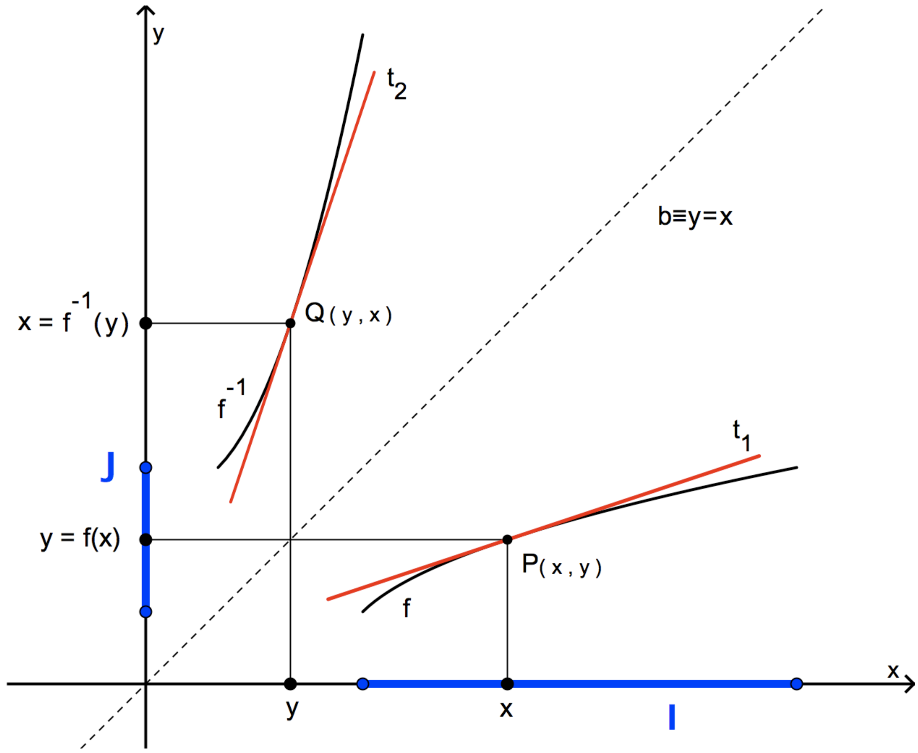
Or, si $y = f(x)$, alors $f^{-1}(y) = x$ et le point Q de coordonnées (y , x) appartient au graphique de f^{-1} .



Comme les points P et Q sont symétriques par rapport à la droite $b \equiv y = x$ (propriété 4.1) , le graphique de f^{-1} est l'image de celui de f par la symétrie orthogonale d'axe b .

5. Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une injection de I vers J, dérivable en $x \in \mathrm{I}$.



Si f est dérivable en x et que $f'(x) \neq 0$, le graphique de f admet une tangente oblique t_1 de pente $f'(x)$ au point d'abscisse x : $m_{t_1} = f'(x) \quad (1)$.

La symétrie orthogonale d'axe b transforme t_1 en t_2, tangente oblique au graphique de f^{-1} en son point d'abscisse y.

La pente de t_2 est donc la dérivée de f^{-1} en y : $m_{t_2} = \left(f^{-1}\right)'(y) \quad (2)$.

Mais t_2 étant l'image de t_1 par la symétrie d'axe b, la pente de t_2 est égale à l'inverse de celle de t_1 : $m_{t_2} = \dfrac{1}{m_{t_1}}$ (voir [5]).

Tenant compte de cela, ainsi que de (1) et (2), nous obtenons :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}.$$

Formule de dérivation d'une fonction réciproque

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

---

[5] Soit une droite d comprenant les points (x_1,y_1) et (x_2,y_2). La pente de d est $m_d = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Soit e la droite symétrique de d par rapport à $b \equiv y = x$. La droite e comprend donc nécessairement les points (y_1,x_1) et (y_2,x_2). La pente de e est donc : $m_e = (x_2 - x_1)/(y_2 - y_1) = 1/m_d$.

Deux droites obliques, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, ont des pentes inverses.

Illustrons cette formule par un exemple.

Il s'agit surtout de montrer comment appliquer la formule. En effet, vous êtes déjà capable de calculer une dérivée comme celle qui vous sera proposée ci-dessous.
La formule ne sera vraiment utile que pour des fonctions que vous n'êtes pas encore en mesure de dériver (comme les fonctions cyclométriques du chapitre suivant !).

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$ restreinte à l'intervalle $[\, 2 \,, + \infty \,[$.
La réciproque de f est $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}$.
Utilisez la formule de dérivation d'une fonction réciproque pour déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{f'\left(2+\sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{1}{2.\left(2+\sqrt{x-1}\right)-4} \qquad \text{car } f'(x) = \left(x^2-4x+5\right)' = 2x-4 \\
&= \frac{1}{2.\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

Il s'agit bien sûr de la dérivée que l'on trouve facilement à l'aide des règles habituelles de dérivation :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \left[2+\left(x-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}.\left(x-1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2.\sqrt{x-1}} \; .$$

Exercice

Dans chacun des cas suivants, calculez la dérivée de f^{-1} à l'aide de la formule de dérivation d'une fonction réciproque. Vérifiez à l'aide des méthodes vues en 5^{e} .

1. $f(x) = \sqrt{2-x}$ et $f^{-1}(x) = 2 - x^2$ (restreinte à $\mathbf{R}^+$) .

2. $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ (restreinte à $[\, 1 \,, + \infty \,[$) et $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{3-x}$.

3. $f(x) = \dfrac{2x+5}{1-3x}$ et $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2+3x}$.