FRONTIÈRES MARITIMES (1)

Un état bordant la mer est évidemment intéressé par les ressources de celle-ci. Il peut s'agir de pêche, de forages en mer afin exploiter des gisements de pétrole ou de gaz, d'installation de parcs à éoliennes, etc.

Afin d'éviter des conflits, il a fallu délimiter très précisément les eaux territoriales de chaque pays. Il a été décidé qu'un point du fond marin appartient au pays dont il est le plus proche. Cette règle comporte toutefois certaines exceptions, ayant fait l'objet d'accords internationaux. En outre, elle n'est pas d'application pour les océans.

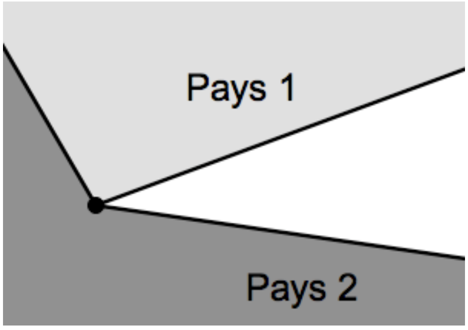
Voici une carte de la Mer du Nord[1]. Les lignes tracées en mer sont les limites entre eaux territoriales, que nous appellerons *frontières maritimes*.

1. Vérifiez sur la carte si les frontières maritimes satisfont à la règle énoncée ci-dessus (vous pouvez négligez la courbure terrestre).

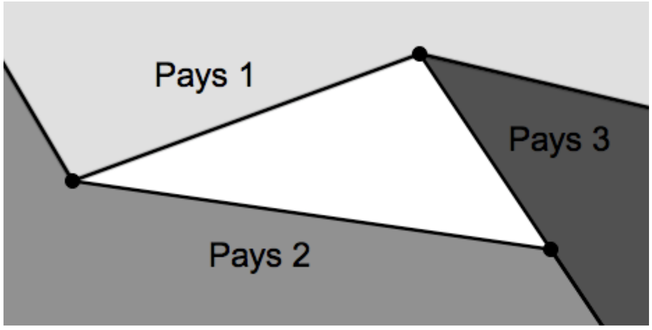
[1] http://www.mumm.ac.be/FR/Management/Atlas/map.php?NorthSeaBelgianArea

2. Déterminez quelles frontières maritimes l'on obtient si les côtes (deux ou plus) sont rectilignes. Voici trois situations possibles. Pouvez-vous en imaginer d'autres ?

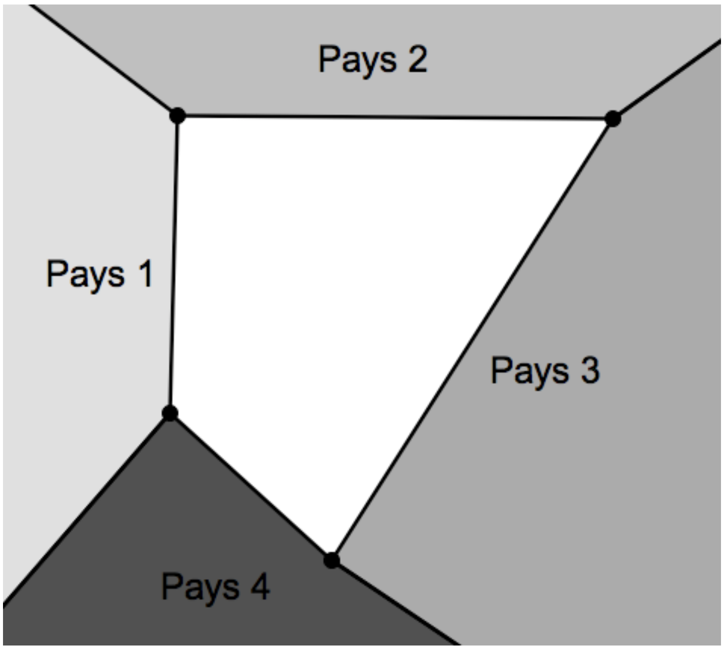
①



②

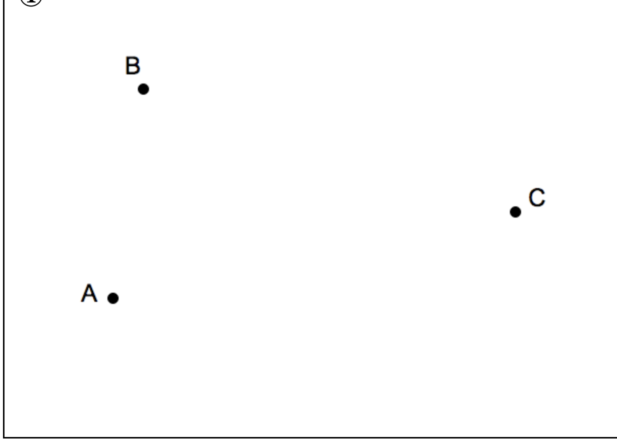


③

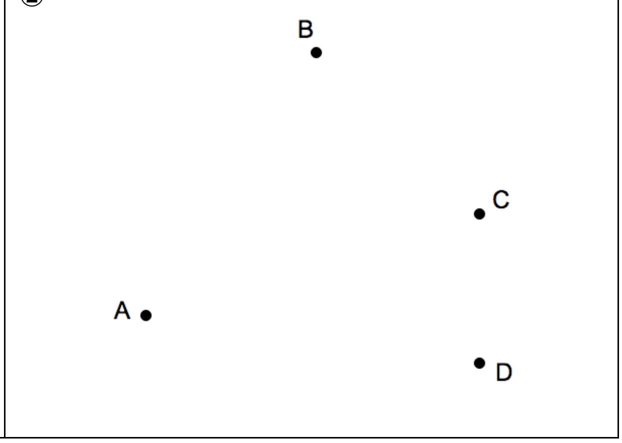


3. Déterminez quelles sont les frontières maritimes si les pays sont de minuscules îles, pouvant être assimilées à des points. Voici deux situations possibles. Pouvez-vous en imaginer d'autres ?

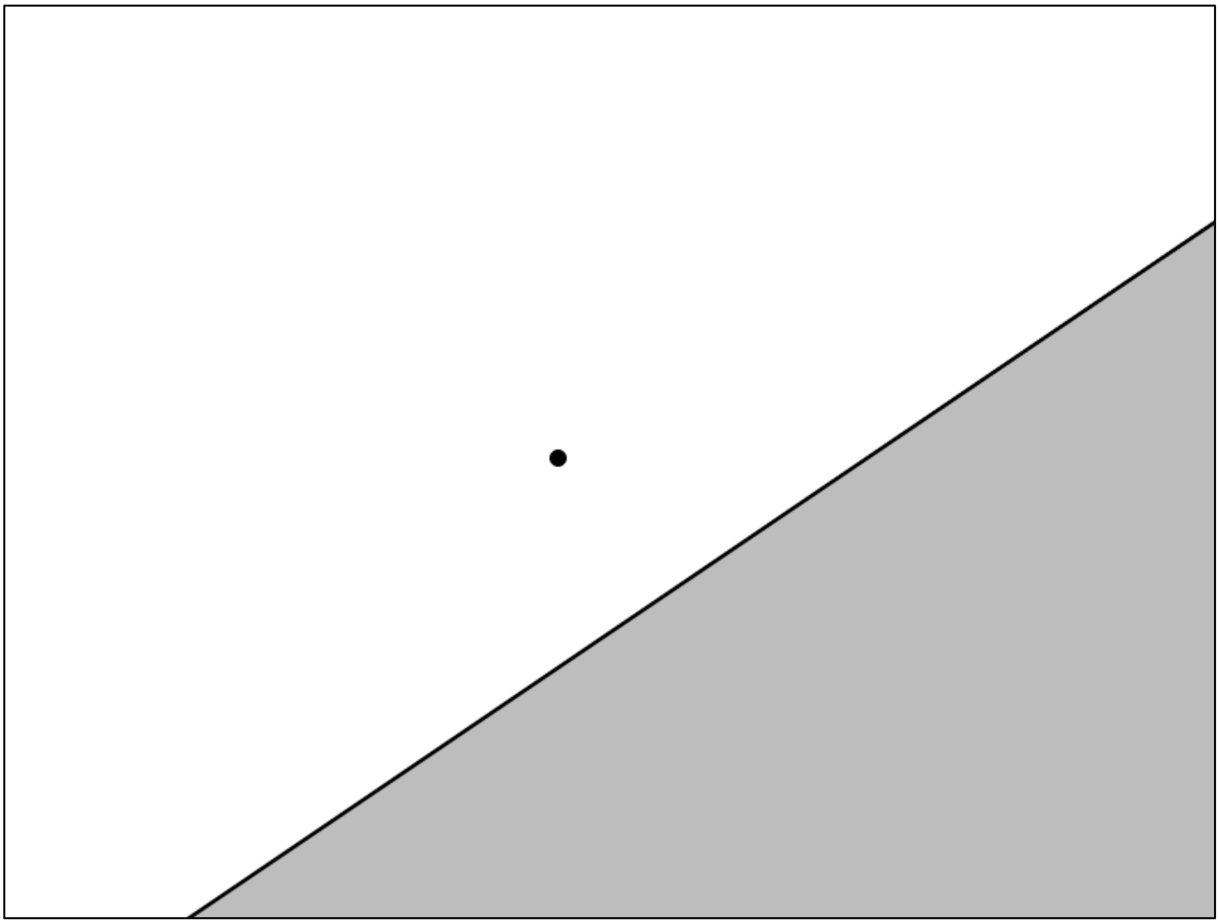
①



②



4. Que devient la frontière maritime dans le cas d'une côte rectiligne et d'une île ponctuelle ? Comment construire avec précision des points de cette frontière ? Construisez ensuite cette frontière avec un logiciel tel que GEOGEBRA. Avez-vous déjà rencontré une ligne possédant cette forme auparavant ?



5. Comment pouvez-vous vérifier que la frontière de la question 4 possède effectivement cette forme connue ?

FRONTIÈRES MARITIMES (2)

1. Que devient la frontière entre les eaux territoriales d'une petite île ponctuelle et d'une grande île circulaire (figure 1) ? Imaginez une méthode pour construire avec précision des points de cette frontière. Construisez ensuite cette frontière avec un logiciel tel que GeoGebra.

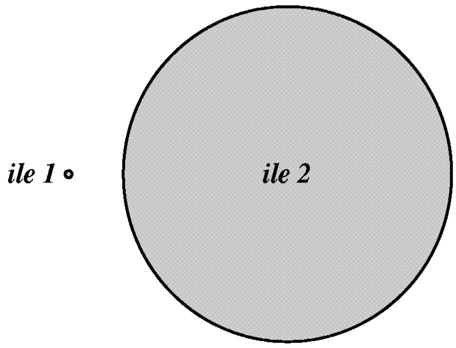


Fig. 1

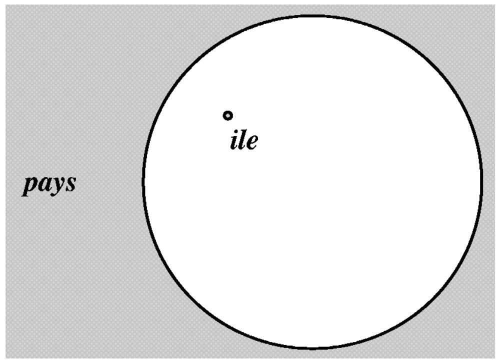


Fig. 2

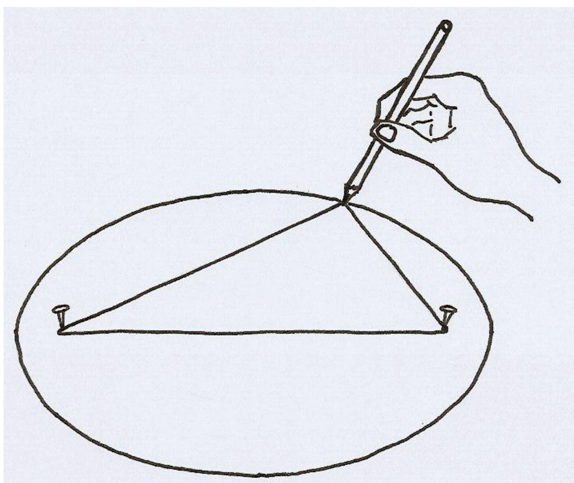
2. Une petite île ponctuelle est enclavée dans un grand lac circulaire, bordé par un seul autre pays (figure 2). Imaginez une méthode pour construire avec précision des points de la frontière maritime entre les deux états. Construisez ensuite cette frontière avec un logiciel tel que GeoGebra.

Dans le cas où l'île est à l'extérieur du disque, la frontière est une branche d'*hyperbole*.
Dans le cas où l'île se trouve à l'intérieur du disque, la frontière est une *ellipse*.
Ces courbes sont définies précisément par ailleurs.

3. Sur la figure réalisée avec GeoGebra, déplacez l'île à l'intérieur du lac. Que se passe-t-il ? Toutes les ellipses sont-elles semblables ?

4. Placez maintenant un point P quelconque sur l'ellipse. Utilisez le logiciel pour indiquer la distance entre P et l'île, ainsi que la distance entre P et le centre du cercle. Faites varier P et noter les nouvelles valeurs des distances. Quelle relation simple pouvez-vous conjecturer entre celles-ci ?

5. Le schéma ci-dessous montre une façon de tracer une courbe à l'aide d'une ficelle tendue entre deux clous. Expliquez pourquoi la courbe ainsi construite est bien une ellipse.



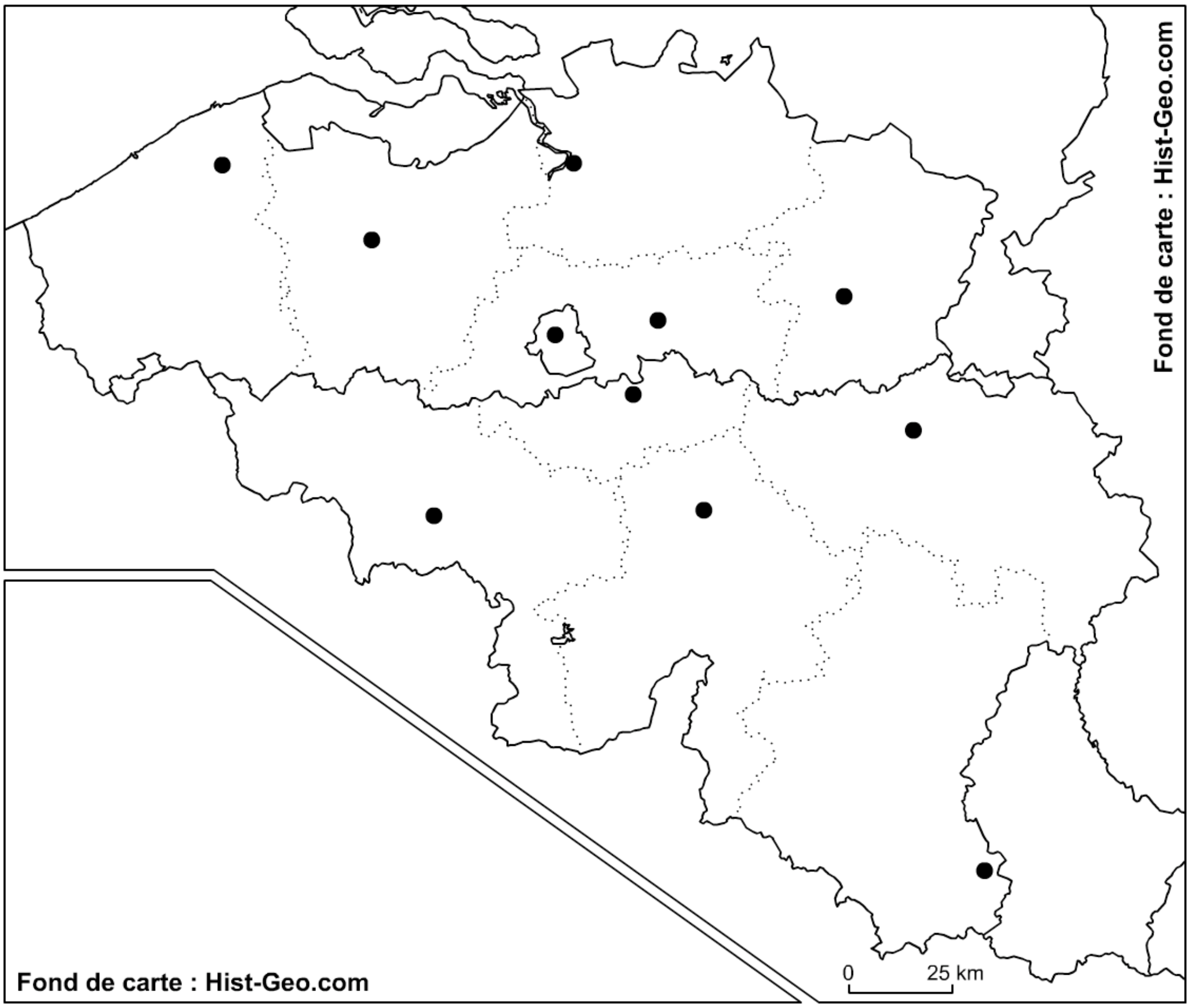
SURVOLER LA BELGIQUE

(Source : FRÉDÉRICKX M. [1994], *Une étude de coniques … Pour ne pas tomber en panne de kérosène*, UREM - Université Libre de Bruxelles, collection : Les Cahiers du CeDoP).

1. Avec une quantité de kérosène suffisante pour parcourir 40 kilomètres en avion, quelles régions peut-on survoler au départ de Bruxelles, si l'on désire revenir à Bruxelles ? Représentez la zone de survol possible sur la carte ci-dessous[2] .

2. Avec une quantité de kérosène suffisante pour parcourir 130 kilomètres en avion, quelles régions peut-on survoler au départ de Namur, si l'on désire atterrir à Liège ? Représentez cette zone sur la carte.

3. Quelles sont les villes, et autres endroits de Belgique, situés à la même distance du littoral belge et de Mons ? Situez ces villes sur la carte.



[2] http://www.hist-geo.com/Fond-de-carte/Belgique/index.php

RÉFLEXION, TANGENTES ET PLIAGES

A Lessive, dans l'entité de Rochefort en province du Luxembourg, se trouve un centre de télécommunications. On y voit des antennes réceptrices paraboliques, dont la plus grande a un diamètre de 30 mètres.

La cuvette d'une antenne parabolique a la forme d'un *paraboloïde de révolution*, c'est-à-dire du solide engendré par la rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie. Le récepteur de l'antenne est placé au foyer du paraboloïde.

Il est en effet important que le récepteur soit précisément placé au foyer, car des ondes arrivant sur le réflecteur parallèlement à l'axe du paraboloïde, sont toutes réfléchies en ce point. Pourquoi ? C'est ce que nous allons tenter d'expliquer maintenant.

Tout d'abord, nous devons comprendre comment une onde se réfléchit sur une surface courbe. Le cours de physique vous a appris que la réflexion des ondes obéit à la loi de SNELL-DESCARTES : l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence (figure 1).

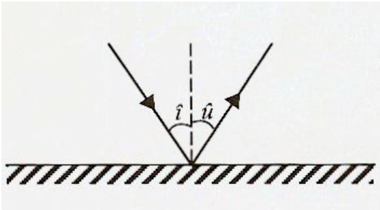


Fig. 1

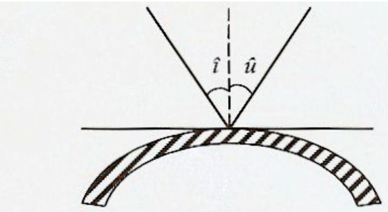
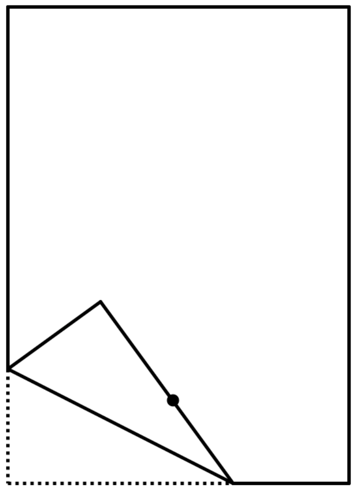


Fig. 2

Le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans un plan perpendiculaire à la surface réfléchissante. Si celle-ci est courbe, on considère le plan tangent au point où le rayon incident se réfléchit (figure 2).

Nous allons maintenant nous livrer à un travail qui, à première vue, n'a aucun rapport avec les antennes. Pourtant, de manière assez surprenante, cette nouvelle approche va nous permettre de comprendre la réflexion sur une surface parabolique !

1. Prenez une feuille de papier et marquez-y un point, à environ 5 ou 6 centimètres d'un des bords. Pliez maintenant la feuille de façon à ce qu'un de ses bords passe par ce point. Appuyez et lissez afin de bien marquer le pli. Recommencez plusieurs fois l'opération, c'est-à-dire faites de nouveaux plis, en faisant passer le même bord de la feuille par le point marqué au début.



Si vous observez le résultat de votre activité de pliage, vous constatez que les plis se trouvent dans une zone bien délimitée de la feuille, et qu'une autre partie de celle-ci est dépourvue de pli. La frontière de la zone de plis semble avoir la forme d'une parabole.

2. Démontrer qu'il s'agit bien d'une parabole. À quoi correspondent les plis ?
   Voici quelques questions supplémentaires pour vous guider.

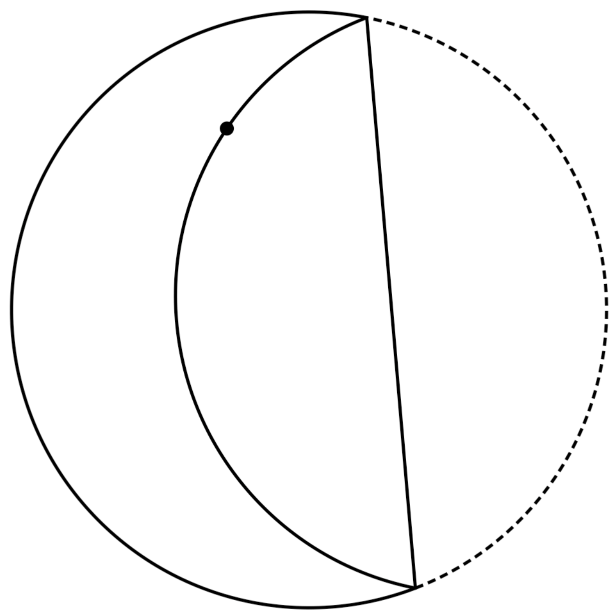
   a) En pliant, vous amenez un point du bord sur le point fixe. Que représente le pli par rapport à ces deux points ?
   b) Si la courbe suggérée par les plis est bien une parabole, quel serait son foyer et quelle serait sa directrice ?
   c) À quelle propriété les points d'une parabole satisfont-ils ?

3. Dépliez la feuille et tracez-y un rayon incident parallèle à l'axe de la parabole. Tracez ensuite le rayon réfléchi. Que pouvez-vous conclure ?

4. Pouvez-vous maintenant expliquer ce qui se passe avec les antennes paraboliques ?

Vers d'autres courbes ...

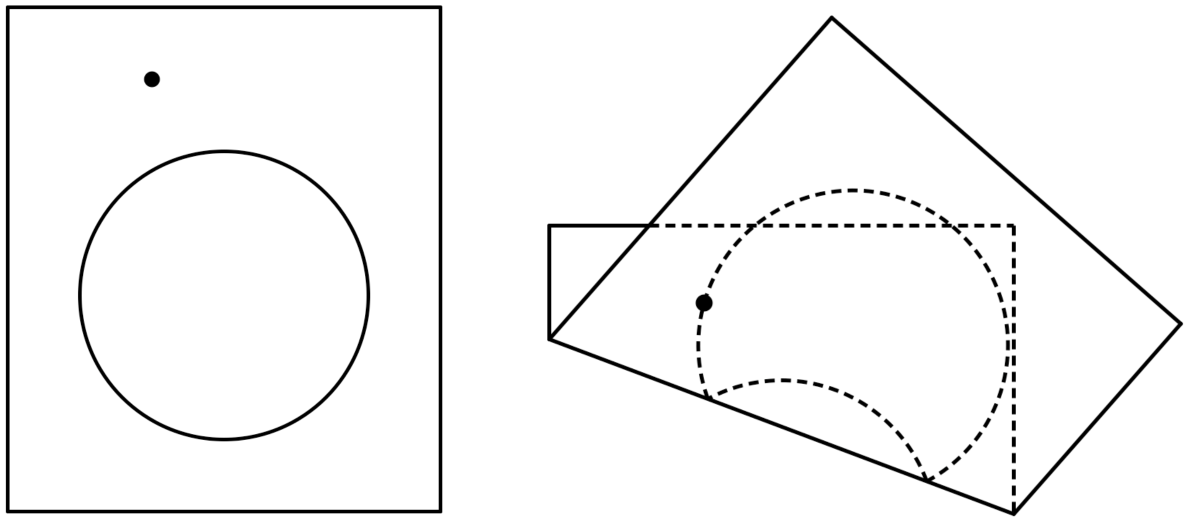
5. Prenez une feuille de papier, tracez-y un cercle aussi grand que possible et découpez-le. À l'intérieur du cercle, marquez un point, différent du centre. Pliez de manière à amener le cercle sur ce point. Appuyez et lissez afin de bien marquer le pli. Recommencez plusieurs fois l'opération, c'est-à-dire faites de nouveaux plis, en faisant passer le bord par le point marqué au début.



6. Démontrez que la courbe suggérée par les plis est une ellipse.

7. Dépliez la feuille et tracez-y un rayon incident, issu du centre du cercle. Tracez ensuite le rayon réfléchi. Que pouvez-vous conclure ?

8. Prenez encore une feuille de papier et tracez-y un cercle. Marquez un point à l'extérieur du cercle. Pliez de manière à amener le cercle sur ce point. Recommencez autant de fois que nécessaire.



9. Démontrez que la courbe suggérée par les plis est une hyperbole.

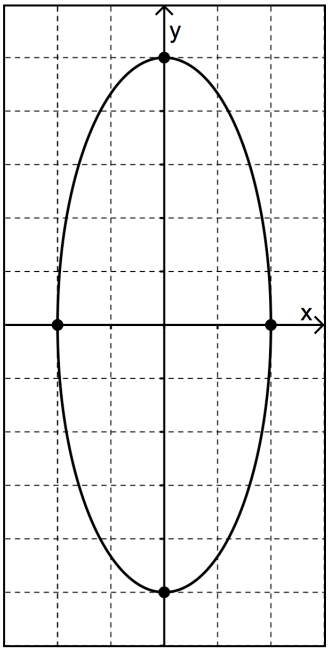
10. Dépliez la feuille et tracez-y un rayon incident, issu du centre du cercle. Tracez ensuite le rayon réfléchi. Que pouvez-vous conclure ?

RETROUVEZ LA CONIQUE …

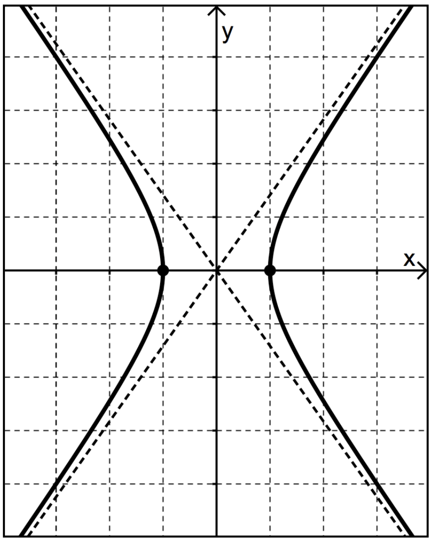
Pour chacune des équations cartésiennes suivantes, retrouvez la conique correspondante. Justifiez votre réponse.

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$
2. $y^2=-4x$
3. $x^2+(y+1)^2=4$
4. $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$
5. $4y+x^2=0$
6. $-(x+2)^2+(y+1)^2=1$
7. $9\cdot(x-1)^2+(y+3)^2=9$
8. $x^2-2y^2=-1$
9. $2x^2+16x-y+28=0$
10. $x^2-4y^2-2x+8y-7=0$
11. $25x^2+4y^2-100=0$
12. $y^2+2y-x=0$

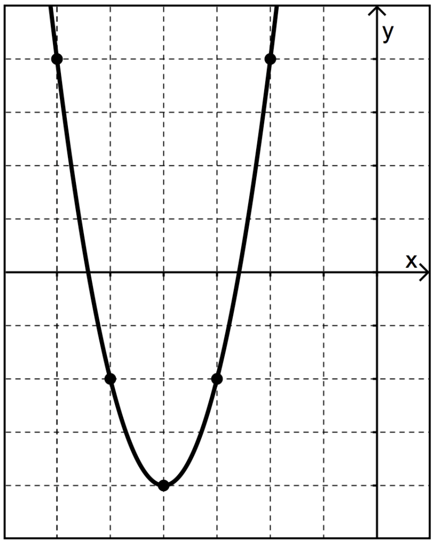
A



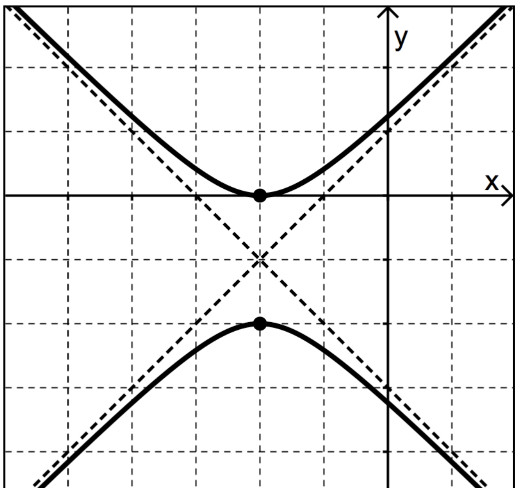
B



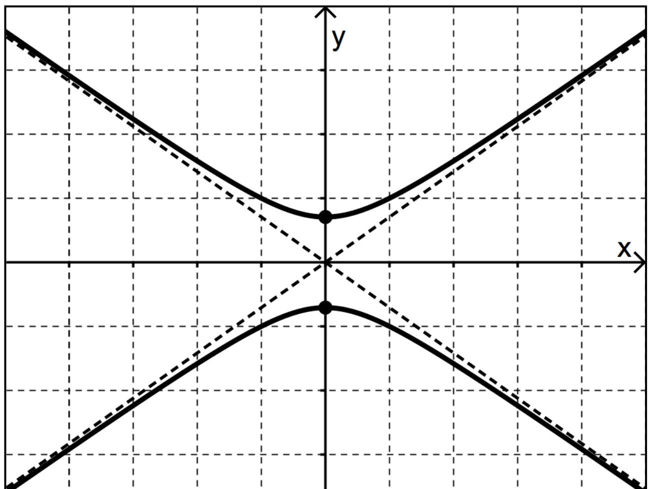
C



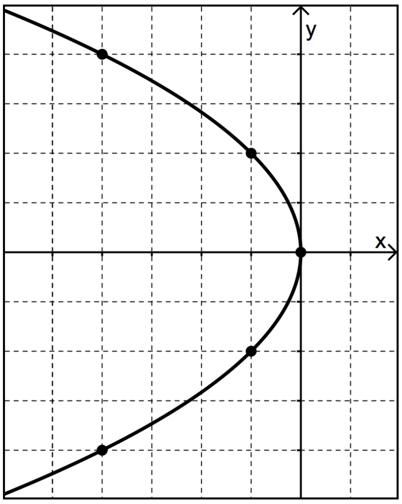
D



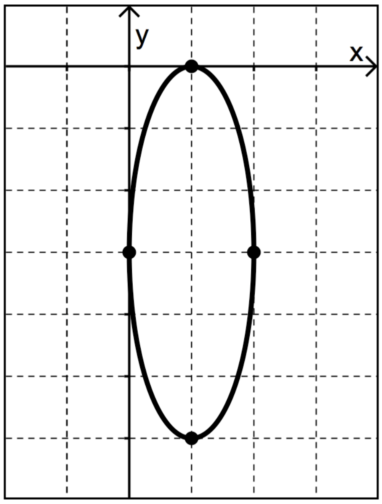
E



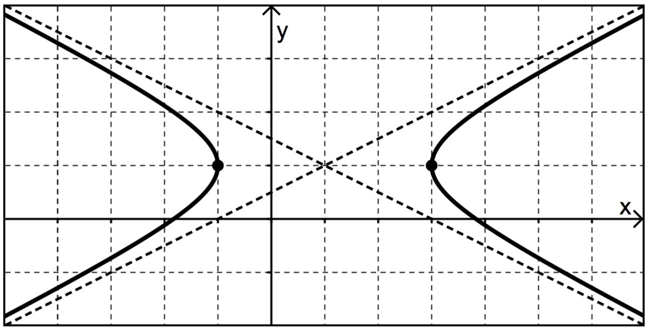
F



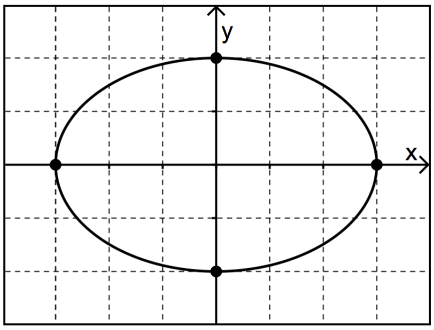
G



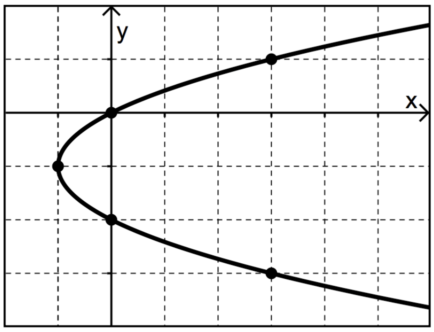
H



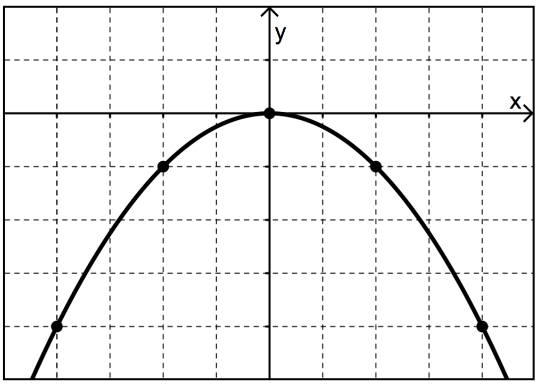
I



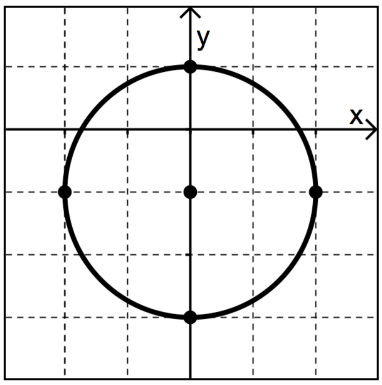
J



K

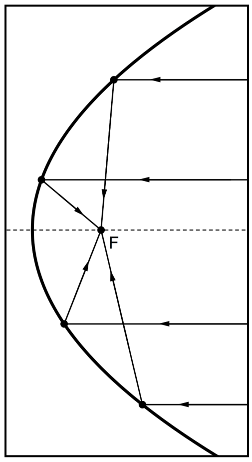


L



ANTENNES, RÉFLECTEURS, TÉLESCOPES …
Et autres objets utilisant les propriétés optiques des coniques

1. Four solaire



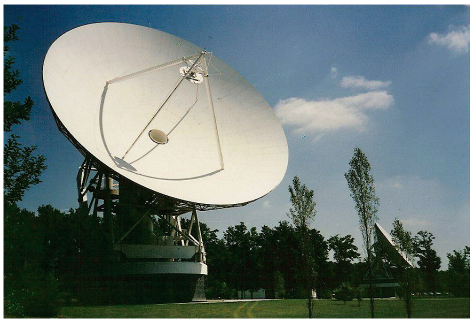
Dans un four solaire, les rayons du Soleil sont dirigés vers un miroir parabolique, parallèlement à l'axe de celui-ci.
Les rayons sont alors réfléchis vers le foyer, ce qui permet d'y obtenir des températures très élevées (c'est d'ailleurs la raison pour laquelle un tel dispositif ne doit pas être réalisé « en amateur » en raison du danger qu'il présente).

Si un four solaire est constitué d'un miroir parabolique de 98 (cm) de diamètre et d'une profondeur de 30 (cm), calculer à quelle distance du fond du miroir il faut placer les aliments à cuire.

Le grand four solaire d'Odeillo dans le sud de la France (Pyrénées-Orientales).
Des miroirs orientables situés à flanc de montagne, dirigent les rayons du Soleil vers d'autres miroirs disposés en paraboloïde.

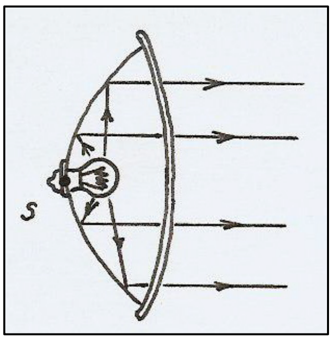
2. Antennes réceptrices

Les antennes réceptrices, comme celles de la station de Lessive, près de Rochefort, ont la forme d'un paraboloïde de révolution.



Sachant que l'assiette parabolique a une profondeur de 6 mètres, et que le foyer est situé à 9,375 mètres du fond de l'assiette, calculer son diamètre.

3. Phare de voiture

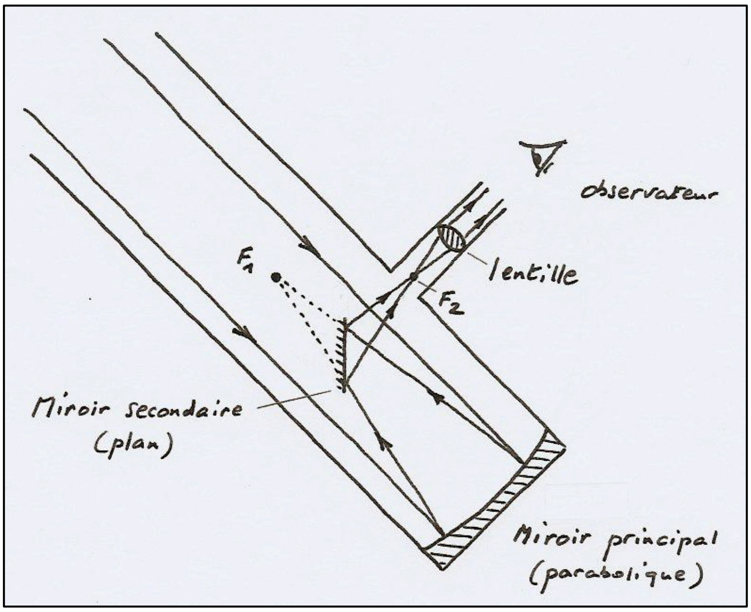


Un paraboloïde peut également servir de projecteur (principe de retour inverse de la lumière), pour un phare de voiture par exemple.

Si la cuvette a un diamètre de 15(cm) et une profondeur de $2{,}5$(cm), calculer à quelle distance du point S il faut placer le filament de l'ampoule pour que le faisceau réfléchi soit parallèle à l'axe du paraboloïde.

4. Télescope de NEWTON

Voici le schéma de principe du télescope imaginé par Isaac NEWTON (1643 - 1727).

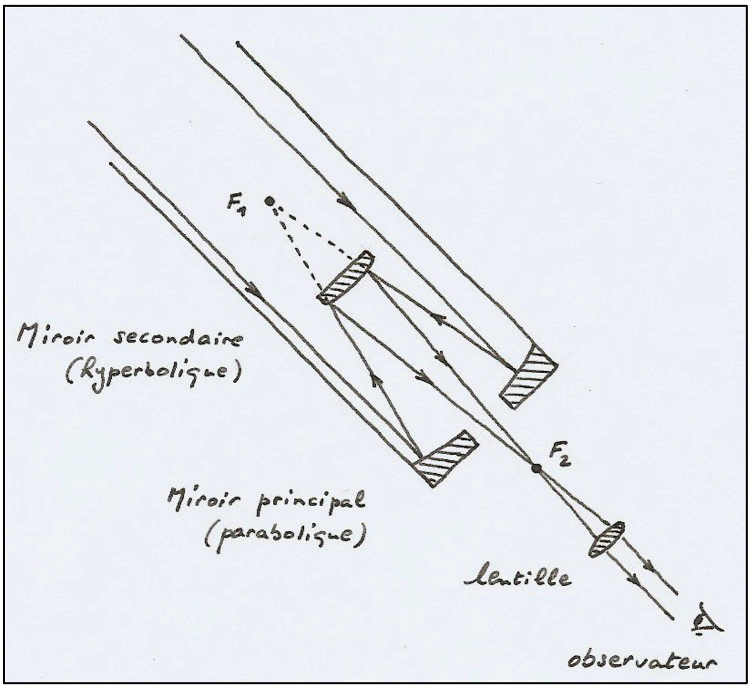


a) Expliquez précisément le fonctionnement de ce télescope. Énoncez les propriétés géométriques et physiques qui entrent en jeu.

b) D'un point de vue géométrique, où se trouve le point F_2 par rapport au point F_1 ?

5. Télescope de CASSEGRAIN

Contemporain de NEWTON, Laurent CASSEGRAIN (1629 - 1693) proposa un type de télescope dont voici le schéma de principe.



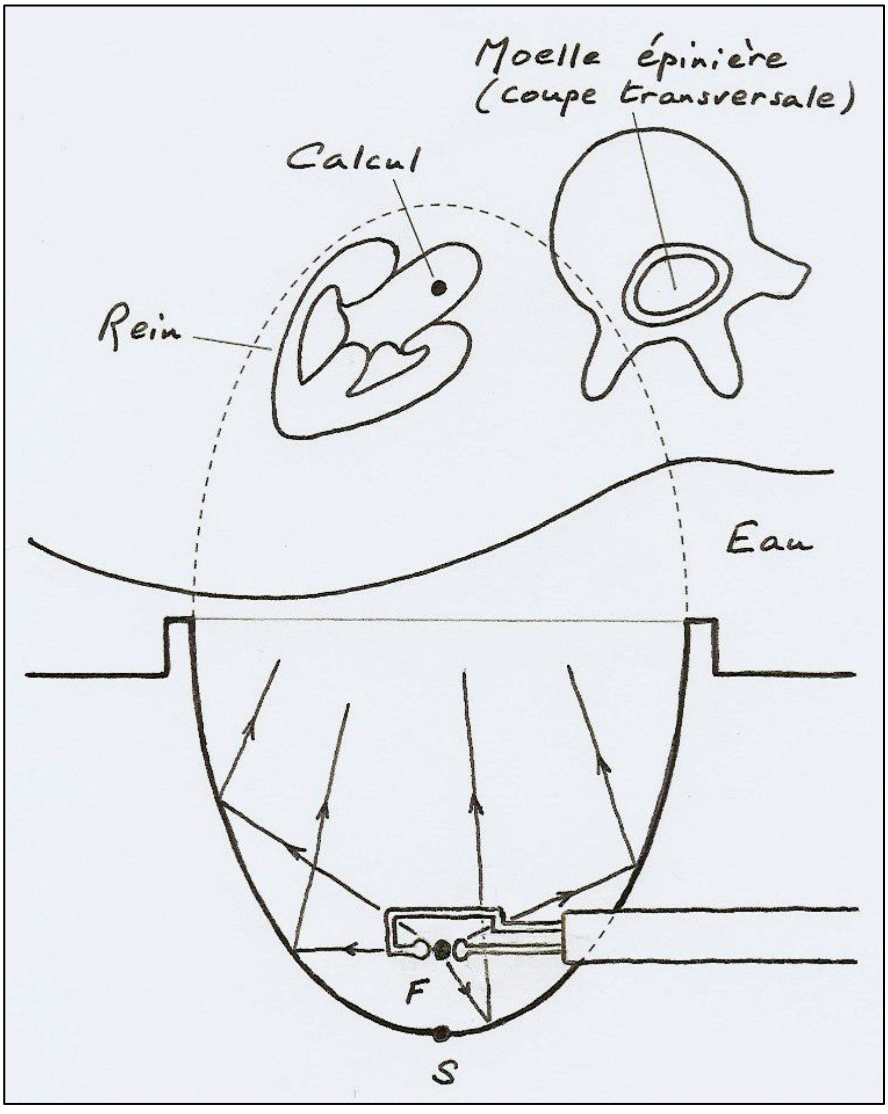
Expliquez précisément le fonctionnement de ce télescope. Le point F_1 joue un double rôle. Lequel ? Énoncez les propriétés géométriques et physiques qui entrent en jeu.

6. Destruction d'un calcul rénal à l'aide d'un lithotripteur

« La propriété de réflexion des ellipsoïdes (et des hémi ellipsoïdes) est utilisée en médecine moderne dans un appareil appelé lithotripteur*, qui désintègre les calculs rénaux au moyen d'ondes de choc sous-marines à haute énergie. (…)*
Le temps d'hospitalisation avec cette technique est habituellement de 3 - 4 jours, au lieu des 2 - 3 semaines pour une intervention chirurgicale conventionnelle. De plus, le taux de mortalité est inférieur à 0,01 % comparé à 2 - 3 % pour la chirurgie traditionnelle[3]. »

Extrait de « Algèbre et Trigonométrie, avec Géométrie Analytique », par Swokowski et Cole (1997).

Voici un schéma illustrant une opération par lithotripteur.



a) Après avoir pris des mesures extrêmement précises, l'opérateur positionne l'appareil de manière à détruire la petite pierre. Où doit-elle se trouver pour cela ?

b) Si le lithotripteur est un hémi ellipsoïde haut de 15(cm) , et de 18(cm) diamètre, calculer la distance entre S et F.

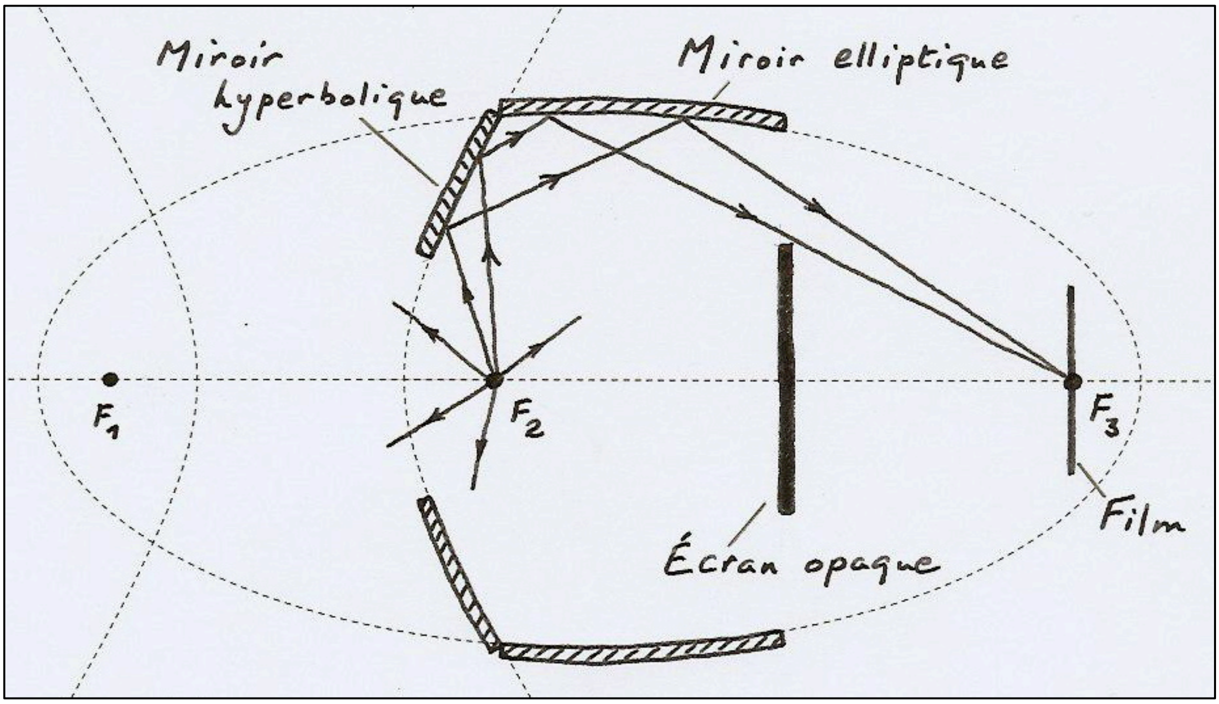
c) A quelle distance de S, dans la direction verticale, devrait se situer le calcul rénal ?

[3] Ce dernier pourcentage me semble élevé et demande à être vérifié (A. Vandenbruaene).

7. Observation d'une réaction de fusion

De nombreuses recherches sont actuellement menées sur la fusion nucléaire, avec l'espoir d'obtenir un jour une source d'énergie quasiment inépuisable.

Dans le cadre de ces expériences, le laser est utilisé pour bombarder de minuscules quantités de deutérium et de tritium. Le schéma ci-dessous représente une caméra à rayons X , utilisée au *Lawrence Livermore Laboratory* (Californie), pour observer l'implosion de ces petites cibles.
Cet appareil combine un miroir hyperbolique et un miroir elliptique. Les points F_1 et F_2 sont les foyers de l'hyperbole, tandis que F_1 et F_3 sont ceux de l'ellipse (les deux coniques ont donc un foyer commun). La cible est placée en F_2 et un film est placé en F_3 pour enregistrer le phénomène.



a) Expliquez précisément le fonctionnement de cette caméra.

b) Les miroirs auraient pu être plus ou moins grands. En fait, leurs dimensions n'ont pas été fixées au hasard, et sont liées à la présence de l'écran opaque visible sur le schéma. Expliquez.

TRAJECTOIRES DE PLANÈTES, COMÈTES ET AUTRES SATELLITES

L'astronome allemand Johannes KEPLER (1571 - 1630) fut le premier à émettre l'hypothèse qu'une planète décrit une trajectoire elliptique, le Soleil étant situé en un des foyers de l'ellipse.

À l'origine de cette découverte, il y eut la rencontre de KEPLER et de l'astronome danois Tycho BRAHE (1546 - 1601) à Prague en 1600. Ce dernier mourut l'année suivante et légua une foule d'observations très précises à KEPLER. Lorsque KEPLER se mit à travailler sur la trajectoire de la planète Mars, sa conviction était qu'elle était circulaire mais excentrée par rapport au Soleil. Cependant, cette hypothèse ne concordait pas avec les observations réalisées par Tycho BRAHE. Comme KEPLER avait entière confiance en celles-ci, il finit par opter, en 1603, pour une trajectoire elliptique. Il étendit ensuite cette conclusion aux autres planètes.

Johannes KEPLER en 1610

1. Les planètes du système solaire

Le tableau suivant donne, pour quelques planètes du système solaire, le demi grand axe de l'orbite elliptique, ainsi que son excentricité.
Le demi grand axe est exprimé en *unités astronomiques*. Une *unité astronomique* (UA) est égale au demi grand axe de l'orbite terrestre, soit environ $149{,}6 \cdot 10^6$ kilomètres.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne
½ grand axe	0,387	0,723	1	1,524	5,2	9,54
Excentricité	0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056

a) Pour la Terre, calculez la distance maximale et la distance minimale au Soleil (c'est-à-dire quand la Terre se trouve respectivement à l'*aphélie* et au *périhélie*). Quelle distance sépare le Soleil du centre de l'ellipse ?

b) Pour la planète Mars, calculer le rapport entre le petit axe et le grand axe de l'orbite. Commentez.

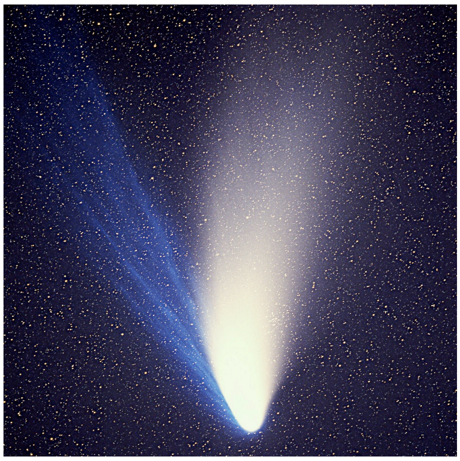
c) Pour quelle planète ce rapport sera-t-il le plus faible ? Et pour quelle planète sera-t-il le plus grand ? Pourquoi ?

2. Quelques comètes

a) La comète de HALLEY a une orbite elliptique d'excentricité $e \approx 0{,}967$. Lorsqu'elle est au périhélie, sa distance au Soleil vaut environ 0,587 (UA) . Calculez sa distance au Soleil lorsqu'elle est à l'aphélie.

b) Alors que la comète de HALLEY vient nous rendre visite tous les 76 ans, celle de ENCKE a une période beaucoup plus courte : 3,3 ans. Sachant que l'excentricité de son orbite vaut environ 0,847 et que sa distance maximale au Soleil est de 4,096 (UA), calculez sa distance au Soleil lorsqu'elle est au périhélie.

c) La comète HALE-BOPP, une des comètes les plus brillantes de ces dernières décennies, est passée au périhélie en 1997.
Sachant que les distances maximales et minimales entre le Soleil et cette comète valent respectivement 0,914 (UA) et 371,146 (UA) , calculez l'excentricité de son orbite.

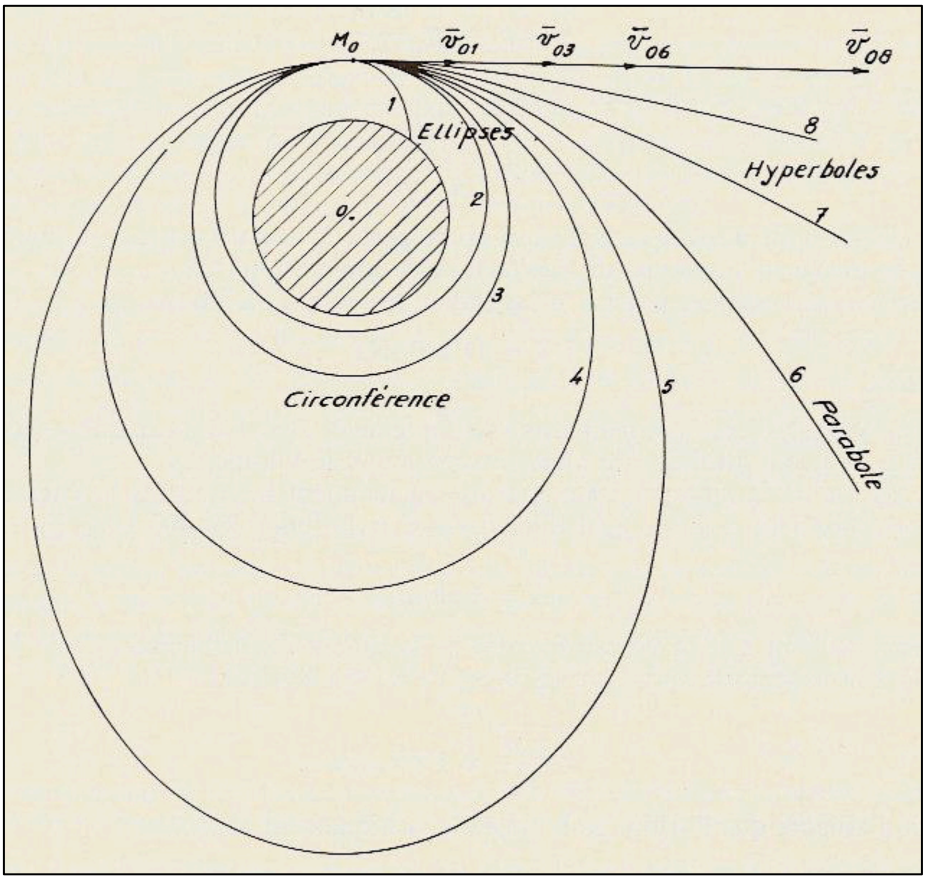


La comète HALE-BOPP, peu près son passage au périhélie (avril 1997)

3. Orbites de satellites

« Si d'un point M_0 , extérieur à la Terre et situé à une distance r_0 de son centre, on lance un objet avec une vitesse $\overline{v_0}$, différentes trajectoires sont possibles suivant l'orientation et la grandeur de $\overline{v_0}$.
Pour préciser ces différentes trajectoires, envisageons le cas particulier où r_0 est fixé et où $\beta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (vitesse initiale normale à r_0). Si l'on augmente progressivement v_0 , on obtient successivement des trajectoires elliptiques, une trajectoire parabolique et des trajectoires hyperboliques (voir figure), le centre de la Terre étant toujours un des foyers de ces coniques. »

FRANEAU J. [1968], *Physique (tome premier)*, Presse Académiques Européennes, Bruxelles.



a) Selon la figure précédente, à partir de quelle vitesse un satellite s'échappera-t-il de l'attraction terrestre ? Quelle trajectoire suivra-t-il alors ?

b) Sous diverses hypothèses simplificatrices, on peut montrer que la vitesse d'échappement v_{0e} est donnée par la formule

$$v_{0e} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \ .$$

Trois constantes interviennent dans cette formule :

- $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right)$ (constante de la gravitation universelle) ;
- $M \approx 5{,}97 \cdot 10^{24} (kg)$ (masse de la Terre) ;
- $r_0 \approx 6{,}37 \cdot 10^{6} (m)$ (rayon moyen de la Terre)

Si un satellite est lancé avec une vitesse initiale de 5000 (m/s) , quelle type de trajectoire suivra-t-il ?

Pour terminer ce sujet, voici trois exercices inspirés de la traduction française d'un ouvrage américain[4].

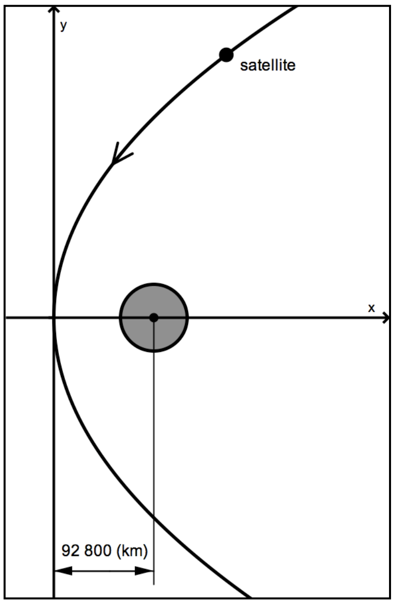
4. Trajectoire d'un satellite

Un satellite va parcourir une trajectoire parabolique à l'approche d'une planète si sa vitesse v , en mètres par seconde, est donnée par la formule

$$v = \sqrt{\frac{2k}{d}} \ ,$$

où d est la distance, en mètres, entre le satellite et le centre de la planète, et k une constante positive. La planète sera située au foyer de la parabole et le satellite s'en approchera une seule fois.

Supposons que le satellite soit conçu pour suivre une trajectoire parabolique et s'approcher à $92\,800$ (km) de Mars.



a) Fixons un repère orthonormé comme dans la figure ci-contre. Déterminer une équation cartésienne de la trajectoire du satellite.

b) Pour la planète Mars, on a $k \approx 4{,}28 \cdot 10^{13}$.
Calculer la vitesse maximale du satellite.

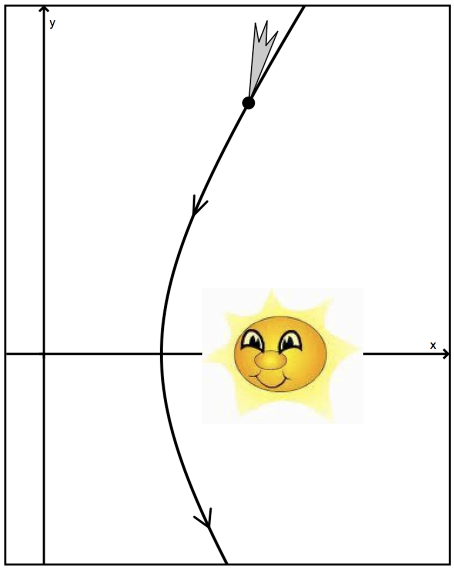
c) Calculer la vitesse du satellite lorsque son ordonnée est égale à $160\,000$ (km) .

[4] SWOKOWSKI E. W. and COLE J. A. [1997], *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*, PWS publishing Company.

5. Trajectoire d'une comète

Supposons que, dans un repère orthonormé comme celui de la figure, une comète suive une trajectoire d'équation

$$\frac{x^2}{26 \cdot 10^{14}} - \frac{y^2}{18 \cdot 10^{14}} = 1 \ \text{(avec } x > 0 \text{)}.$$



Le Soleil occupe un des foyers de la conique.

a) Déterminer les coordonnées du Soleil.

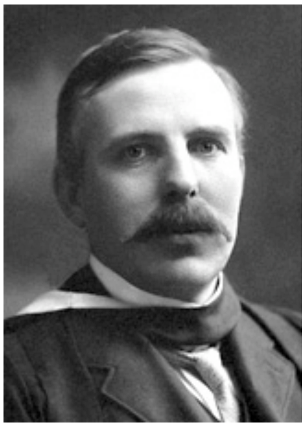
b) Pour que la comète maintienne une trajectoire hyperbolique, sa vitesse minimale v, en mètres par seconde, doit satisfaire à l'inégalité

$$v > \sqrt{\frac{2k}{r}},$$

où r est la distance entre la comète et le centre du Soleil, en mètres, et $k \approx 1{,}33 \cdot 10^{20}$ est une constante. Déterminer v lorsque r est minimale.

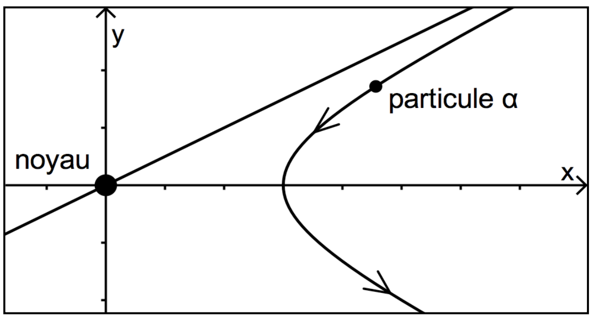
6. Particules alpha

En 1909, GEIGER et MARSDEN, sous la direction de RUTHERFORD, soumirent une feuille mince en or à un bombardement de particules α. Certaines de celles-ci traversèrent la feuille en poursuivant leur trajectoire en ligne droite, mais d'autres furent déviées de façon importante, voire même rejetées vers l'arrière.
Cette expérience permit de mettre en évidence l'existence du noyau atomique. RUTHERFORD vit également une analogie entre la trajectoire hyperbolique de certaines comètes au voisinage du Soleil, et celle de certaines particules déviées par le noyau.



Ernest RUTHERFORD (1871-1937)

Si une particule α, guidée par la droite $y = \frac{1}{2}x$, se dirige vers un noyau situé à l'origine, et s'approche jusqu'à 3 unités de celui-ci, quelle est l'équation de sa trajectoire ?



RAPPORT DE DISTANCES - EXCENTRICITÉ

Nous connaissons la définition d'une parabole : « lieu géométrique des points du plan situés à égale distance d'un point fixe (foyer) et d'une droite fixe (directrice) ne comprenant pas ce point ».

Nous allons modifier cette définition et découvrir d'autres courbes.

Considérons un foyer F en $(0,0)$ et une directrice d d'équation $x = 4$.

1. Déterminer le lieu géométrique des points du plan situés *deux fois plus près* de F que de d.

   a) Faites une recherche sur papier. Construisez quelques points du lieu demandé.

   b) Ouvrez le logiciel GeoGebra et faites apparaître F et d à l'écran.

   c) Insérez un curseur pour un paramètre a variant de 0 à 10 par pas de $0{,}1$.

   d) Créez un cercle de centre F et de rayon a.

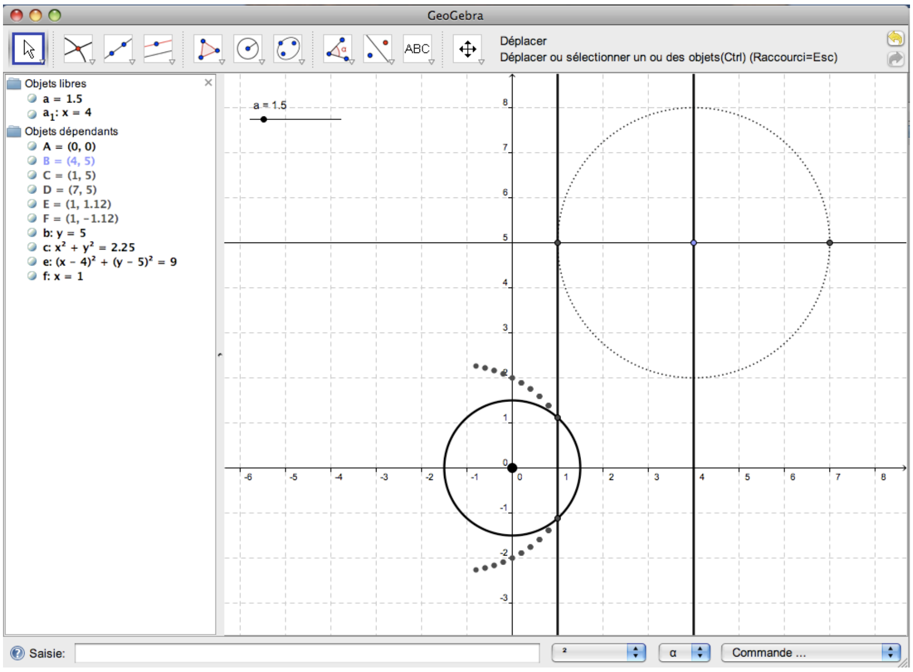
   e) Créez une parallèle à d située à une distance $2a$ de celle-ci. De quel côté ?

   f) Faites varier les valeurs de a via le curseur. Marquez les points d'intersection du cercle et de la parallèle à d. Activez la trace de ces points d'intersection.

   g) Créez une animation via le curseur.

   h) Quelle courbe observez-vous ?

   i) Déterminez l'équation cartésienne de cette courbe en traduisant analytiquement le fait que $d(P,F) = \frac{1}{2} \cdot d(P,d)$. Caractérisez la courbe obtenue.



2. Déterminer le lieu géométrique des points du plan situés *deux fois plus loin* de F que de d.
   Suivez une démarche analogue à celle décrite au point 1.

INTERFÉRENCES

SUPERPOSITIONS D'ONDES PROVENANT DE DEUX SOURCES DE MÊME FRÉQUENCE

Un bassin - une *cuve à ondes* - contient de l'eau dont la surface est calme et plane.
Ensuite, deux pointes, reliées à un même vibreur, frappent la surface de l'eau à intervalles réguliers (figure 1).
Ces pointes sont ainsi deux sources A et B d'ondes circulaires de même fréquence, de même amplitude et vibrant en concordance de phase.

Fig. 1

Pour fixer les idées, supposons que

- les pointes frappent la surface une fois par seconde (la fréquence des sources est donc de 1 Hertz) ;
- la vitesse des ondes circulaires ainsi créées est $v = 1$ (u/s) , la lettre u désignant l'unité de longueur ;
- les sources sont distantes de 4 (u).

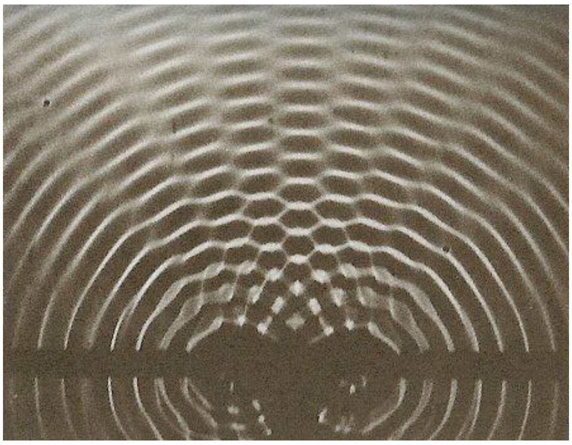


Fig. 2

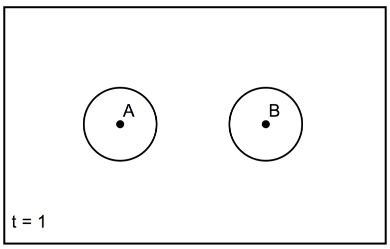
Ce que l'on observe au cours de cette manipulation, est la *superposition d'ondes provenant de deux sources de même fréquence*, c'est-à-dire une *interférence*.

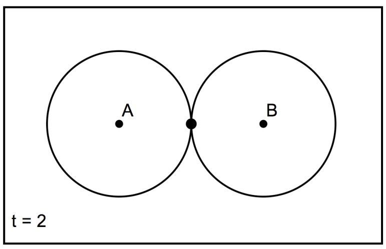
La figure 2 montre un instantané pris au cours d'une telle expérience.

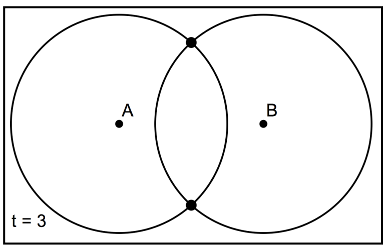
En certains points de la surface de l'eau, un maximum d'une onde émise par A se superpose à un maximum d'une onde émise par B . Dans ce cas, on dit qu'il y a *interférence constructive* et le point est soumis à une élongation maximale.

Problème : en quels points de la surface de l'eau un maximum d'une onde émise par A se superpose-t-il à un maximum d'une onde émise par B ?

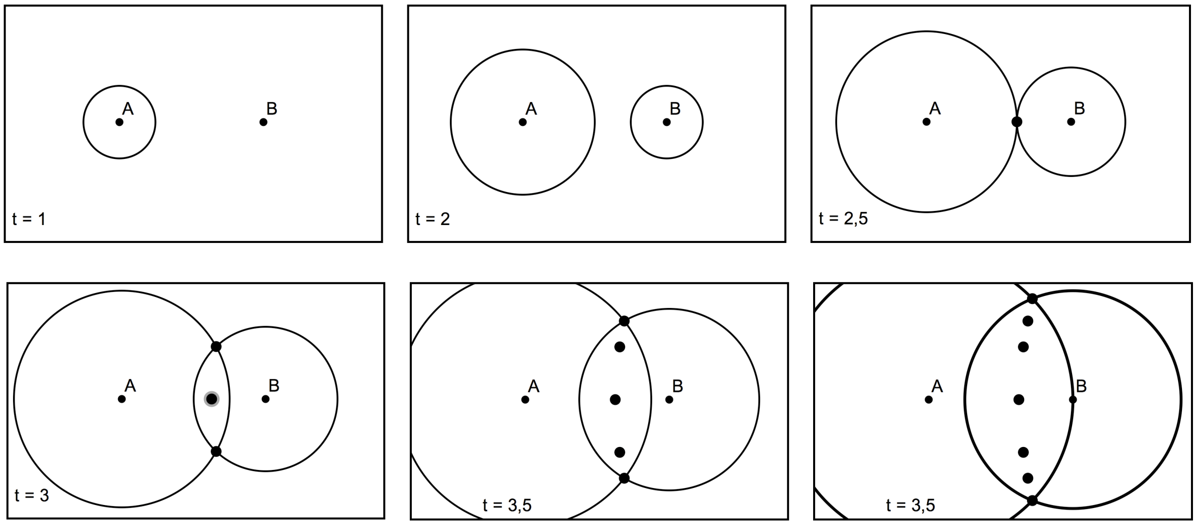
1. A l'instant $t = 0$, une onde est émise par A et une autre par B . Voici l'évolution de chaque front d'onde circulaire en fonction du temps ($t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$).
   Décrire précisément l'ensemble des points où se superposeront les deux maxima.







2. Nous pouvons aussi étudier la superposition de l'onde émise par A en $t = 0$ avec celle émise par B en $t = 1$.



Décrire précisément le lieu géométrique des points où se superposent les deux maxima (ce lieu est nommé *ligne de tempête* par les physiciens).

3. Dans un repère orthonormé où l'on a $A(-2,0)$ et $B(2,0)$, déterminer une équation cartésienne du lieu précédent.

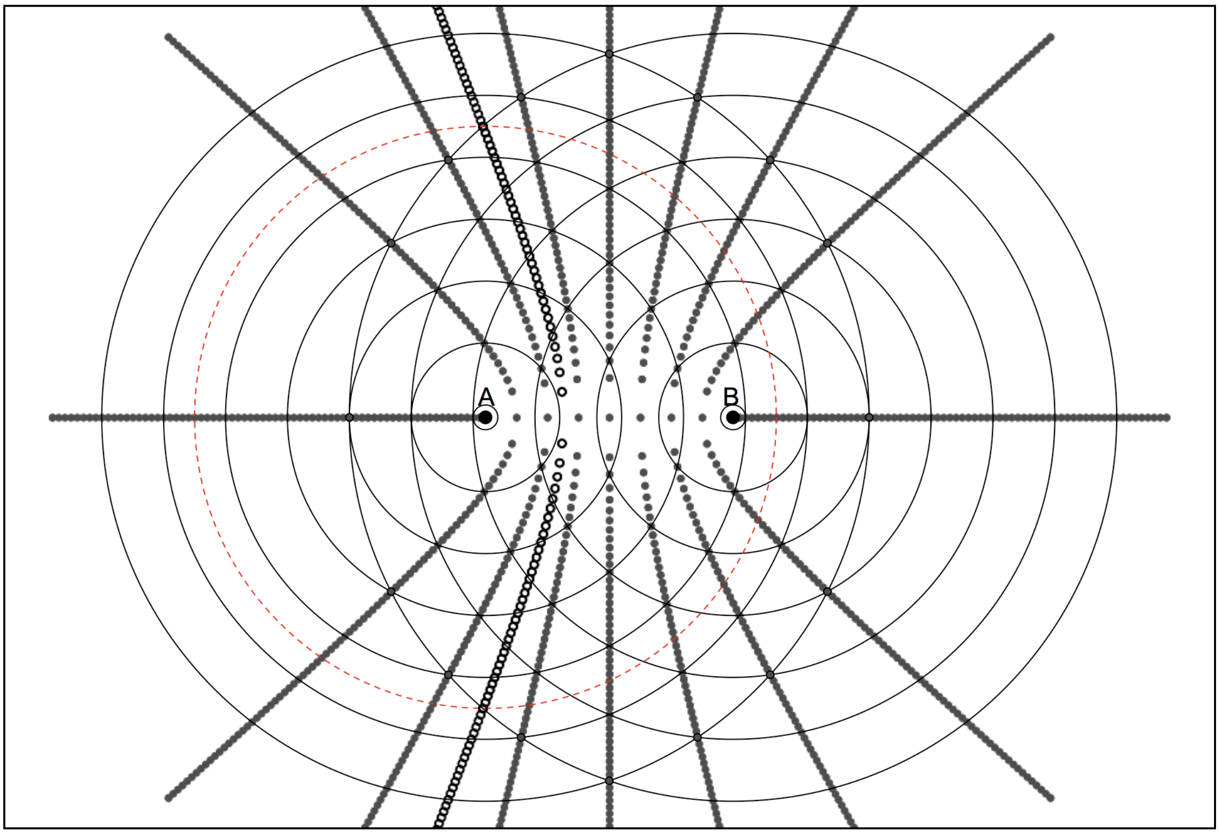
4. Etudier de la même façon la superposition de l'onde émise par A en $t = 0$ avec celle émise par B en $t = 2$. Dans le même repère que précédemment, décrire et déterminer une équation cartésienne de la ligne de tempête correspondante.

5. Il existe d'autres lignes de tempête. Il y aura ainsi superposition du maximum de l'onde émise par A en $t = 0$, avec les maxima des ondes émises par B entre $t = 0$ et $t = 4$ (pas au-delà, pourquoi ?) ; le maximum de l'onde émise par A en $t = 1$, se superposera avec les maxima des ondes émises par B entre $t = 0$ et $t = 5$, etc.

   Explorer les autres lignes de tempête avec un logiciel tel que GEOGEBRA. Celui-ci permet également de créer une animation montrant les fronts d'ondes circulaires émis à intervalles réguliers, et interagissant entre eux (marquer les points d'intersection de deux fronts d'ondes et activer leurs traces afin de visualiser les lignes de tempête).
   Ce travail peut déboucher sur un écran comme celui présenté à la page suivante.

Remarques

- Les physiciens parlent de ligne de tempête pour désigner un ensemble de points où deux ondes arrivent en phase.
  En général, on peut démontrer qu'une ligne de tempête est le lieu des points P tels que $\left\| |PA| - |PB| \right\| = k\lambda \quad (k \in Z)$, où λ est la longueur d'onde des ondes émises.
- Il existe également des lignes de repos (là où la somme de l'onde émise par une source et de l'onde émise par l'autre sourc est nulle).
  On peut démontrer qu'une ligne de repos est le lieu des points P tels que $\left\| |PA| - |PB| \right\| = (2k+1)\lambda/2 \quad (k \in Z)$, où λ est la longueur d'onde des ondes émises.



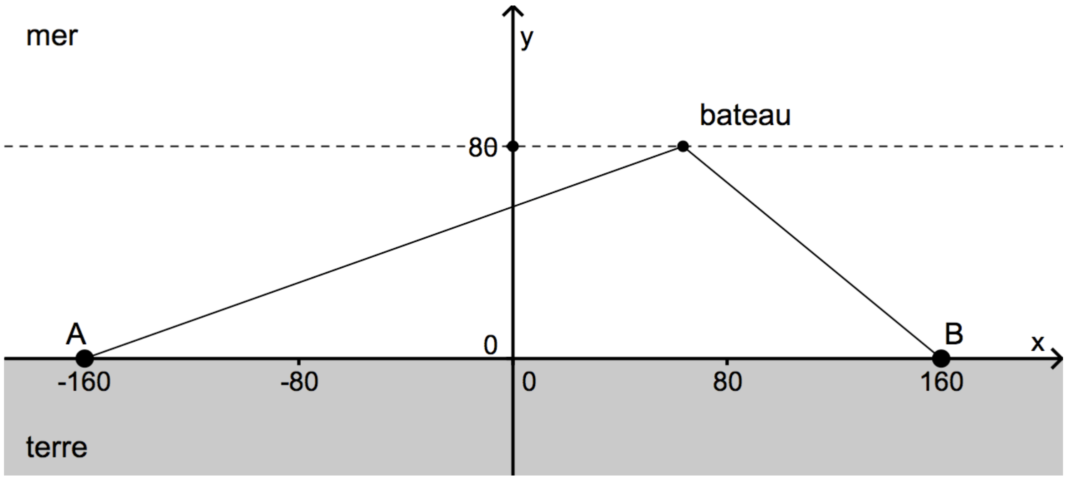
Quelques lignes de tempête résultant de la superposition des maxima des ondes émises par A et par B.

Une ligne de repos (les points « blancs ») a également été représentée : elle résulte de la superposition du maximum de l'onde émise par B en $t = 0$ et du minimum de l'onde émise par A en $t = 1{,}5$ (le cercle en pointillés).

NAVIGATION MARITIME : LE SYSTÈME *LORAN*

1. Sur une côte que nous supposerons rectiligne, se trouvent deux postes de surveillance A et B, distants de 320 (km). Un bateau navigue parallèlement à la côte, à une distance de 80 (km) de celle-ci.
   Des signaux radio sont émis à partir de A et de B, et se propagent à la vitesse de 294 mètres par microseconde : $294(m/\mu s)$.

   Sachant qu'à 13 heures, le signal parti de B atteint le bateau $400\ (\mu s)$ après le signal émis par A, déterminer la position du bateau à cet instant.
   Pour résoudre ce problème, travailler dans le système de coordonnées de la figure suivante.



2. Un autre bateau navigue parallèlement à la côte, à 160 (km) de celle-ci. Il émet un signal de détresse qui est reçu aux stations A et B. En mesurant la différence de temps entre les deux réceptions, il est établi que le bateau se trouve 256 (km) plus près de B que de A. Calculer la position exacte du bateau.

Le système de navigation (Long Range Navigation)

Il s'agit d'un système de localisation de bateaux, comprenant deux paires d'émetteurs radio, tels que ceux situés en A_1, A_2 et B_1, B_2 sur la figure ci-contre.
Si des signaux émis par A_1 et A_2 sont reçus par un bateau situé en P, la différence entre les temps d'arrivée des signaux permet de calculer la différence entre les distances $|PA_1|$ et $|PA_2|$. Cela permet de situer P sur une des branches d'une hyperbole de foyers A_1 et A_2. En répétant cette procédure pour l'autre paire d'émetteurs, on peut situer P sur une des branches d'une hyperbole de foyers B_1 et B_2. Le bateau se trouve à l'intersection de ces deux branches.
Notons que le système LORAN est quelque peu tombé en désuétude depuis l'apparition du GPS.