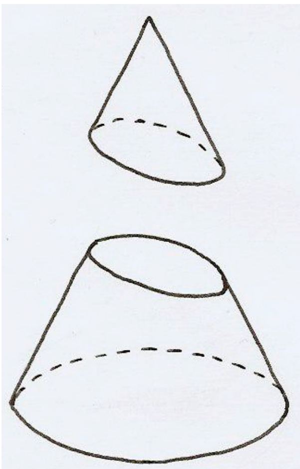
LES CONIQUES

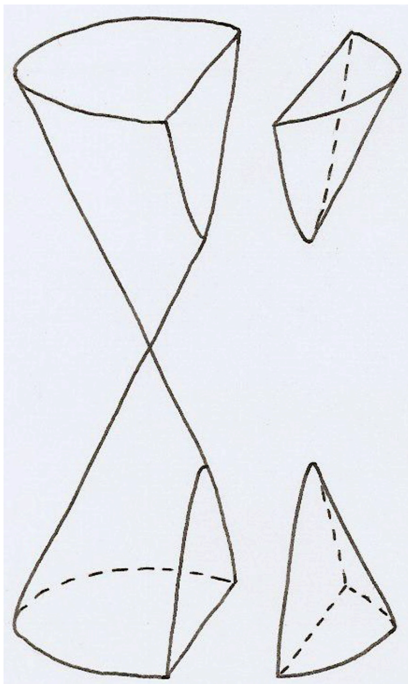
Un peu d'histoire …

« L'étude des sections coniques en Grèce remonte au IV^e siècle avant Jésus-Christ. MÉNECHME, élève d'EUDOXE, contemporain de PLATON, les aurait découvertes dans ses études sur la duplication du cube. (…)
Après MÉNECHME, ARISTÉE (seconde moitié du IV^e siècle ?) s'intéressa aux coniques dans son ouvrage - aujourd'hui perdu - *Des lieux solides* ; ces lieux ne seraient rien d'autre que les coniques. MÉNECHME et ARISTÉE savaient que la section d'un cône par un plan perpendiculaire à sa génératrice donnait des courbes différentes selon que l'angle au sommet du cône était aigu, droit ou obtus. Les prédeceseurs d'APOLLONIUS, y compris ARCHIMÈDE et EUCLIDE, utilisaient la terminologie introduite par ARISTÉE et parlaient de section du cône à angle aigu (ellipse), section du cône à angle droit (parabole) et section du cône à angle obtus (hyperbole). APOLLONIUS innove en engendrant les trois coniques par l'intersection d'un même cône oblique à base circulaire par un plan variable. Selon que le plan sécant rencontre toutes les génératrices sur une même nappe du cône, est parallèle à l'une des génératrices ou rencontre les deux nappes du cône, on est en présence de l'ellipse, de la parabole ou de l'hyperbole. »

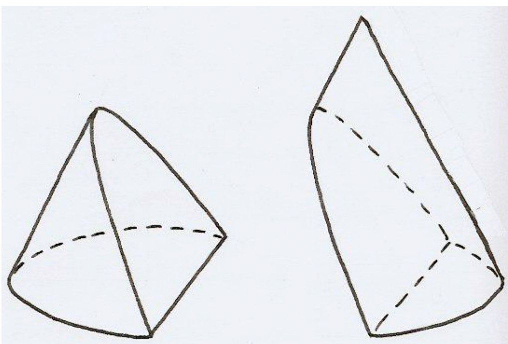
Extrait de « Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales » , A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, Éd. du Seuil, 1986.



Section elliptique



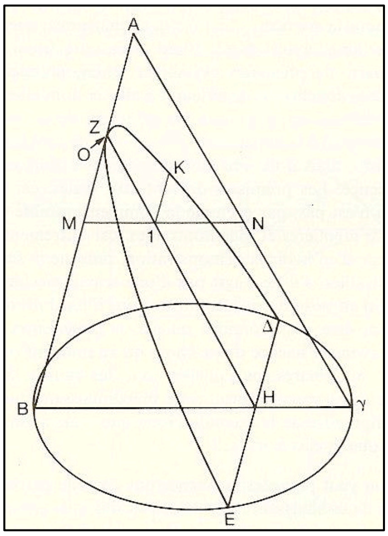
Section hyperbolique



Section parabolique

APOLLONIUS a écrit un traité intitulé *Les sections coniques* . En voici un extrait, d'une lecture difficile, mais pouvant donner lieu à un excellent travail de réflexion.

« Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe ; si, de plus, le diamètre de la section est parallèle à l'un des côtés du triangle passant par l'axe, le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, équivaut au rectangle délimité par la droite qu'elle découpe sur le diamètre, du côté du sommet de la section, et par une certaine droite dont dont le rapport à la droite située entre l'angle du cône et le sommet de la section est le même que celui du carré de la base du triangle passant par l'axe au rectangle délimité par les deux côtés restants du triangle. Nous appellerons une telle section une parabole. »



Les Sections coniques, livre I, proposition 11.

La façon dont nous allons aborder les coniques est toute différente. Au lieu de les considérer comme des sections planes d'un cône, nous allons les définir comme des *lieux géométriques*. Une parabole par exemple, est définie comme étant le lieu des points du plan situés à égale distance d'un point fixe appelé *foyer*, et d'une droite fixe appelée *directrice*. On peut démontrer que cette définition est équivalente à celle qui se réfère à la section d'un cône.

Les démonstrations de ces équivalences, pour les trois coniques, ont été réalisées par DANDELIN et QUÉTELET, et sont entrées dans l'histoire des mathématiques sous le nom de *théorèmes belges*.

Germinal DANDELIN (1794 - 1897)

Adolphe QUÉTELET (1796 - 1874)

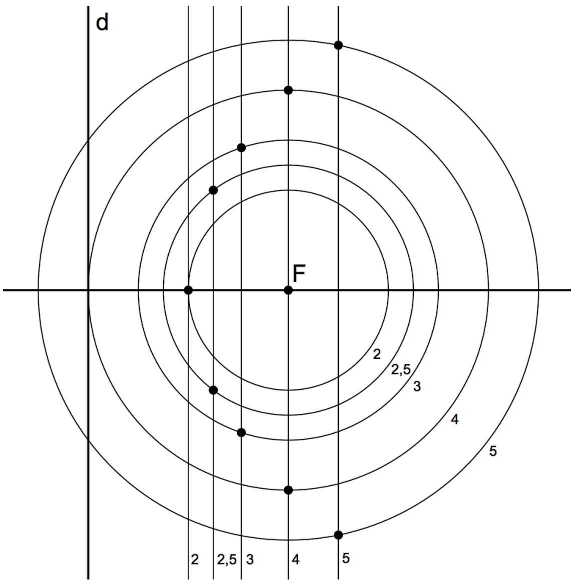
Bien qu'étudiées de façon approfondie par les Grecs il y a plus de deux mille ans, les coniques n'ont rien perdu de leur actualité. Elles permettent notamment de décrire les orbites de satellites, de planètes et de comètes, ainsi que les trajectoires de particules atomiques. Leurs propriétés géométriques sont exploitées dans la réalisation de divers types de miroirs, et trouvent même des applications dans le domaine de la médecine.

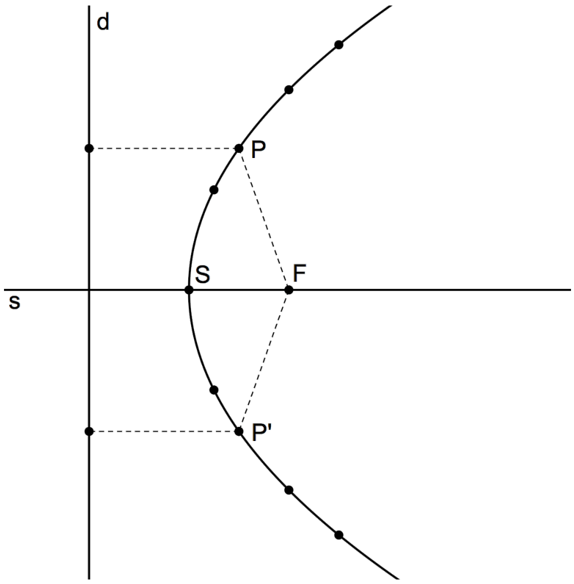
1. Paraboles

La parabole a déjà été étudiée en quatrième année, dans le contexte des fonctions du second degré. Elle a également été définie comme lieu géométrique. Rapellons-nous cette définition.

1.1. Définition et construction

Une parabole est le lieu géométrique des points du plan situés à égale distance d'un point fixe F (le *foyer*) et d'une droite fixe d (la *directrice*).





La définition de la parabole suggère une méthode de construction, illustrée par la figure de gauche. Il suffit de déterminer l'intersection du cercle de centre F et de rayon r et de la parallèle à d, menée à une distance r de la droite d (entre d et F bien sûr).

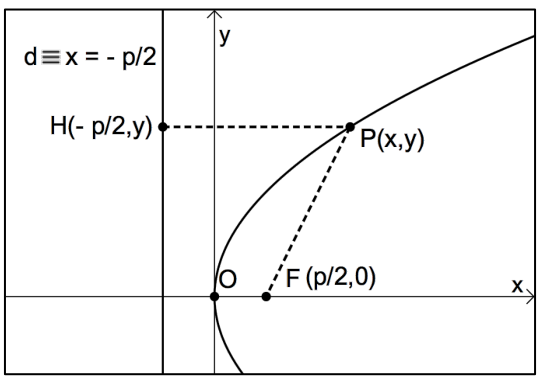
Pour l'exemple ci-dessus, la distance entre le foyer et la directrice a été choisie égale à 4 . On trace des cercles de centre F et de rayon r au moins égal à 2 (pourquoi ?). On construit les intersections de chaque cercle avec la parallèle à d qui lui correspond.
La droite passant par F et perpendiculaire à d est un axe de symétrie de la parabole. Le point commun à la parabole et à son axe de symétrie s est le sommet S de cette parabole.

1.2. Équation cartésienne d'une parabole

Soit p la distance entre le foyer et la directrice d'une parabole $\mathcal{P}$.

Choisissons un repère orthonormé de telle façon que l'origine soit le sommet de la parabole, et que l'axe des abscisses soit l'axe de symétrie de celle-ci.

Le foyer est ainsi le point $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ et la directrice la droite $d \equiv x = -\frac{p}{2}$.

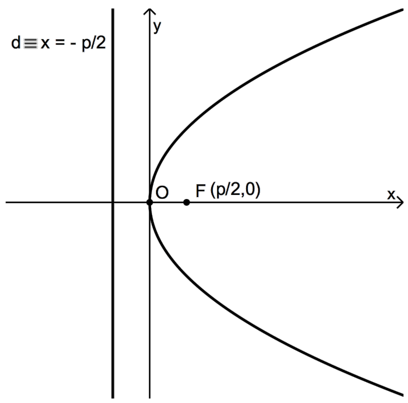
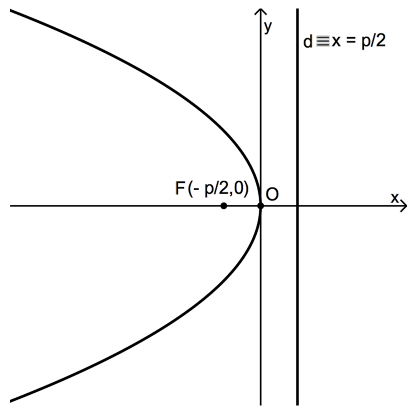
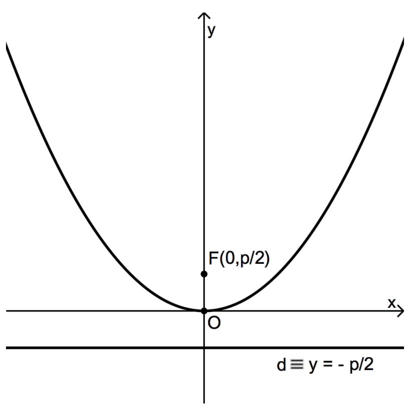
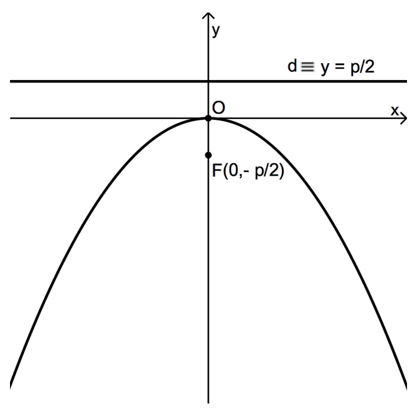


Exprimons la condition pour qu'un point $P(x,y)$ appartienne à cette parabole.

$$
\begin{aligned}
P(x,y) \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad d(P,F) = d(P,d) \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad -px + y^2 = px \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{y^2 = 2px}
\end{aligned}
$$

Cette dernière égalité est l'équation cartésienne d'une parabole de sommet $(0,0)$, dont l'axe de symétrie est l'axe des x , et dont tous les points ont une abscisse positive.
Nous dirons qu'il s'agit d'une « parabole horizontale ouverte à droite ».

Le tableau suivant donne l'équation cartésienne d'une parabole de sommet $(0,0)$ dans quatre cas, dont celui que nous venons de voir. On a toujours $p > 0$.

Parabole horizontale ouverte à droite	**Parabole horizontale ouverte à gauche**
 	
$\boxed{\mathcal{P} \equiv y^2 = 2px}$	$\boxed{\mathcal{P} \equiv y^2 = -2px}$
Parabole verticale ouverte vers le haut	**Parabole verticale ouverte vers le bas**
 	
$\boxed{\mathcal{P} \equiv x^2 = 2py}$	$\boxed{\mathcal{P} \equiv x^2 = -2py}$

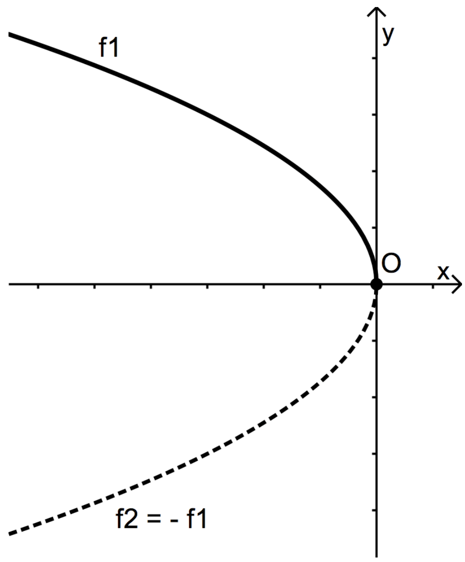
1.3. Fonctions associées à une parabole

Si l'on souhaite représenter une parabole via un logiciel ou une calculatrice graphique ne proposant pas le menu « coniques » , il est utile de passer par les fonctions.
De plus, les fonctions associées aux coniques nous serviront lorsque nous étudierons les tangentes à celles-ci.

Pour une parabole horizontale, nous avons $y^2 = \pm 2px \Rightarrow y = \pm\sqrt{\pm 2px}$. Nous en déduisons l'énoncé suivant.

> Une parabole horizontale ouverte à droite est la réunion des graphiques des fonctions
>
> $$f_1(x) = \sqrt{2px} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = -\sqrt{2px} \qquad (\, p > 0 \,)$$
>
> Une parabole horizontale ouverte à gauche est la réunion des graphiques des fonctions
>
> $$f_1(x) = \sqrt{-2px} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = -\sqrt{-2px} \qquad (\, p > 0 \,)$$

Par exemple, la parabole $\mathcal{P} \equiv y^2 = -3x$ est la réunion des graphiques de $f_1(x) = \sqrt{-3x}$ et de $f_2(x) = -\sqrt{-3x}$.



Pour les paraboles verticales, nous avons $y = \pm\dfrac{x^2}{2p}$, ce qui nous permet d'énoncer :

> Une parabole verticale est le graphique de la fonction du second degré
>
> - $f(x) = \dfrac{x^2}{2p}$ dans le cas de l'ouverture vers le haut $(\, p > 0 \,)$;
> - $f(x) = -\dfrac{x^2}{2p}$ dans le cas de l'ouverture vers le bas $(\, p > 0 \,)$.

Exercice résolu

Déterminer une équation cartésienne d'une parabole de sommet $(0,0)$, dont l'axe de symétrie est l'axe des abscisses, et comprenant le point $P(-3,2)$.
Donner les coordonnées du foyer et l'équation de la directrice de la parabole.

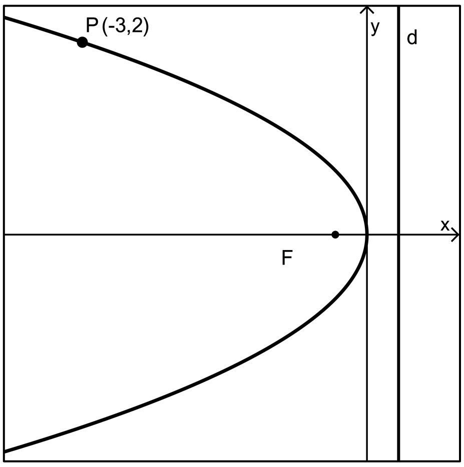
Solution

Les informations données dans l'énoncé nous apprennent que la parabole est horizontale et ouverte à gauche : $\mathcal{P} \equiv y^2 = -2px$.

Comme $P(-3,2) \in \mathcal{P}$, nous avons : $2^2 = -2p \cdot (-3)$ et donc $p = \dfrac{2}{3}$.

En conclusion :

$\mathcal{P} \equiv y^2 = -\dfrac{4}{3}x$ avec $F\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$ et $d \equiv x = \dfrac{1}{3}$.



Exercices sur la parabole

1. Déterminer le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P} \equiv y = -\dfrac{1}{6}x^2$.

---

2. Déterminer l'équation d'une parabole horizontale , dont le sommet se trouve à l'origine, et qui passe par le point $P(7,-3)$. Déterminer le foyer de la parabole.

---

3. Une parabole a pour sommet le point $S(-4,2)$ et pour directrice la droite $d \equiv y = 5$.

   a) Établir l'équation de la parabole sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.

   b) Déterminer le foyer de la parabole.

---

4. Déterminer le sommet, l'axe de symétrie et le foyer de chacune des paraboles suivantes.

   a) $\mathcal{P}_1 \equiv (y+4)^2 = 2(x-3)$

   b) $\mathcal{P}_2 \equiv (x-5)^2 = 4(y+1)$

   c) $\mathcal{P}_3 \equiv x^2 = y-1$

   d) $\mathcal{P}_4 \equiv y^2 = \dfrac{1}{2}(x+2)$

---

5. Soit la parabole $\mathcal{P} \equiv x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$. Déterminer ses sommet, axe de symétrie et foyer.

2. Ellipses

2.1. Définition et construction

Une ellipse est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes F_1 et F_2 (les *foyers*) est une constante.

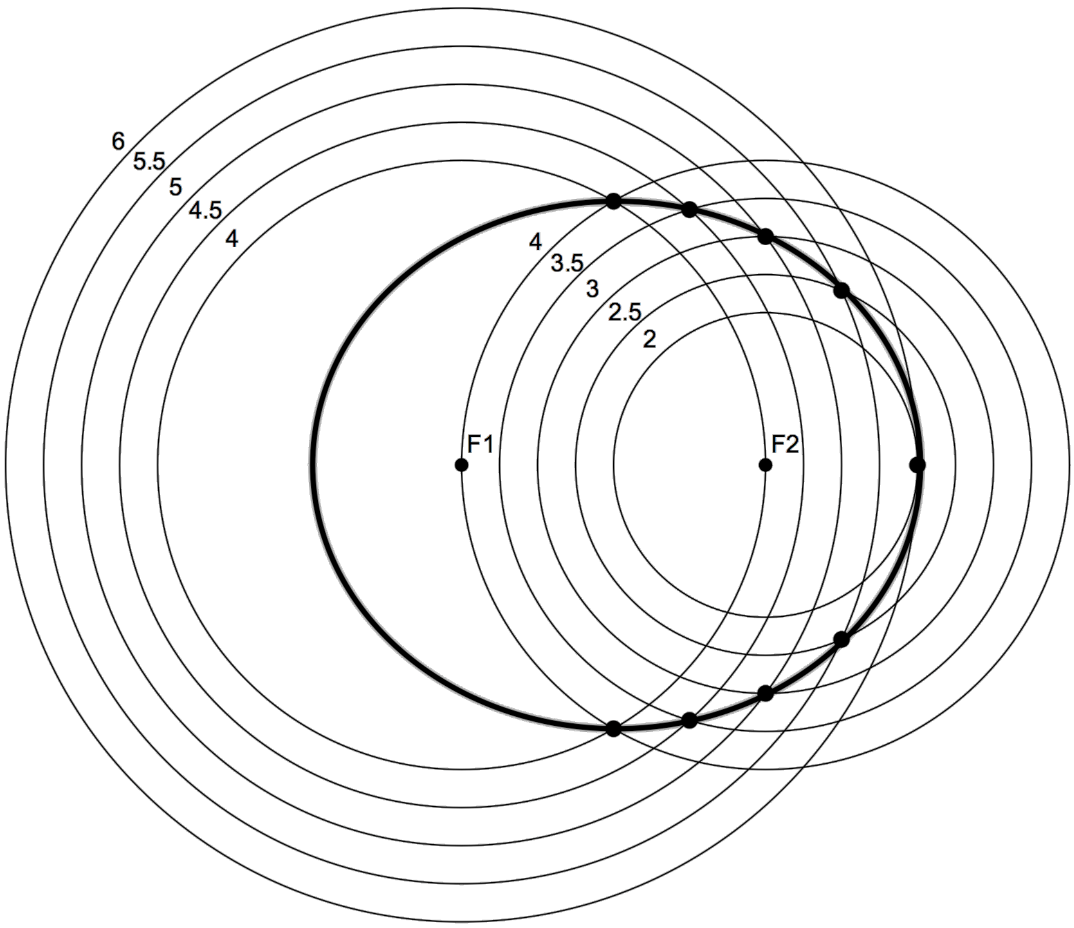
<u>Exemple</u> : deux foyers F_1 et F_2 sont distants de 4(cm) ; construire le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux foyers est égale à 8(cm).

<u>Construction</u>

Traçons par exemple

- un cercle de centre F_1 et de rayon 4 , et un cercle de centre F_2 et de rayon 4 ;
- un cercle de centre F_1 et de rayon 4.5 , et un cercle de centre F_2 et de rayon 3.5 ;
- un cercle de centre F_1 et de rayon 5 , et un cercle de centre F_2 et de rayon 3 ;
- etc.

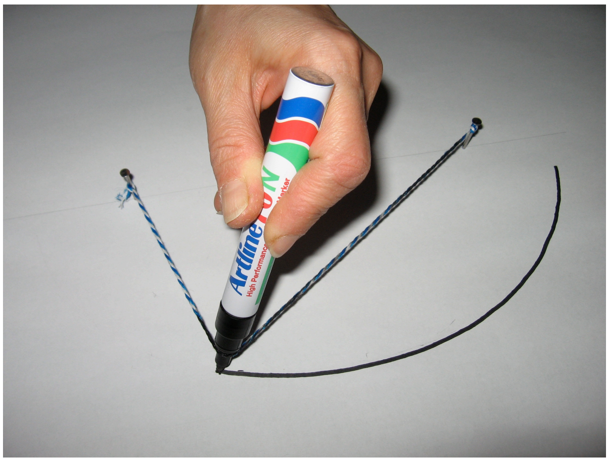
À chaque étape, il s'agit donc de construire un cercle de centre F_1 et de rayon r , et un cercle de centre F_2 et de rayon $(8 - r)$; les points d'intersection des deux cercles sont des points de l'ellipse. Notons que pour notre exemple il faut $2 \le r \le 6$, et que si $r = 2$ ou $r = 6$, il y a un seul point d'intersection (expliquer).



Un autre procédé de construction : la méthode du jardinier

Cette méthode doit son nom aux parterres elliptiques que peut réaliser un jardinier : il plante deux piquets dans le sol, attache une corde à ceux-ci, et trace un sillon dans la terre avec un troisième piquet, en maintenant la corde tendue.
La forme de la courbe dépend de la longueur de la corde et de la distance entre les piquets.

La photo illustre ce procédé sur papier



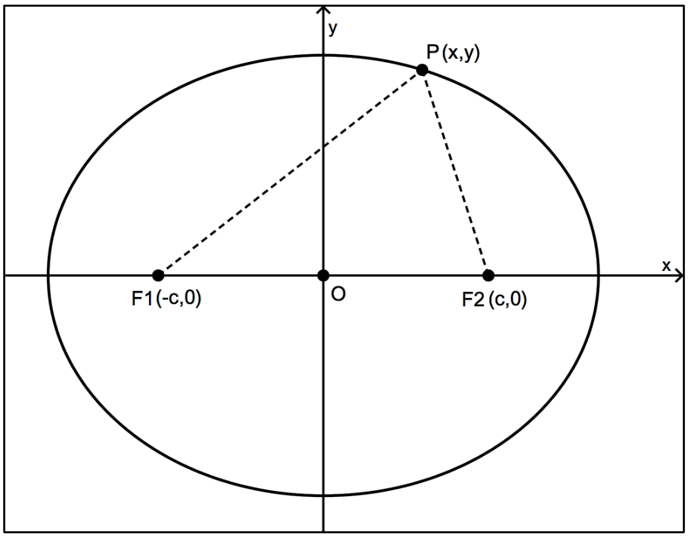
Expliquer pourquoi la courbe obtenue répond bien à la définition d'une ellipse.

2.2. Équation cartésienne d'une ellipse

Fixons un repère orthonormé en choisissant la droite F_1F_2 comme axe des abscisses, et la médiatrice du segment $[F_1F_2]$ comme axe des ordonnées.

Les foyers sont ainsi les points $F_1(-c,0)$ et $F_2(c,0)$ avec $c > 0$.

Soit P un point quelconque de l'ellipse. Désignons par $2a$ la somme constante des distances de P à F_1 et de P à F_2.



Exprimons la condition pour qu'un point $P(x,y)$ appartienne à cette ellipse.

$$P(x,y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^2} - 2cx + \underline{c^2 + y^2} = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \underline{x^2} + 2cx + \underline{c^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow -4cx - 4a^2 = -4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad cx + a^2 = a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2x^2 + 2ca^2x + a^4 = a^2 \cdot \left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2 \underline{+2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 \underline{+2ca^2x} + a^4$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2 \cdot \left(a^2 - c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad \text{(équation brute de l'ellipse)}$$

Étant donné que $a > c$, nous avons $a^2 - c^2 > 0$. L'expression $a^2 - c^2$ peut ainsi être vue comme le carré d'un réel, et nous pouvons poser $a^2 - c^2 = b^2$.

En conclusion, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\mathcal{E} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E} \equiv b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}$$

Cette équation permet notamment de trouver les coordonnées des *sommets* de l'ellipse :

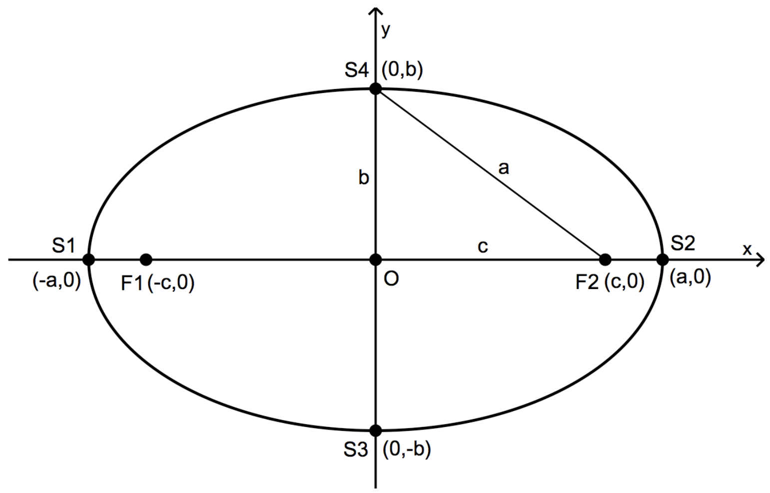
- si $y = 0$, nous obtenons $\frac{x^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm a$, ce qui nous donne les sommets situés sur l'axe des abscisses : $S_1(-a,0)$ et $S_2(a,0)$;
- si $x = 0$, nous obtenons $\frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm b$, ce qui nous donne les sommets situés sur l'axe des ordonnées : $S_3(0,-b)$ et $S_4(0,b)$.

Remarquons encore que $a^2 - c^2 = b^2$ entraîne que $a > b$. Le segment $[S_1S_2]$, de longueur $2a$, est ainsi appelé abusivement *grand axe* de l'ellipse, tandis que le segment $[S_3S_4]$, de longueur $2b$, est appelé *petit axe*.
L'intersection de ces deux segments est le *centre* de l'ellipse.

Il est intéressant de noter que la distance entre un foyer et un sommet situé sur l'axe des ordonnées, est égale à a (en effet $a^2 = b^2 + c^2$).

L'encadré de la page suivante résume nos résultats.

Ellipse horizontale (foyers sur l'axe des abscisses) et centrée à l'origine



$$\mathcal{E}_h \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

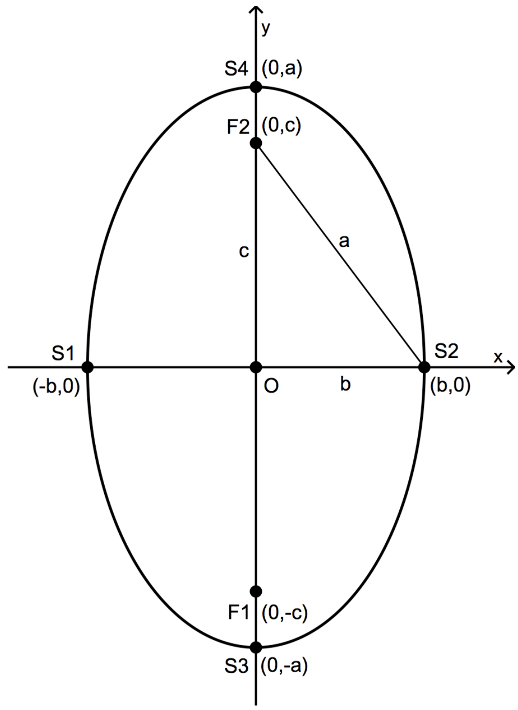
Si les foyers sont placés sur l'axe des ordonnées, nous dirons que l'ellipse est *verticale*.
Pour obtenir son équation cartésienne, il suffit d'intervertir x et y dans l'équation précédente (expliquer) :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Nous avons toujours $a > b$. Le grand axe est donc vertical et le petit axe horizontal.

En remplaçant x par 0, et ensuite y par 0, nous obtenons les sommets de l'ellipse (voir ci-contre).

Ellipse verticale (foyers sur l'axe des ordonnées) et centrée à l'origine



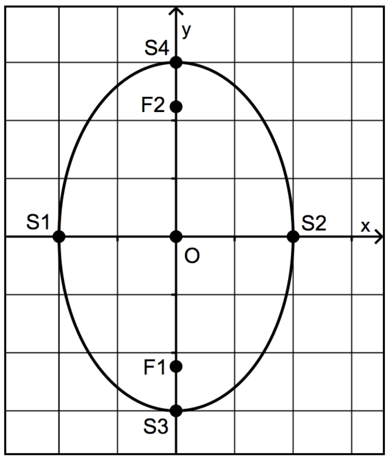
$$\mathcal{E}_v \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Exemples

① Construire l'ellipse $\mathcal{E} \equiv 9x^2 + 4y^2 = 36$

- si $y = 0$, nous obtenons $9x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 2$, ce qui nous donne les sommets situés sur l'axe des abscisses : $S_1(-2{,}0)$ et $S_2(2{,}0)$;
- si $x = 0$, nous obtenons $4y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm 3$, ce qui nous donne les sommets situés sur l'axe des ordonnées : $S_3(0,-3)$ et $S_4(0{,}3)$.

Ces résultats nous montrent que le grand axe est le segment $[S_3S_4]$ et que l'ellipse est verticale.



Une autre façon de s'en rendre compte est de diviser par 36 chaque membre de l'équation initiale :

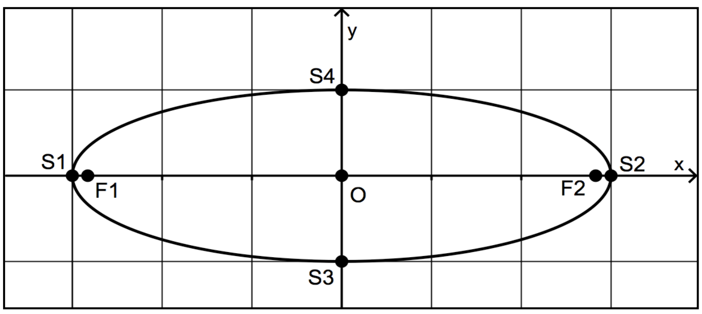
$$\mathcal{E} \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ .$$

Le dénominateur le plus grand correspond à a^2 et il se trouve sous y^2 . Il s'agit donc bien de l'équation d'une ellipse verticale.
Comme $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, on a $c = \sqrt{5}$ et les foyers sont $F_1(0,-\sqrt{5}) \approx (0,-2.24)$ et $F_2(0,\sqrt{5}) \approx (0{,}2.24)$.

② Construire l'ellipse $\mathcal{E} \equiv x^2 + 9y^2 = 9$

- si $y = 0$, nous obtenons $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$, ce qui nous donne les sommets situés sur l'axe des abscisses : $S_1(-3{,}0)$ et $S_2(3{,}0)$;
- si $x = 0$, nous obtenons $9y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 1$, ce qui nous donne les sommets situés sur l'axe des ordonnées : $S_3(0,-1)$ et $S_4(0{,}1)$.

Ces résultats nous montrent que le grand axe est le segment $[S_1S_2]$ et que l'ellipse est horizontale.



Une autre façon de s'en rendre compte est de diviser par 9 chaque membre de l'équation initiale :

$$\mathcal{E} \equiv \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \ .$$

Le dénominateur le plus grand correspond à a^2 et il se trouve sous x^2 . Il s'agit donc bien de l'équation d'une ellipse horizontale.

Comme $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$, on a $c = \sqrt{8}$ et les foyers sont $F_1(-\sqrt{8},0) \approx (-2.83{,}0)$ et $F_2(\sqrt{8},0) \approx (2.83{,}0)$.

2.3. Fonctions associées à une ellipse

Une ellipse peut être vue comme la réunion de deux graphiques de fonctions opposées l'une de l'autre. En effet, dans le cas d'une ellipse horizontale, nous avons successivement :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

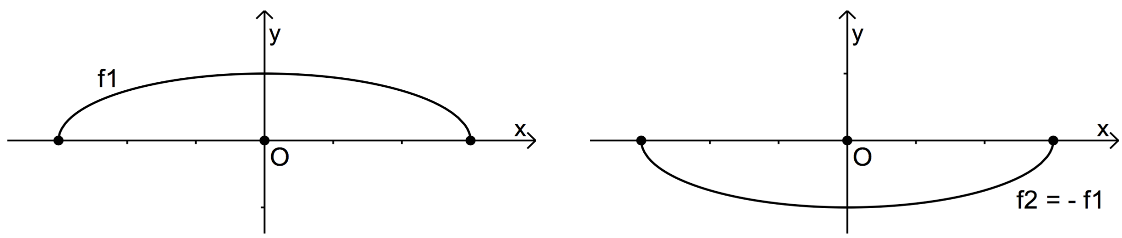
$$\Rightarrow\quad y^2=b^2\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow\quad y=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$

Une ellipse horizontale centrée à l'origine est la réunion des graphiques des fonctions

$$f_1(x)=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x)=-\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$

Par exemple, l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ est la réunion des graphique des fonctions $f_1(x)=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9-x^2}$ et $f_2(x)=-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9-x^2}$.



Pour une ellipse verticale, nous avons l'énoncé suivant.

Une ellipse verticale centrée à l'origine est la réunion des graphiques des fonctions

$$f_1(x)=\frac{a}{b}\cdot\sqrt{b^2-x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x)=-\frac{a}{b}\cdot\sqrt{b^2-x^2}$$

2.4. Excentricité d'une ellipse

L'excentricité e d'une ellipse est définie par un rapport de distances mesurées sur l'axe focal

$$e = \frac{\textit{distance entre le centre et un foyer}}{\textit{distance entre le centre et un sommet}} = \frac{c}{a} .$$

D'une part, nous avons $a > 0$ et $c > 0$. Donc $\frac{c}{a} > 0$. D'autre part, $c < a$ et donc $\frac{c}{a} < 1$.
L'excentricité est donc un nombre strictement compris entre 0 et 1 : $\boxed{0 < e < 1}$.

Examinons maintenant les situations extrêmes.

<u>Que signifie une excentricité proche de 0 ?</u>

Rappelons-nous d'abord que $b^2 = a^2 - c^2$.
Divisant les deux membres par a^2, nous obtenons $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$.

Dès lors, si $\frac{c}{a} \approx 0$, nous avons $\frac{b^2}{a^2} \approx 1 \rightarrow b^2 \approx a^2 \rightarrow b \approx a$.

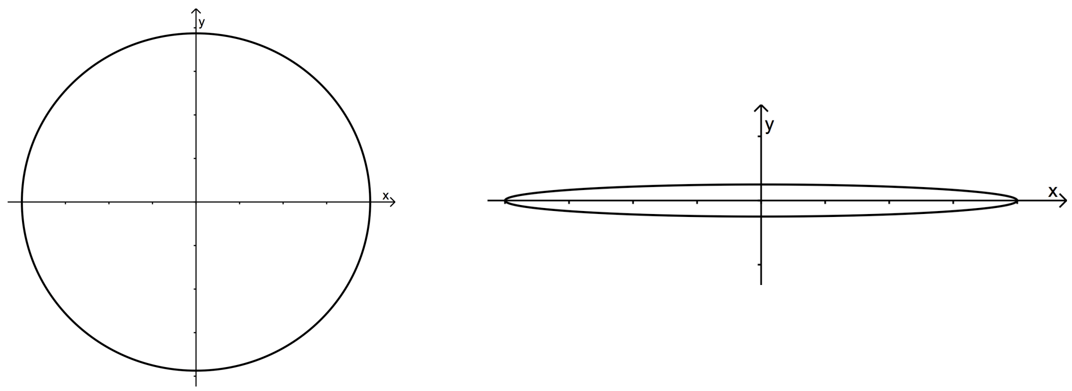
Une ellipse dont l'excentricité est proche de 0 possède ainsi un petit axe dont la longueur est proche de celle du grand axe. Sa forme est donc quasi circulaire.
À l'exception de Mercure, les orbites des planètes du système solaire sont des ellipses de faible excentricité.

<u>Que signifie une excentricité proche de 1 ?</u>

Si $\frac{c}{a} \approx 1$, alors $c \approx a$ et donc $b \approx 0$.

Cela signifie que l'ellipse est très aplatie, puisque son petit axe est proche de 0.
Beaucoup de comètes ont une orbite de grande excentricité.

<u>Exemples</u>



L'ellipse de gauche a pour équation $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$ et pour excentricité $e = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

Celle de droite a pour équation $\frac{x^2}{16} + 16y^2 = 1$ et pour excentricité $e = \frac{\sqrt{255}}{16} \approx 0{,}9980$.

Exercices sur l'ellipse

1. Dans chacun des cas suivants, construire l'ellipse d'équation donnée. Préciser les coordonnées des sommets, des foyers et l'excentricité.

   a) $E_1 \equiv \dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1$

   b) $E_2 \equiv 9x^2 + 4y^2 = 36$

   c) $E_3 \equiv 16x^2 + 25y^2 = 100$

   d) $E_4 \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$

---

2. Déterminer l'équation de l'ellipse centrée à l'origine des axes, et dont deux sommets sont A et B. Déterminer les coordonnées des autres sommets ainsi que celles des foyers, si :

   a) $A(3,0)$ et $B(0,5)$

   b) $A(0,4)$ et $B(-5,0)$

---

3. Écrire l'équation de chacune des ellipses suivantes, centrées à l'origine des axes.

   a) Le grand axe est sur l'axe des abscisses et mesure 10 ; la distance focale est 6.

   b) Le grand axe est sur l'axe des ordonnées et mesure 10 ; la distance focale est 8.

---

4. Une ellipse a pour centre le point $C(-3,2)$. Son grand axe est horizontal et mesure 6, tandis que son petit axe mesure 4. Déterminer l'équation de cette ellipse ainsi que les coordonnées de ses foyers.

---

5. Soit l'ellipse $E \equiv (x-4)^2 + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$. Construire E, déterminer les coordonnées de ses foyers ainsi que son excentricité.

---

6. Soit l'ellipse $F \equiv x^2 - 4x + 4y^2 - 32y - 56 = 0$. Construire F, déterminer les coordonnées de ses foyers ainsi que son excentricité.

---

3. Hyperboles

3.1. Définition et construction

Une hyperbole est le lieu géométrique des points du plan dont les distances à deux points fixes F_1 et F_2 (les *foyers*) ont une différence constante en valeur absolue.

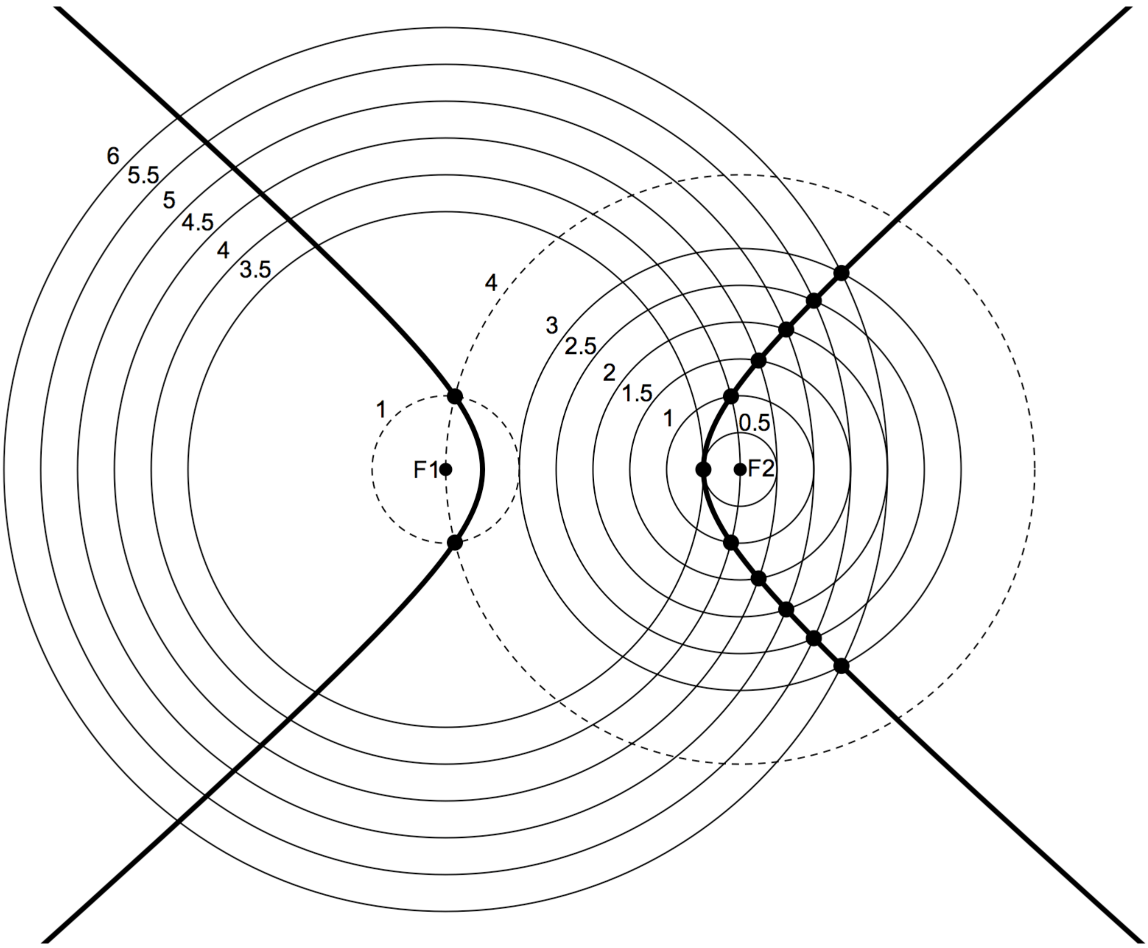
<u>Exemple</u> : deux foyers F_1 et F_2 sont distants de 4(cm) ; construire le lieu géométrique des points dont les distances aux foyers ont une différence constante égale à 3(cm).

<u>Construction</u>

Traçons par exemple

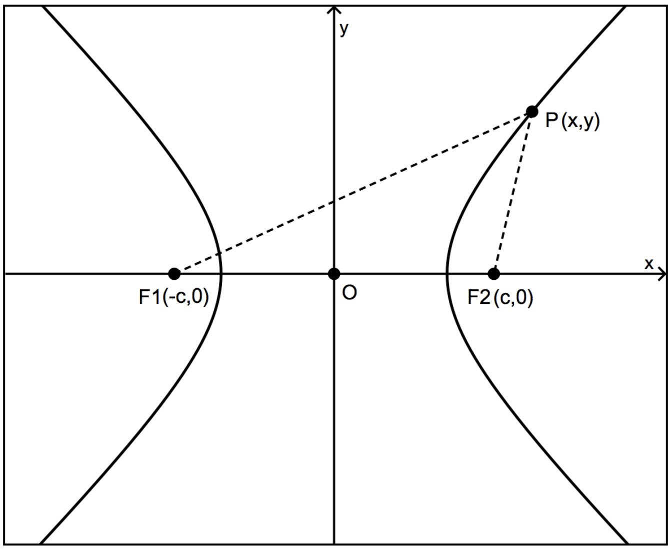
- un cercle de centre F_1 et de rayon 3.5 , et un cercle de centre F_2 et de rayon 0.5 ;
- un cercle de centre F_1 et de rayon 4 , et un cercle de centre F_2 et de rayon 1 ;
- un cercle de centre F_1 et de rayon 4.5 , et un cercle de centre F_2 et de rayon 1.5 ;
- etc.

À chaque étape, nous prenons un cercle de centre F_1 et de rayon $r \geq 3{,}5$, et un cercle de centre F_2 et de rayon $(r - 3)$ (expliquer) ; les points d'intersection des deux cercles sont des points d'une branche de l'hyperbole (celle de droite sur le dessin).
Pour obtenir la branche de gauche, pour chaque cercle de centre F_1 et de rayon $r \geq 0{,}5$, il faut tracer un cercle de centre F_2 et de rayon $(r + 3)$ (expliquer ; exemple : les cercles en pointillés).



3.2. Équation cartésienne d'une hyperbole

Fixons un repère orthonormé en choisissant la droite F_1F_2 comme axe des abscisses, et la médiatrice du segment $[F_1F_2]$ comme axe des ordonnées.



Les foyers sont ainsi les points $F_1(-c,0)$ et $F_2(c,0)$ avec $c > 0$.

Soit P un point quelconque de l'ellipse. Désignons par $2a$ la différence constante, en valeur absolue, des distances de P à F_1 et de P à F_2.

Exprimons la condition pour qu'un point $P(x,y)$ appartienne à cette hyperbole.

$$P(x,y) \in \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a$$

Des calculs analogues à ceux que nous avons effectués pour l'ellipse mènent à la même équation brute :

$$\mathcal{H} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Dans le cas de l'ellipse, nous avons vu que le dénominateur $a^2 - c^2$ est positif. Voyons ce qu'il en est pour l'hyperbole.

À partir des points F_1, F_2 et P, nous pouvons écrire deux inégalités triangulaires :

$$d(F_1,F_2) + d(F_1,P) > d(F_2,P) \Rightarrow d(F_1,F_2) > d(F_2,P) - d(F_1,P)$$

$$d(F_1,F_2) + d(F_2,P) > d(F_1,P) \Rightarrow d(F_1,F_2) > d(F_1,P) - d(F_2,P)$$

Par conséquent,

$$d(F_1,F_2) > |d(F_1,P) - d(F_2,P)|$$

Ce qui équivaut à $2c > 2a$, c'est-à-dire : $a < c$.

Comme a et c sont strictement positifs, nous avons aussi $a^2 < c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 < 0$.
Nous pouvons donc poser $a^2 - c^2 = -b^2$.

Ceci nous permet d'écrire la forme *réduite* de l'équation de l'hyperbole :

$$\boxed{\mathcal{H} \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

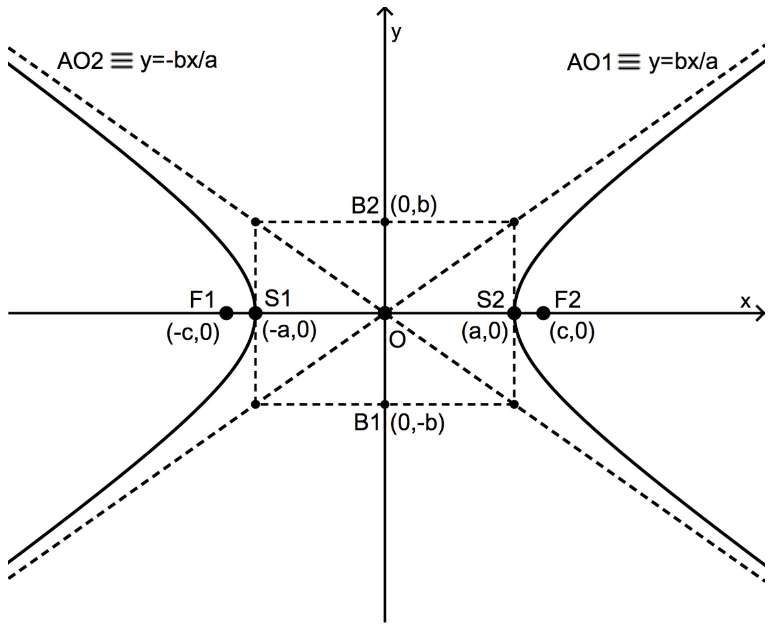
Cette équation permet notamment de trouver les intersections de l'hyperbole avec l'axe des abscisses : si $y = 0$, alors $\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$, ce qui donne les points $S_1(-a,0)$ et $S_2(a,0)$. Ceux-ci sont appelés *sommets* de l'hyperbole.

Le segment $[S_1S_2]$, de longueur $2a$, est appelé abusivement *axe transverse* de l'hyperbole.

L'hyperbole n'a pas d'intersection avec l'axe des ordonnées car si $x = 0$, alors $-\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = -b^2$ avec les solutions complexes $y = \pm bi$.

Nous allons pourtant prendre en compte les points $B_1(0,-b)$ et $B_2(0,b)$ car, bien qu'ils ne soient pas sur l'hyperbole, nous allons voir qu'ils sont utiles pour la dessiner.
Le segment $[B_1B_2]$ est appelé abusivement *axe non transverse* de l'hyperbole.

Hyperbole horizontale (foyers sur l'axe des abscisses) et centrée à l'origine



$$\mathcal{H}_h \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

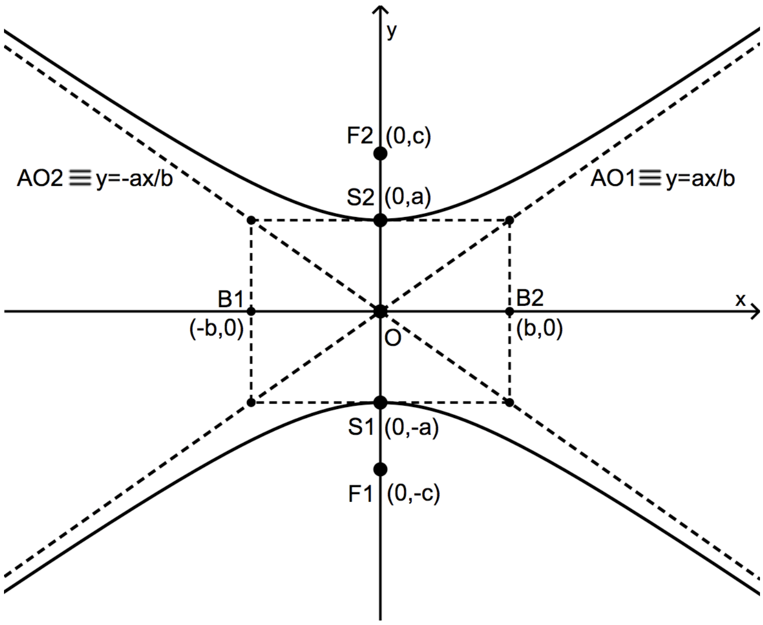
Si les foyers sont placés sur l'axe des ordonnées, nous dirons que l'hyperbole est *verticale*.
Pour obtenir son équation cartésienne, il suffit d'intervertir x et y dans l'équation précédente (expliquer) :

$$\mathcal{H}_v \equiv -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Les intersections de l'hyperbole avec l'axe des abscisses sont les sommets $S_1(0,-a)$ et $S_2(0,a)$. L'axe transverse $[S_1S_2]$ est donc vertical, mais sa longueur reste égale à $2a$.

L'hyperbole n'a pas d'intersection avec l'axe des abscisses, mais les points $B_1(-b,0)$ et $B_2(b,0)$ sont toujours utiles pour la dessiner.

Hyperbole verticale (foyers sur l'axe des ordonnées) et centrée à l'origine



$$\mathcal{H}_v \equiv -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Vous avez certainement remarqué que des asymptotes obliques sont indiquées pour chaque type d'hyperbole.
Pour trouver ces asymptotes, nous allons étudier les fonctions associées aux hyperboles.

3.3. Fonctions associées à une hyperbole

En mettant l'équation d'une hyperbole sous forme explicite par rapport à y, on obtient les énoncés suivants.

Une hyperbole horizontale centrée à l'origine est la réunion des graphiques des fonctions

$$f_1(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$$

Une hyperbole verticale centrée à l'origine est la réunion des graphiques des fonctions

$$f_1(x) = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = -\frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + x^2}$$

$$\boxed{\text{Étude de la fonction} \quad f(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}}$$

1° <u>Domaine de définition</u> : la condition d'existence est $x^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -a) \vee (x \geq a)$.
Donc, dom $f = \left]-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right[$.

2° <u>Parité</u> : la fonction est paire et son graphique est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3° <u>Asymptotes</u>

- Le domaine nous montre qu'il n' y a pas d'asymptote verticale.
- Il n' y a pas d'asymptote horizontale non plus car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \right) = +\infty$.
- Voyons s'il y a une asymptote oblique $AO \equiv y = mx + p$.

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \right) = \frac{+\infty}{\pm\infty} \\
&= \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}{x} \right) \\
&= \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} \\
&= \boxed{\pm \frac{b}{a}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{p} &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a} \cdot x \right) \\
&= \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} \mp x \right) = \infty - \infty \\
&= \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2} \mp x \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - a^2} \pm x \right)}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} \\
&= \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} = \frac{b}{a} \cdot \frac{-a^2}{+\infty} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
$$

<u>Conclusion</u> : il y a deux asymptotes obliques

- $AO \equiv y = \frac{b}{a} \cdot x$ pour $x \to +\infty$
- $AO \equiv y = -\frac{b}{a} \cdot x$ pour $x \to -\infty$

4° <u>Dérivée première et variations</u>

On vérifie rapidement que $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Étant donné que les constantes a et b sont strictement positives et que le radical au dénominateur est positif, la fonction f' prend le même signe que x .

5° <u>Dérivée seconde et concavité</u>

On vérifie que $f''(x) = \frac{-ab}{\left(x^2 - a^2\right) \cdot \sqrt{x^2 - a^2}}$ (c'est un peu plus long …).

Cette dérivée seconde est toujours négative (expliquer).

Rassemblons les résultats des points 4 et 5 dans un tableau récapitulatif, en tenant compte du domaine de définition.

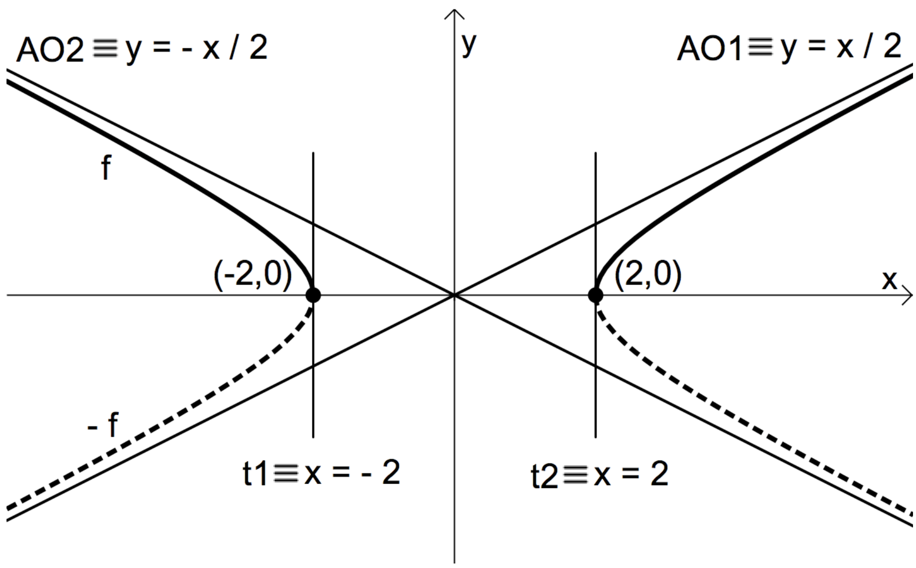
x		$-a$		a	
$f'(x)$	-	|		|	+
$f''(x)$	-	|		|	-
$f(x)$	↘ ⌒	$(-a,0)$ $t_1 \equiv x = -a$		$(a,0)$ $t_2 \equiv x = a$	↗ ⌒

On montre aussi que $\lim\limits_{\substack{x \to -a \\ <}} f'(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x) = +\infty$.

Cela se traduit par l'existence de deux tangentes verticales en $x = -a$ et en $x = a$.

Le graphique de la fonction correspond à la moitié supérieure d'une hyperbole horizontale centrée à l'origine.

<u>Exemple</u> : voici le graphique des fonctions $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4}$ et $-f(x)$, dont la réunion est l'hyperbole $\mathcal{H} \equiv \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.



Exercices sur l'hyperbole

1. Dans chacun des cas suivants, construire l'hyperbole d'équation donnée. Préciser les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des asymptotes.

   a) $H_1 \equiv \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

   b) $H_2 \equiv 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$

   c) $H_3 \equiv x^2 - 25y^2 = 9$

   d) $H_4 \equiv 4y^2 - 9x^2 - 1 = 0$

---

2. Déterminer l'équation d'une hyperbole centrée à l'origine, dont l'un des sommets est le point $S(0,3)$, et dont une asymptote est la droite $a \equiv y = 2x$. Déterminer ensuite sa distance focale.

---

3. Déterminer l'équation d'une hyperbole centrée à l'origine, dont un sommet est le point $S(2,0)$, et comprenant le point $P(4,3)$.

---

4. Soit l'hyperbole $H \equiv (x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$. Construire H, déterminer les coordonnées de ses foyers ainsi que les équations de ses asymptotes.

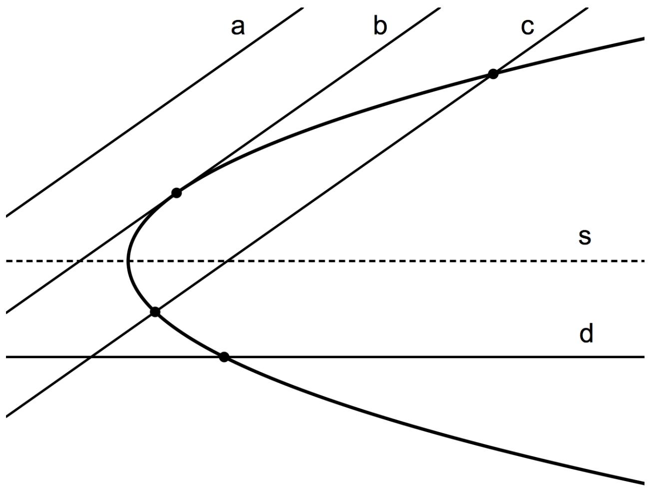
---

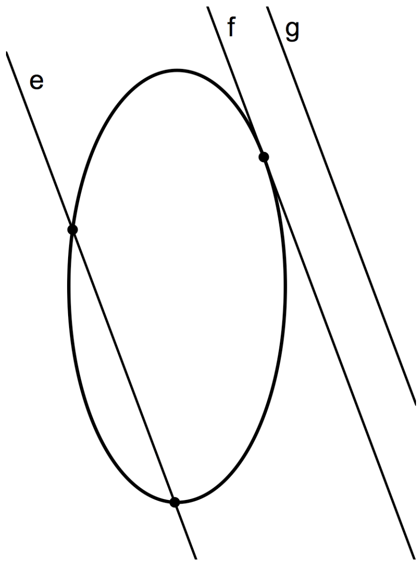
5. Soit l'hyperbole $I \equiv -x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. Construire I, déterminer les coordonnées de ses foyers ainsi que les équations de ses asymptotes.

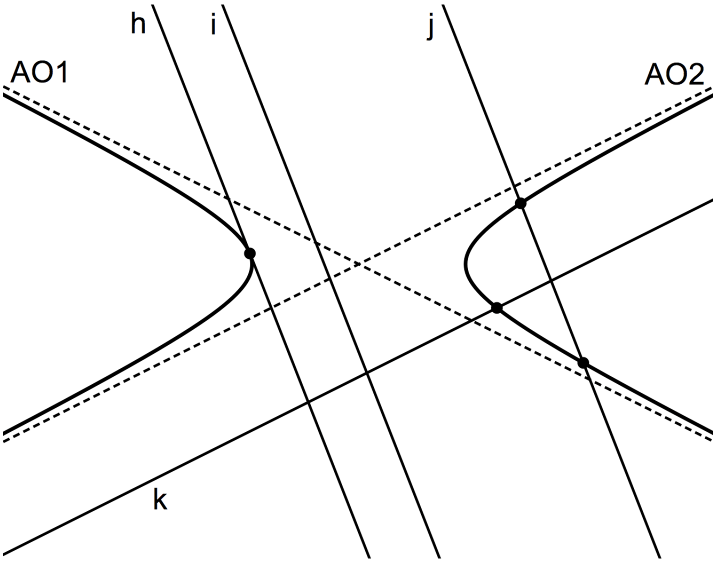
---

4. Positions relatives d’une conique et d’une droite

4.1. Les situations possibles







Une droite et une conique peuvent n’avoir aucun point commun : c’est le cas des droites a, g et i, ainsi que des asymptotes à une hyperbole (AO_1 et AO_2 dans l’exemple ci-dessus).

Une droite peut aussi être *tangente* à une conique (c’est le cas des droites b, f et h), ou *sécante* à celle-ci (droites c, d, e, j, k et s).

Une droite sécante à une conique peut avoir deux points communs avec celle-ci, mais dans le cas de la parabole et de l’hyperbole, une droite peut être sécante en un seul point : lorsque la droite est parallèle à l’axe de symétrie de la parabole, ou lorsque la droite est parallèle à une asymptote de l’hyperbole.

Exercice résolu

Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la conique $C \equiv x^2 - 2y^2 + 4 = 0$ et de la droite $d \equiv 2x - y - 2 = 0$.

Représenter la situation.

Solution

Il s'agit de résoudre le système formé par les équations de la conique et de la droite.

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 4 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 4 = 0 & (1) \\ y = 2x - 2 & (2) \end{cases}$$

Substituons l'expression de y en fonction de x, de (2) dans (1) :

$$x^2 - 2\cdot(2x-2)^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x^2 + 16x - 8 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -7x^2 + 16x - 4 = 0$$

Cette équation du second degré se résout de la façon habituelle :

$$\Delta = 16^2 - 4\cdot(-7)\cdot(-4) = 144 > 0 \text{ , ce qui donne les solutions } x = \frac{-16 \pm 12}{-14} = \begin{cases} x_1 = \frac{2}{7} \\ x_2 = 2 \end{cases} .$$

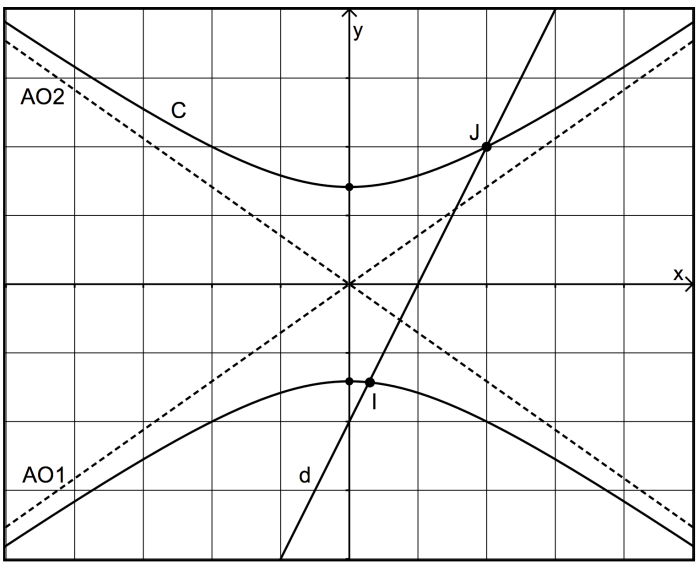
Les valeurs de x_1 et de x_2 sont les abscisses des points d'intersection. La droite d est donc sécante à la conique en deux points. Pour trouver les ordonnées de ceux-ci, le plus simple est de remplacer les abscisses dans l'équation de d : $y_1 = 2\cdot\frac{2}{7} - 2 = -\frac{10}{7}$ et $y_2 = 2\cdot 2 - 2 = 2$.

Conclusion : $C \cap d = \left\{\left(\frac{2}{7}, -\frac{10}{7}\right), (2,2)\right\} \approx \{(0.29,-1.43),(2,2)\}$.

Vérification graphique

La conique est une hyperbole verticale. En effet : $C \equiv -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Elle a pour sommets les points $(0, \pm\sqrt{2})$, et pour asymptotes les droites $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.



4.2. Tangentes à une conique

L'étude des tangentes aux coniques est intéressante en tant que synthèse des cours de géométrie, d'algèbre et d'analyse. Nous utiliserons également les tangentes pour découvrir de nouveaux procédés de construction des coniques, ou de nouvelles propriétés de celles-ci, notamment dans le domaine de l'optique.

Nous allons maintenant apprendre à déterminer l'équation cartésienne d'une tangente à une conique, dans trois situations différentes.

4.2.1. Équation d'une tangente en un point d'une conique

Exercice résolu

Déterminer une équation de la tangente à la conique $C \equiv 16x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ en son point d'abscisse 1 et d'ordonnée positive. Représenter la situation.

Solution

Point de tangence T : si $x = 1$, alors $9y^2 = 20 \to y = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

L'ordonnée étant positive, nous avons : $T\left(1,\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right) \approx (1,1.49)$.

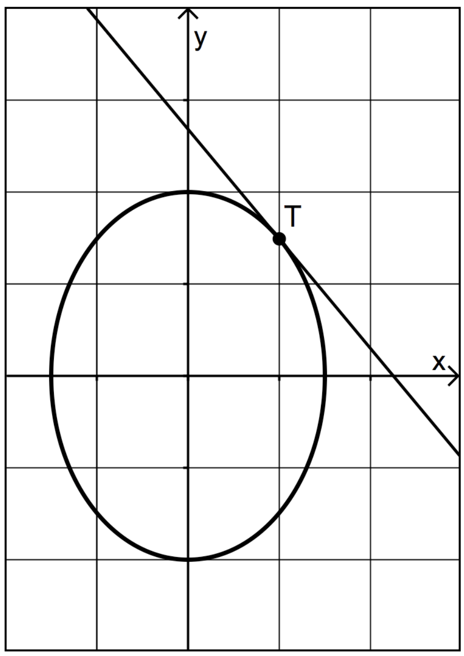
Fonctions associées à la conique : $y^2 = \dfrac{36-16x^2}{9} = \dfrac{4}{9}\cdot\left(9-4x^2\right) \to y = \pm\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{9-4x^2}$.

Pente de la tangente au point d'abscisse 1

Elle est égale au nombre dérivé en 1 de la fonction (positive dans notre cas) associée à la conique :

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}} \to m = f'(1) = \frac{-8}{3\sqrt{5}} = \frac{-8\sqrt{5}}{15} .$$

Nous pouvons déjà écrire : $t \equiv y = \dfrac{-8\sqrt{5}}{15}x + p$.



Utilisation du point T pour trouver l'équation de la tangente

$$T\left(1,\frac{2\sqrt{5}}{3}\right) \in t \quad \to \quad \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{-8\sqrt{5}}{15}\cdot 1 + p$$

$$\to \quad p = \frac{18\sqrt{5}}{15} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Finalement : $\boxed{t \equiv y = \dfrac{-8\sqrt{5}}{15}x + \dfrac{6\sqrt{5}}{5}}$.

Approximativement : $\boxed{t \equiv y \approx -1.19\cdot x + 2.68}$

4.2.2. Équation d'une tangente issue d'un point extérieur à une conique

Exercice résolu

Déterminer les équations des tangentes issues du point $P\left(-2,-\frac{7}{4}\right)$ à la conique $C \equiv x^2 - 2y^2 = 1$. Représenter la situation.

Solution

Soit $t \equiv y = mx + p$ une tangente à la conique. Il faut donc trouver m et p.

La tangente est issue de P

Le fait que la tangente passe par P permet d'écrire une première relation entre m et p :

$$P\left(-2,-\frac{7}{4}\right) \in t \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{4} = -2m + p \quad \rightarrow \quad \boxed{p = 2m - \frac{7}{4}} \qquad (*)$$

Un seul point commun à t et à C

Ensuite, l'idée est de rechercher l'intersection entre t et la conique, et pour que t soit tangente à celle-ci, d'imposer qu'il n'y ait qu'une seule solution au système

$$\begin{cases} y = mx + p & (1) \\ x^2 - 2y^2 = 1 & (2) \end{cases}.$$

Substituons y de (1) dans (2).

$$x^2 - 2(mx + p)^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 2m^2x^2 - 4mpx - 2p^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(1 - 2m^2\right)x^2 - 4mpx - 2p^2 - 1 = 0 \quad (**)$$

Le discriminant de cette équation du second degré est (faire le détail des calculs) :

$$\Delta = 16m^2p^2 - 4\left(1 - 2m^2\right)\left(-2p^2 - 1\right) = 8p^2 - 8m^2 + 4$$

Utilisons la relation $(*)$ afin de remplacer p en fonction de m (faire le détail des calculs) :

$$\Delta = 8\left(2m - \frac{7}{4}\right)^2 - 8m^2 + 4 = 24m^2 - 56m + \frac{57}{2}$$

Pour qu'il n'y ait qu'une seule solution, nous devons imposer $\Delta = 0$: $24m^2 - 56m + \frac{57}{2} = 0$.

Nous trouvons une nouvelle équation du second degré, d'inconnue m cette fois. Son discriminant vaut 400 , ce qui mène aux solutions (vérifier) : $m_1 = \frac{19}{12}$ et $m_2 = \frac{3}{4}$. Les valeurs correspondantes de p sont (vérifier) : $p_1 = \frac{17}{12}$ et $p_2 = -\frac{1}{4}$.

Les équations des deux tangentes issues de P sont ainsi :

$$\boxed{t_1 \equiv y = \frac{19}{12}x + \frac{17}{12}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{t_2 \equiv y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}$$

Pour t_1 , nous avons approximativement : $\boxed{t_1 \equiv y = 1{,}5833 \cdot x + 1{,}4167}$

<u>Recherche des points de tangence</u>

L'équation (**) a pour solution l'abscisse du point de tangence. Comme elle n'admet qu'une seule solution, celle-ci est donnée par la formule connue sous la forme « $x = -\dfrac{b}{2a}$ » relativement à l'équation $ax^2+bx+c=0$. Dans le cas de l'équation (**) , cela donne :

$$x_1 = -\frac{-4mp}{2\cdot\left(1-2m^2\right)} = \frac{2mp}{1-2m^2}$$

Pour la tangente t_1 , il faut prendre les valeurs de m_1 et de p_1 :

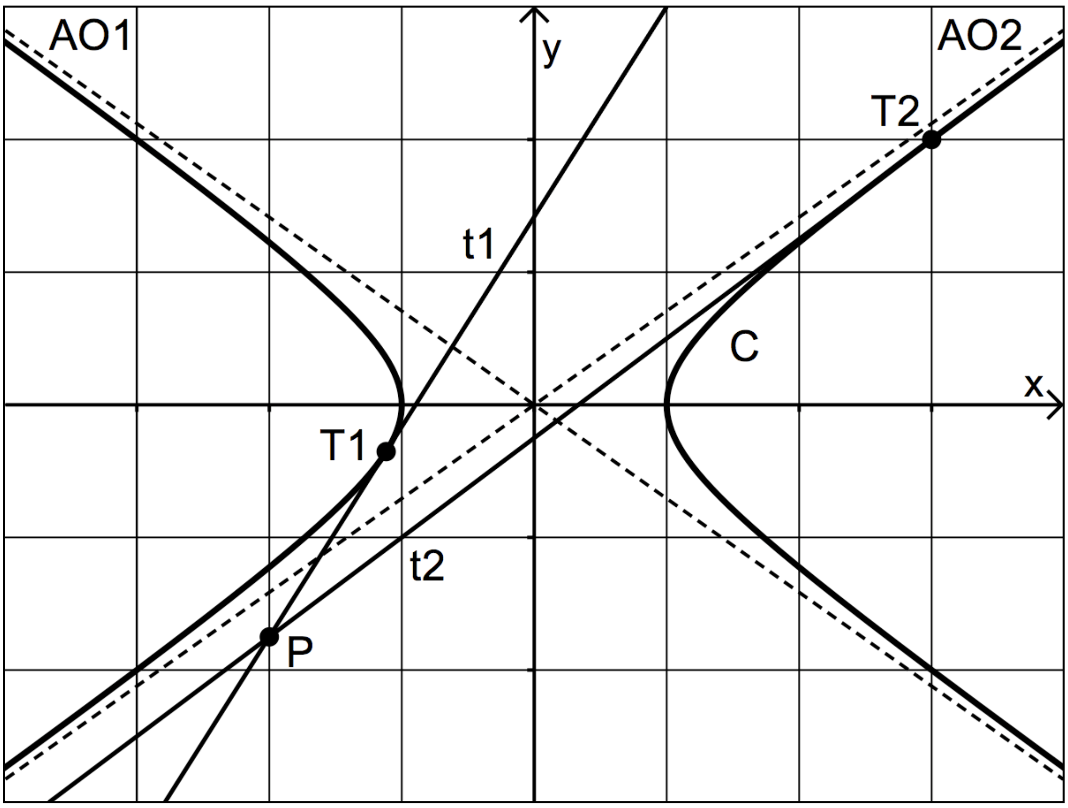
$$x_1 = \frac{2\cdot\frac{19}{12}\cdot\frac{17}{12}}{1-2\cdot\left(\frac{19}{12}\right)^2} = -\frac{19}{17} \approx -1{,}1176 \qquad \text{(vérifier)}$$

L'ordonnée du point de tangence se trouve en remplaçant -19/17 dans l'équation de t_1 :

$$y_1 = \frac{19}{12}\cdot\frac{-19}{17} + \frac{17}{12} = -\frac{6}{17} \approx -0{,}3529 \qquad \text{(vérifier)}$$

Finalement, le premier point de tangence est $\boxed{T_1\left(-\frac{19}{17},-\frac{6}{17}\right)}$.

Une démarche semblable, menée pour la tangente t_2 , avec les valeurs m_2 et p_2 mène au second point de tangence (vérifier) : $\boxed{T_2(3,2)}$.



4.2.3. Équation d'une tangente à une conique, la direction de la tangente étant connue

<u>Exercice résolu</u>

Déterminer l'équation de la tangente à la conique $C \equiv 4x + y^2 = 0$, sachant que cette tangente est parallèle à la droite $d \equiv x + y - 5 = 0$. Représenter la situation.

<u>Solution</u>

Étant donné que $d \equiv y = -x + 5$, la pente de d vaut (-1) , et celle de la tangente aussi.

Donc $t \equiv y = -x + p$.

À partir d'ici, l'idée est essentiellement la même que dans l'exercice résolu précédent : écrire le système formé par les équations de la tangente et de la conique, et imposer que ce système n'ait qu'une seule solution. Comme la résolution du système mène à une équation du second degré, cela reviendra de nouveau à imposer que son discriminant soit nul.

$$\begin{cases} y = -x + p & (1) \\ 4x + y^2 = 0 & (2) \end{cases} .$$

Substituons y de (1) dans (2) .

$$4x + (-x + p)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + x^2 - 2px + p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + (4 - 2p)x + p^2 = 0 \quad (*)$$

Le discriminant de cette équation du second degré est (faire le détail des calculs) :

$$\Delta = (4 - 2p)^2 - 4p^2 = 16 - 16p$$

Pour qu'il n'y ait qu'une seule solution, nous devons imposer $\Delta = 0$ ce qui équivaut $\boxed{p = 1}$.

L'équation de la tangente parallèle à d est ainsi :

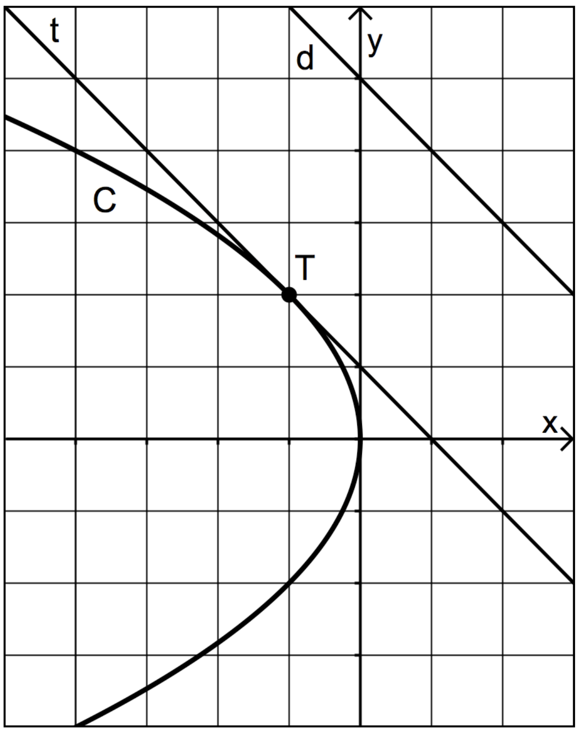
$$\boxed{t \equiv y = -x + 1} .$$

L'abscisse du point de tangence T est la solution unique de l'équation (*) :

$$x = \left[-\frac{4 - 2p}{2} \right]_{p=1} = -1 .$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation de la tangente t , nous trouvons l'ordonnée du point T : $y = 2$.

Donc : $\boxed{T(-1,2)}$.



Exercices sur les positions relatives des coniques et des droites

1. Soit la parabole $P_1 \equiv y^2 = x$. Déterminer les équations de la tangente et de la normale à cette parabole, en son point d'abscisse 4 et d'ordonnée positive.

---

2. Soit la parabole $P_2 \equiv y = -5x^2$. Déterminer les équations de la tangente et de la normale à cette parabole, en son point d'abscisse (-1) et d'ordonnée négative.

---

3. Soit l'ellipse $E_1 \equiv 2x^2 + y^2 = 4$.

   a) Construire l'ellipse et calculer ses foyers.

   b) Calculer les points d'intersection éventuels de E_1 et de la droite $d_1 \equiv y = -2x - 3$.

   c) Calculer les points d'intersection éventuels de E_1 et de la droite $d_2 \equiv x + y + 15 = 0$.

   d) Déterminer l'équation de la tangente à E_1 en son point d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.

   e) Déterminer l'équation de la normale à E_1 en son point d'abscisse (-1) et d'ordonnée négative.

   f) Déterminer l'équation de la tangente à E_1 en son point d'abscisse $\sqrt{2}$.

   g) Déterminer l'équation de la tangente à E_1 parallèle à la droite $d_3 \equiv x - 2y + 3 = 0$.

---

4. Soit l'ellipse $E_2 \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$.

   a) Construire l'ellipse et calculer ses foyers.

   b) Le point $P\left(2, \frac{3}{2}\right)$ appartient-il à l'ellipse ?

   c) Calculer les points d'ordonnée 1 de l'ellipse.

   d) Déterminer les équations de la tangente et de la normale à E_2 en son point d'abscisse 2 et d'ordonnée positive.

   e) Déterminer l'équation de la tangente à E_2 parallèle à la droite $d_4 \equiv y = 3x + 6$.

---

5. Soit l'ellipse $E_3 \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Déterminer les tangente issues du point $P(4,1)$ à cette ellipse.

---

6. Soit l'hyperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$.

   a) Construire H , calculer ses foyers et déterminer ses asymptotes.

   b) Calculer les points d'intersection éventuels de H et de la droite $d_5 \equiv 3x - 4y - 4 = 0$.

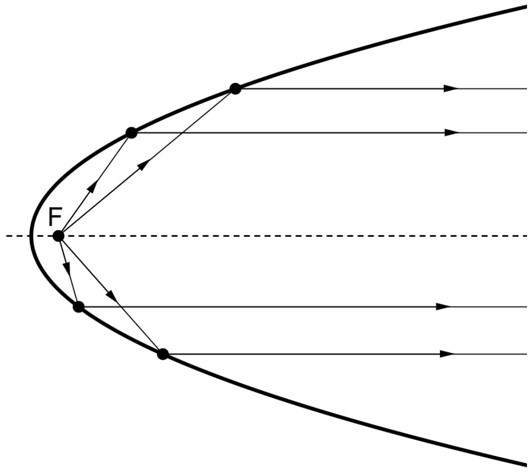
   c) Déterminer les équations de la tangente et de la normale à H en son point d'abscisse 5 et d'ordonnée négative.

5. Propriétés optiques des coniques

5.1. Miroir parabolique

Un miroir parabolique possède les propriétés suivantes :

- tout rayon lumineux issu du foyer se réfléchit parallèlement à l'axe de symétrie de la parabole ;
- tout rayon lumineux parallèle à l'axe de symétrie de la parabole se réfléchit en passant par le foyer.



Le schéma de gauche illustre la première propriété. Pour la deuxième, il faut imaginer que l'on inverse le trajet des rayons lumineux : lorsque la lumière provenant d'un objet très éloigné arrive sur le miroir parabolique parallèlement à son axe, les rayons sont tous réfléchis vers le point F. C'est sur ce principe qu'est basé le téléscope de Newton (à droite).

5.2. Propriété optique de la parabole

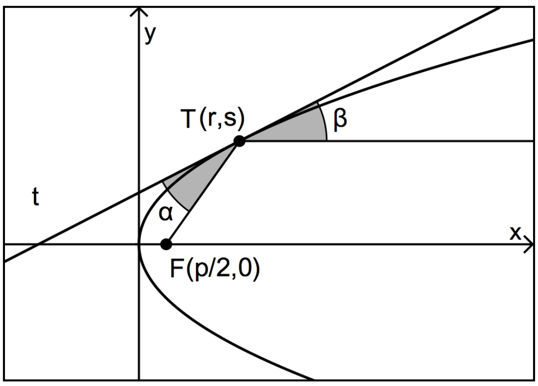
Par un point quelconque d'une parabole, traçons la droite passant par le foyer, et la parallèle à l'axe de symétrie. Ces deux droites forment des angles aigus de même amplitude avec la tangente à la parabole en ce point.

<u>Preuve</u>

Dans un repère orthonormé, considérons une parabole $\mathcal{P} \equiv y^2 = 2px$, de foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Soit $T(r,s)$ un point quelconque de $\mathcal{P}$.

Pour montrer que les angles aigus α et β ont la même amplitude, nous allons montrer qu'ils ont la même tangente. Or, la tangente de l'angle aigu formé par deux droites est donné par une formule où interviennent les pentes de celles-ci (voir la fiche « Angle de deux droites ») .



Nous allons donc commencer par calculer la pente de t, et puis celle de TF. La pente de la droite passant par T et parallèle à l'axe de symétrie est évidemment nulle.

Pente de la tangente t

Considérons la fonction positive associée à la parabole : $y^2 = 2px \rightarrow f(x) = \sqrt{2px}$.

Sa fonction dérivée est $f'(x) = \dfrac{p}{\sqrt{2px}}$.

La pente de t est le nombre dérivé de f calculé en r : $m_t = f'(r) = \dfrac{p}{\sqrt{2pr}}$.

Cette expression peut se simplifier, car le point $T(r,s)$ étant un point de la parabole, nous avons : $s^2 = 2pr \rightarrow pr = \dfrac{s^2}{2}$.

Par conséquent : $m_t = \dfrac{p}{\sqrt{2 \cdot \dfrac{s^2}{2}}} \rightarrow \boxed{m_t = \dfrac{p}{s}}$.

Pente de la droite FT : $m_{FT} = \dfrac{s}{r - \dfrac{p}{2}} = \dfrac{2s}{2r - p}$.

Tangente de l'angle α

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_{FT} - m_t}{1 + m_{FT} \cdot m_t}\right| \qquad \text{(formule relative à l'angle aigu de deux droites)}$$

$$= \left|\frac{\dfrac{2s}{2r-p} - \dfrac{p}{s}}{1 + \dfrac{2s}{2r-p} \cdot \dfrac{p}{s}}\right| \qquad \text{(utilisation des résultats précédents)}$$

$$= \left|\frac{\dfrac{2s^2 - 2pr + p^2}{(2r-p) \cdot s}}{\dfrac{(2r-p) \cdot s + 2sp}{(2r-p) \cdot s}}\right| \qquad \text{(réduction au même dénominateur)}$$

$$= \left|\frac{2pr + p^2}{2rs + sp}\right| \qquad (\text{car} \quad s^2 = 2pr \rightarrow 2s^2 = 4pr\ )$$

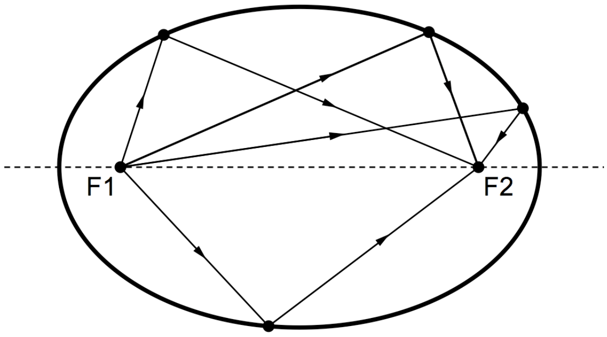
$$= \left|\frac{p \cdot (2r+p)}{s \cdot (2r+p)}\right| = \left|\frac{p}{s}\right|$$

Comme l'angle β est formé par la tangente et l'horizontale, nous avons $\tan\beta = |m_t| = \left|\dfrac{p}{s}\right|$.

Les angles α et β sont des angles aigus ayant la même tangente, ils ont donc la même amplitude : $\alpha = \beta$.

5.3. Miroir elliptique

Un miroir elliptique possède la propriété suivante : tout rayon lumineux issu d'un foyer se réfléchit en passant par l'autre foyer.



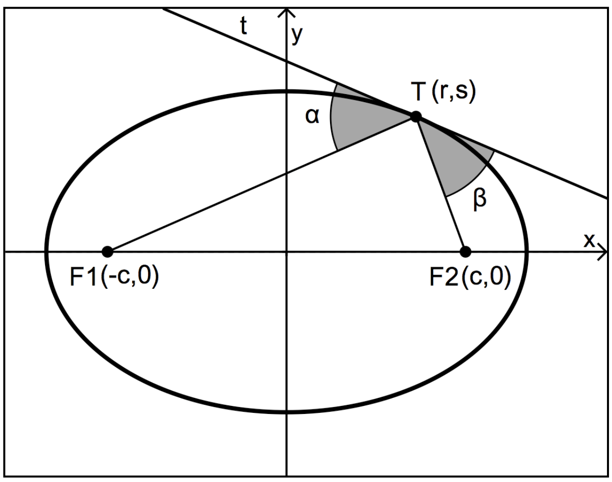
Cette propriété est utilisée dans la conception de certains instruments d'optique. Les ondes sonores subissent le même phénomène de réflexion. Ainsi, dans une galerie à plafond elliptique, une personne qui chuchote en un foyer sera entendue par un auditeur placé à l'autre foyer (ce phénomène serait observable dans les galeries du métro de Paris).

La propriété se conserve dans l'espace à trois dimensions. Si une ellipse tourne autour de son axe focal, elle engendre un solide appelé *ellipsoïde de révolution*. Des ondes émises en un foyer se réfléchiront sur les parois de l'ellipsoïde vers l'autre foyer.
La médecine moderne utilise cette propriété pour désintégrer les calculs rénaux. Un appareil appelé *lithotripteur*, en forme de demi ellipsoïde, émet des ondes de choc à haute énergie à partir d'un de ses foyers. Si l'opérateur positionne l'appareil de telle façon que le calcul se trouve en l'autre foyer, la pierre est brisée.
Cette technique est plus sûre que l'intervention chirurgicale traditionnelle et raccourcit considérablement le temps d'hospitalisation des patients.

5.4. Propriété optique de l'ellipse

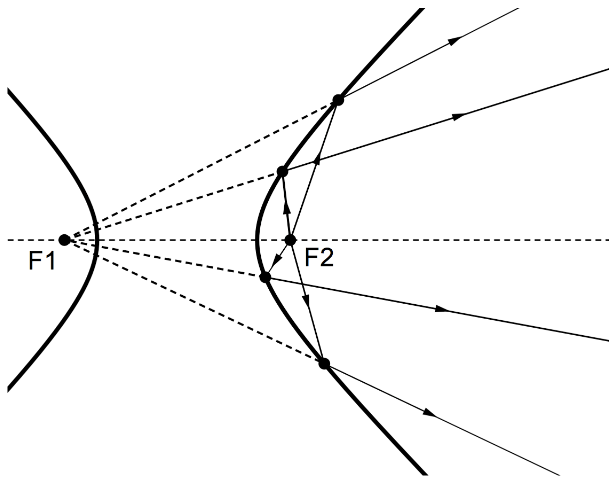
Par un point quelconque d'une ellipse, traçons les droites passant par chacun des foyers. Ces droites forment des angles aigus de même amplitude avec la tangente à l'ellipse en ce point.

La démonstration de cette propriété est un bon exercice.
Elle est analogue à celle que nous proposons pour la propriété optique de l'hyperbole, à la page suivante.



5.5. Miroir hyperbolique

Un miroir hyperbolique possède la propriété suivante : tout rayon lumineux issu d'un foyer se réfléchit comme s'il était issu de l'autre foyer.



Ce type de miroir se retrouve également dans certains instruments d'optique. Il est notamment présent, combiné à un miroir parabolique, dans les téléscopes de type *Cassegrain*.

5.6. Propriété optique de l'hyperbole

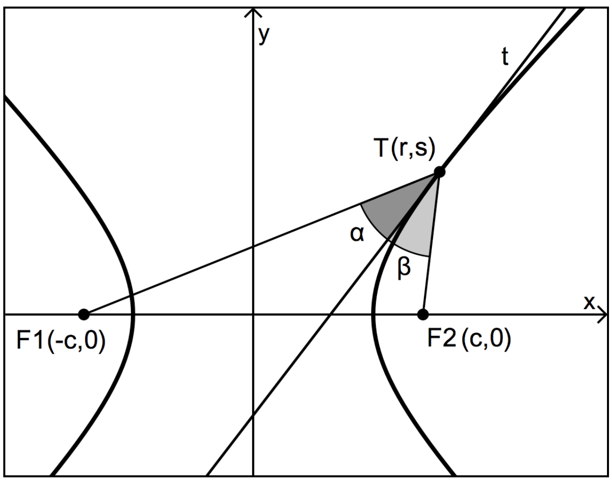
Par un point quelconque d'une hyperbole, traçons les droites passant par chacun des foyers. Ces droites forment des angles aigus de même amplitude avec la tangente à l'hyperbole en ce point.

Preuve

Dans un repère orthonormé, considérons une hyperbole $\mathcal{H} \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de foyers $F_1(-c,0)$ et $F_2(c,0)$.

Soit $T(r,s)$ un point quelconque de $\mathcal{H}$.

Pour montrer que les angles aigus α et β ont la même amplitude, nous allons, comme pour la parabole, montrer qu'ils ont la même tangente.
Nous allons commencer par calculer la pente de t , puis celle de TF_1 , et enfin celle de TF_2



Pente de la tangente t

Considérons la fonction positive associée à l'hyperbole : $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (voir page 18).

Sa fonction dérivée est : $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

La pente de la tangente en T est donc : $f'(r) = \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}$.

Cette expression peut s'écrire autrement. En effet, comme le point $T(r,s)$ appartient à l'hyperbole, nous avons :

$$f(r) = s \;\to\; \frac{b}{a}\sqrt{r^2 - a^2} = s \;\to\; \sqrt{r^2 - a^2} = \frac{sa}{b}$$

Revenons à la pente de t en utilisant ce que nous venons de trouver : $f'(r) = \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{\frac{sa}{b}} = \frac{b^2 r}{a^2 s}$.

$$\boxed{m_t = \frac{b^2 r}{a^2 s}}$$

<u>Pente de la droite TF_1</u> : $m_{TF_1} = \frac{s}{r+c}$

<u>Pente de la droite TF_2</u> : $m_{TF_2} = \frac{s}{r-c}$

<u>Tangente de l'angle α</u>

$$\tan\alpha = \left| \frac{m_{TF_1} - m_t}{1 + m_{TF_1} \cdot m_t} \right|$$ (formule relative à l'angle aigu de deux droites)

$$= \left| \frac{\frac{s}{r+c} - \frac{b^2 r}{a^2 s}}{1 + \frac{s}{r+c} \cdot \frac{b^2 r}{a^2 s}} \right|$$ (utilisation des résultats précédents)

$$= \left| \frac{\frac{a^2 s^2 - b^2 r^2 - b^2 rc}{(r+c) \cdot a^2 s}}{\frac{a^2 rs + a^2 cs + b^2 rs}{(r+c) \cdot a^2 s}} \right|$$ (réduction au même dénominateur)

$$= \left| \frac{\left(a^2 s^2 - b^2 r^2\right) - b^2 rc}{rs \cdot \left(a^2 + b^2\right) + a^2 cs} \right|$$ (groupement au numérateur ; mise en évidence au dénominateur)

$$= \left| \frac{-a^2 b^2 - b^2 rc}{rsc^2 + a^2 cs} \right|$$ (au numérateur, on utilise le fait que $T(r,s) \in \mathcal{H}$:

$\frac{r^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1 \to b^2 r^2 - a^2 s^2 = a^2 b^2 \to a^2 s^2 - b^2 r^2 = -a^2 b^2$;

au dénominateur, il faut se rappeler que pour une hyperbole, on a $a^2 + b^2 = c^2$)

$$= \left| \frac{b^2 \cdot \left(-a^2 - rc\right)}{sc \cdot \left(rc + a^2\right)} \right| = \boxed{\left| -\frac{b^2}{sc} \right|}$$

Tangente de l'angle β

$$\tan\beta = \left|\frac{m_{TF_2} - m_t}{1 + m_{TF_2} \cdot m_t}\right|$$ (formule relative à l'angle aigu de deux droites)

$$= \left|\frac{\frac{s}{r-c} - \frac{b^2 r}{a^2 s}}{1 + \frac{s}{r-c} \cdot \frac{b^2 r}{a^2 s}}\right|$$ (utilisation des résultats précédents)

$$= \left|\frac{\frac{a^2 s^2 - b^2 r^2 + b^2 rc}{(r-c)\cdot a^2 s}}{\frac{a^2 rs - a^2 cs + b^2 rs}{(r-c)\cdot a^2 s}}\right|$$ (réduction au même dénominateur)

$$= \left|\frac{\left(a^2 s^2 - b^2 r^2\right) + b^2 rc}{rs\cdot\left(a^2 + b^2\right) - a^2 cs}\right|$$ (groupement au numérateur ; mise en évidence au dénominateur.)

$$= \left|\frac{-a^2 b^2 + b^2 rc}{rsc^2 - a^2 cs}\right|$$ (mêmes explications que pour le calcul de $\tan\alpha$)

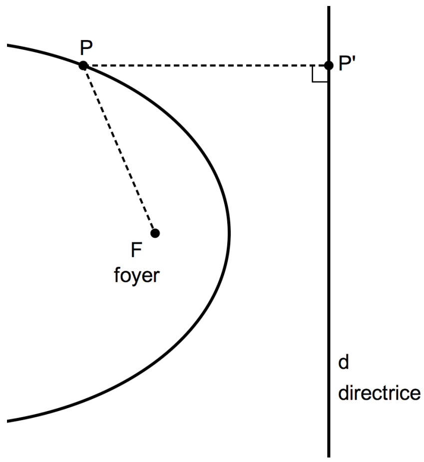
$$= \left|\frac{b^2 \cdot \left(-a^2 + rc\right)}{sc \cdot \left(rc - a^2\right)}\right| = \boxed{\left|\frac{b^2}{sc}\right|}$$

Les angles α et β sont des angles aigus ayant la même tangente, ils ont donc la même amplitude : $\alpha = \beta$.

---

6. Une définition unique pour toutes les coniques

6.1. La définition focale



Dans le plan, soit F un point fixe et d une droite fixe ne comprenant pas F.

Une conique de foyer F et de directrice d, est l'ensemble de tous les points P du plan tels que

$$d(P,F) = e \cdot d(P,d)\ ,$$

où e est une constante strictement positive, appelée *excentricité*.

La conique est
- une ellipse si $0 < e < 1$
- une parabole si $e = 1$
- une hyperbole si $e > 1$

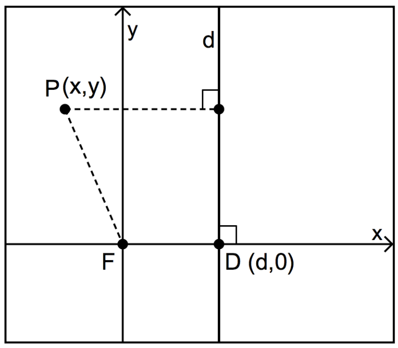
Rappelons que la distance $d(P,d)$ entre le point P et la droite d, est la distance entre P et sa projection orthogonale P' sur d.

L'équation $d(P,F) = e \cdot d(P,d)$ est appelée *équation focale* de la conique.

6.2 Lien entre la définition focale et les précédentes définitions des coniques

6.2.1. Premier cas : $0 < e < 1$

En partant de l'équation focale, nous devrions retrouver une équation cartésienne semblable à celle obtenue à partir de la définition bifocale de l'ellipse.



Pour cela, choisissons un repère orthonormé : plaçons l'origine en F, et prenons la perpendiculaire à d passant par F comme axe des abscisses.

En exprimant les distances dans l'équation focale, nous obtenons

$$d(P,F) = e \cdot d(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = e \cdot |x - d|\ .$$

Notons que $|x-d| = d-x$, car comme $0 < e < 1$, le point P ne peut se trouver qu'à gauche de d .

L'équation devient donc : $\sqrt{x^2+y^2} = e\cdot(d-x)$.

Quelques calculs - un tantinet fastidieux - permettent de montrer que cette équation est équivalente à celle-ci (excellent exercice de calcul algébrique !) :

$$\frac{\left(x+\dfrac{e^2d}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}} = 1 \ .$$

Les dénominateurs sont strictement positifs car $1-e^2 > 0$.

Cette équation est donc du type $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, et nous reconnaissons bien là l'équation cartésienne d'une **ellipse horizontale** centrée au point $(h,0)$, avec :

$$h = -\frac{e^2d}{1-e^2}\ ,\quad a^2 = \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2}\quad \text{et}\quad b^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2}\ .$$

<u>Exemple</u>

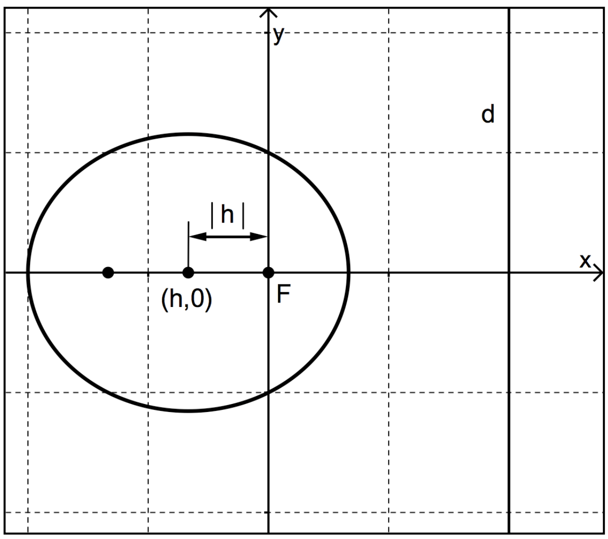
Caractériser la conique de foyer $F(0,0)$, de directrice associée à ce foyer $d \equiv x = 2$, et d'excentricité $e = 0{,}5$.

En calculant h , a^2 et b^2 , nous trouvons respectivement $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{16}{9}$ et $\dfrac{4}{3}$.

Il s'agit donc d'une ellipse d'équation

$$\frac{\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2}{\dfrac{16}{9}} + \frac{y^2}{\dfrac{4}{3}} = 1 \ .$$

Son centre est $\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$, et ses sommets sont les points $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$, $(-2,0)$, $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ et $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.



Si le point F est bien un foyer au sens de la première définition de l'ellipse, alors son symétrique par rapport au centre est un foyer aussi. Il s'agit du point $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$.

Il reste à éclaircir cette question du foyer …

À propos du foyer …

Le point F dont il est question dans la définition focale, est-il bien un foyer au sens de la définition bifocale ?

Pour répondre à cette question, il faut vérifier si la distance entre F et le centre de l'ellipse est égale à c avec $c^2 = a^2 - b^2$ (voir page 9). Calculons c^2 :

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^2d^2}{\left(1-e^2\right)^2} - \frac{e^2d^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2 - e^2d^2\cdot\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\right)^2} = \frac{e^4d^2}{\left(1-e^2\right)^2}$$

Nous avons donc : $c = \dfrac{e^2d}{1-e^2}$.

Comme la distance entre F et le centre de l'ellipse est aussi $|h| = \left|-\dfrac{e^2d}{1-e^2}\right|$ (voir figure page précédente), la réponse à notre question initiale est affirmative.

Une conséquence est que l'excentricité e utilisée dans la définition focale, est la même que celle dont nous avons déjà parlé pour l'ellipse (voir page 13) : $e = \dfrac{c}{a}$.

À propos de la directrice …

Remplaçons $e = \dfrac{c}{a}$ dans l'expression de c :

$$c = \frac{e^2d}{1-e^2} \quad\rightarrow\quad c = \frac{\frac{c^2}{a^2}d}{1-\frac{c^2}{a^2}} \quad\rightarrow\quad c = \frac{\frac{c^2d}{a^2}}{\frac{a^2-c^2}{a^2}} \quad\rightarrow\quad c = \frac{c^2d}{a^2-c^2}$$

En divisant les deux membres par c^2 , et en les multipliant par $a^2 - c^2$, nous trouvons que

$$d = \frac{a^2-c^2}{c} = \frac{a^2}{c} - c$$

Ce résultat vaut pour une ellipse centrée en $(-c,0)$. Si nous considérons la même ellipse centrée en $(0,0)$, la directrice subira également une translation de c vers la droite et nous aurons

$$d = \frac{a^2}{c} - c + c = \frac{a^2}{c}$$

Comme une ellipse admet deux directrices (une par foyer), nous obtenons le résultat suivant :

L'ellipse $\mathcal{E} \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ de foyers $F_1\left(-c,0\right)$ et $F_2\left(c,0\right)$ admet pour directrices les droites $$d_1 \equiv x = -\frac{a^2}{c} \quad\text{et}\quad d_2 \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

<u>Exercice</u> : adaptez ce résultat au cas d'une ellipse verticale.

6.2.2. Deuxième cas : $e = 1$

Si $e = 1$: $d(P,F) = d(P,d)$. Cette égalité correspond à la définition d'une parabole.

6.2.4. Troisième cas : $e > 1$

Pour traiter ce cas, il faut mener des calculs analogues à ceux réalisés pour l'ellipse.
Ils aboutissent à l'équation cartésienne d'une hyperbole.
De nouveau, le point F dont il est question dans la définition focale, est bien un foyer au sens de la définition bifocale.

Il en découle encore le résultat suivant :

> L'hyperbole $\mathcal{H} \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de foyers $F_1(-c,0)$ et $F_2(c,0)$ admet pour directrices les droites
>
> $$d_1 \equiv x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

Exercice : adaptez ce résultat au cas d'une hyperbole verticale.

Équation focale d'une conique : exercices

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation focale et une équation cartésienne de la conique possédant les caractéristiques données.

   a) Foyer $F(1{,}0)$; directrice associée $d \equiv x = 2$; excentricité $e = \frac{1}{4}$.

   b) Foyer $F(2{,}0)$; directrice associée $d \equiv x = 1$; excentricité $e = 2$.

   c) Foyer $F(0{,}1)$; directrice associée $d \equiv y = -3$; excentricité $e = 1$.

---

2. Une conique a pour foyer le point $F(0{,}0)$ et pour directrice la droite $d \equiv x = 3$. Sachant que le point $S(1{,}0)$ est un sommet de la conique situé sur l'axe focal, déterminer la nature de la conique, son équation focale et son équation cartésienne.

---

3. On donne le point $F(-2{,}0)$ et la droite $d \equiv x - 2 = 0$.

   a) Déterminer l'équation focale de toutes les coniques de foyer F et de directrice associée d .

   b) Déterminer l'équation focale de la parabole faisant partie de la famille de coniques décrites en (a) .

---

4. Une conique $\boldsymbol{C}$, d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ a pour foyer le point $F(2{,}0)$, et pour directrice associée la droite $d \equiv x = 4$.

   a) Déterminer une équation focale et une équation cartésienne de $\boldsymbol{C}$.

   b) Calculer les coordonnées d'éventuels points d'abscisse -1 de $\boldsymbol{C}$.

   c) Calculer les coordonnées d'éventuels points d'ordonnée 2 de $\boldsymbol{C}$.

---

5. Une conique $\boldsymbol{C}$, d'excentricité $e = 2$ a pour foyer le point $F(0{,}4)$ et pour directrice associée la droite $d \equiv y + 1 = 0$. Déterminer la nature de la conique, son équation focale et son équation cartésienne.

---

6. Déterminer l'équation focale de la parabole de foyer $F(0,-3)$ et de directrice $d \equiv y = 3$.

---

7. Dans le plan, on donne un point fixe F , et une droite fixe d ne comprenant pas F . La perpendiculaire à d comprenant F coupe d en I . Soit $\boldsymbol{C}$ le lieu géométrique des points P du plan, tels que $4 \cdot d(P,F) = 3 \cdot d(P,I)$. Quelle est la nature de $\boldsymbol{C}$?

---

8. Dans chacun des cas suivants, déterminer le(s) foyer(s) et la (les) directrice(s) des coniques dont une équation cartésienne est donnée.

   a) $C_1 \equiv \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

   b) $C_2 \equiv -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

   c) $C_3 \equiv \dfrac{x^2}{16} + (y-3)^2 = 1$

   d) $C_4 \equiv (y+2)^2 = 4x$