Suites numériques

1. La notion de suite

Une suite numérique est une liste *ordonnée* de nombres réels. Dans une suite, chaque réel est « numéroté » par un nombre naturel.

Voici un exemple :

$$3 \quad 7 \quad 11 \quad 15 \quad 19 \quad 23 \quad \dots$$

Chaque nombre de la suite est un *terme* de celle-ci. Chaque terme est désigné par une même lettre, par exemple u, mais avec un numéro qui lui est propre. La numérotation des termes peut commencer à 0 ou à 1. Si nous choisissons de commencer à 1, nous avons ainsi :

$$u_1 = 3 \qquad u_2 = 7 \qquad u_3 = 11 \qquad u_4 = 15 \qquad u_5 = 19 \qquad u_6 = 23 \ \dots$$

Une telle suite est ainsi une *fonction* de l'ensemble des naturels vers l'ensemble des réels.

Dans certains cas, il est possible de donner une formule pour trouver le *n-ième* terme. C'est le cas dans notre exemple où $u_n = 4n - 1$, avec $n \geq 1$.

Nous appellerons u_n le *terme général* de la suite, tandis que celle-ci sera notée $(u_n)_{n \geq 1}$.

<u>Exemple</u> : écrire les cinq premiers termes de la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+2}$, avec $n \geq 0$.

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad u_1 = \frac{1}{3} \qquad u_2 = \frac{1}{4} \qquad u_3 = \frac{1}{5} \qquad u_4 = \frac{1}{6}$$

Parfois, une suite est définie par son premier terme, et par une formule qui donne tout autre terme à partir du précédent. On dit alors que la suite est définie *par récurrence*.

<u>Exemple</u>

Écrire les quatre premiers termes de la suite définie par $u_1 = 6$ et $u_{k+1} = 5 \cdot u_k$ $(k \geq 1)$. Donner une formule pour le *n-ième* terme.

$$u_1 = 6 \qquad u_2 = 5 \cdot u_1 = 30 \quad u_3 = 5 \cdot u_2 = 5^2 \cdot u_1 = 150 \quad u_4 = 5 \cdot u_3 = 5^3 \cdot u_1 = 750$$

De la façon dont nous avons calculé les premiers termes, nous déduisons que $u_n = 5^{n-1} \cdot u_1$.

Ainsi, $u_5 = 5^4 \cdot u_1 = 625 \cdot 6 = 3750$.

Exercices

1. Déterminer les quatre premiers termes et le huitième terme de la suite.

a) $u_n = 12 - 3n \quad (n \geq 1)$	d) $u_n = 2^n \quad (n \geq 0)$
b) $u_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1} \quad (n \geq 0)$	e) $u_n = 10 + \dfrac{1}{n} \quad (n \geq 1)$
c) $u_n = 2 - 0{,}1^n \quad (n \geq 1)$	f) $u_n = (-3)^n \quad (n \geq 1)$

2. Calculer les cinq premiers termes de la suite définie par récurrence.

a) $u_1 = 2 \qquad u_{k+1} = u_k + 3$	d) $u_1 = 10 \qquad u_{k+1} = \dfrac{1}{u_k}$
b) $u_1 = 256 \qquad u_{k+1} = -\dfrac{1}{4} \cdot u_k$	e) $u_1 = 3 \qquad u_{k+1} = k \cdot u_k$
c) $u_1 = -2 \qquad u_{k+1} = u_k^2$	f) $u_1 = 50 \qquad u_{k+1} = 100 - u_k$

2. Suites arithmétiques

2.1. Définition

Une suite u_1 , u_2 , u_3 , … , u_n , … est une suite *arithmétique* s'il existe un réel r tel que, pour tout naturel k ,

$$u_{k+1} = u_k + r \; .$$

Le nombre $r = u_{k+1} - u_k$ est appelé *raison* de la suite.

Exemples de suites arithmétiques

- La suite des naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2 .
- Les réels 17 , 10 , 3 , -4 , -11 , … sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison -7 , car la différence entre deux termes consécutifs vaut toujours -7 .

2.2. Propriétés

❶ Terme particulier d'une suite arithmétique

Le terme u_n ($n \geq 1$) d'une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r est donné par la formule :

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1) \cdot r}$$

Preuve : dans une suite arithmétique, on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant la raison r . Pour passer du 1$^{\text{er}}$ terme au 10$^{\text{ème}}$ terme, par exemple, il faut ajouter 9 fois la raison, ce qui permet d'écrire $u_{10} = u_1 + 9 \cdot r = u_1 + (10-1) \cdot r$. Pour passer du 1$^{\text{er}}$ terme au *n-ième* terme, il faut ajouter $(n-1)$ fois la raison, d'où la formule.

<u>Application</u> : déterminer le $9^{\text{ème}}$ terme de la suite 17 , 10 , 3 , -4 , -11 , …

Nous avons $u_1 = 17$ et $r = -7$. Donc : $u_9 = u_1 + 8 \cdot r = 17 + 8 \cdot (-7) = -39$.

❷ <u>Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique</u>

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme u_1 est notée $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Elle peut se calculer par la formule

$$\boxed{S_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}}$$

<u>Preuve</u>

Ecrivons deux fois la somme des n premiers termes de la suite, en commençant par u_1 d'abord, en commençant par u_n ensuite :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_2 + u_1$$

En additionnant ces deux égalités membres à membre, et en groupant les termes « superposés », nous obtenons :

$$2 \cdot S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + ... + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$$

Regardons maintenant de plus près chaque groupe de deux termes :

$$u_1 + u_n$$
$$u_2 + u_{n-1} = u_1 + r + u_n - r = u_1 + u_n$$
$$u_3 + u_{n-2} = u_1 + 2r + u_n - 2r = u_1 + u_n$$
$$\ldots$$

Chaque groupe de deux termes est ainsi égal à $u_1 + u_n$. Comme il y a n groupes, nous trouvons :

$$2 \cdot S_n = n \cdot (u_1 + u_n) \quad \text{et donc} \quad S_n = \frac{n \cdot (u_1 + u_n)}{2}$$

<u>Application</u> : calculer la somme 12 + 20 + 28 + 36 + 44 + 52 + 60 .

Il s'agit d'additionner les sept premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 12 et de raison 8 .

$$S_7 = 7 \cdot \frac{u_1 + u_7}{2} = 7 \cdot \frac{12 + 60}{2} = 7 \cdot 36 = 252$$

3. Suites géométriques

3.1. Définition

Une suite u_1 , u_2 , u_3 , … , u_n , … est une *suite géométrique* si $u_1 \neq 0$ et s'il existe un nombre réel $q \neq 0$ tel que, pour tout naturel k ,

$$u_{k+1} = u_k \cdot q \ .$$

Le nombre $q = \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ est appelé *raison* de la suite.

Exemples de suites géométriques

- Les réels ¼ , ½ , 1 , 2 , 4 , 8 , … sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 , car le quotient de deux termes consécutifs vaut toujours 2 .
- La suite 100 , -10 , 1 , -0.1 , 0.01 , … sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison -10 , car le quotient de deux termes consécutifs vaut toujours -10 .

3.2. Propriétés

❶ Terme particulier d'une suite géométrique

Le terme u_n ($n \geq 1$) d'une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q est donné par la formule :

$$\boxed{u_n = u_1 \cdot q^{n-1}}$$

Preuve : dans une suite géométrique, on passe d'un terme au terme suivant en multipliant par la raison r . Pour passer du 1^{er} terme au $10^{ème}$ terme, par exemple, il faut multiplier 9 fois de suite par la raison, ce qui permet d'écrire $u_{10} = u_1 \cdot r^9 = u_1 \cdot r^{10-1}$. Pour passer du 1^{er} terme au *nième* terme, il faut multiplier $(n-1)$ fois de suite par la raison, d'où la formule.

❷ Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_1 , et de raison $q \neq 1$, est notée $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Elle peut se calculer par la formule

$$\boxed{S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Preuve

Exprimons chaque terme de la somme $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction du premier terme u_1 :

$$S_n = u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + ... + u_1 \cdot q^{n-2} + u_1 \cdot q^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplions chaque membre de l'égalité précédente par la raison q :

$$q \cdot S_n = u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + ... + u_1 \cdot q^{n-1} + u_1 \cdot q^n \qquad (2)$$

Remarquons que les termes de droite de l'égalité (1) se retrouvent tous dans le membre de droite de l'égalité (2) , à l'exception de u_1 . Si nous soustrayons membre à membre l'égalité (2) de l'égalité (1) , tous ces termes communs vont disparaître, et il ne restera plus que u_1 et le dernier terme de (2) , à savoir $u_1 \cdot q^n$:

$$S_n - q \cdot S_n = u_1 - u_1 \cdot q^n$$

Mettant en évidence dans chaque membre, nous trouvons $S_n \cdot (1-q) = u_1 \cdot (1-q^n)$, et donc :

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

<u>Application</u> : calculer la somme ¼ + ½ + 1 + 2 + 4 + 8 .

La réponse est immédiate par calcul mental, mais elle peut se vérifier à l'aide de la formule ci-dessus : il s'agit d'additionner les six premiers termes d'une suite géométrique de premier terme ¼ et de raison 2 .

$$S_6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-63}{-1} = \frac{63}{4} = 15{,}75$$

<u>Exercices sur les suites arithmétiques (S.A.) et géométriques (S.G.)</u>

1. Calculer le cinquième terme, le vingtième terme et le n[ème] terme de la S.A.

   a) 2, 6, 10, 14, ...
   b) 16, 13, 10, 7, ...
   c) -6, -4.5, -3, -1.5, ...

2. Calculer la raison de la S.A. dont certains termes sont connus. Calculer ensuite u_{50} .

   a) $u_2 = 21$ et $u_6 = -11$
   b) $u_4 = 14$ et $u_{11} = 35$

3. Déterminez les cinq premiers termes d'une S.A. dont le premier terme égale 3 et le quatrième égale 17.

5. Calculer la somme des vingt premiers termes de la S.A. 1, 4, 7, 10, ...

6. Une pile de bûches a 24 bûches dans la rangée du bas, 23 dans la deuxième rangée, 22 dans la troisième et ainsi de suite. La rangée du haut est formée de 10 bûches.
   Calculer le nombre total de bûches dans la pile.

7. Les dix premières rangées de places assises dans une certaine partie d'un stade ont 30 sièges, 32 sièges, 34 sièges, et ainsi de suite. De la onzième rangée à la vingtième rangée, chaque rangée est formée de 50 sièges.
   Calculer le nombre total de sièges dans cette partie du stade.

8. Calculer le cinquième terme, le dixième terme et le n^{ème} terme de la S.G.

   a) 2, 6, 18, 54, ...
   b) 300, -30, 3, -0.3, ...
   c) 4, -6, 9, -13.5, ...

9. Calculer toutes les valeurs possibles de la raison pour la S.G. dont deux termes sont donnés.

   a) $u_4 = 3$ et $u_6 = 9$
   b) $u_3 = 4$ et $u_7 = \dfrac{1}{4}$

10. Soit une S.G. dont $u_4 = 4$ et $u_7 = 12$. Calculer la raison et u_{10} .

11. Le troisième terme d'une S.G. est 5 et le sixième terme est (-40) .
    Calculer le huitième terme.

12. Calculer le nombre x pour que 12 , x et 48 soient trois termes consécutifs d'une S.G. (le nombre x s'appelle la moyenne géométrique des nombres 12 et 48).

13. Calculer le nombre x pour que 20 , x et 25 soient trois termes consécutifs d'une S.G.

14. Calculer les nombres x et y pour que 4 , x , y et 500 soient quatre termes consécutifs d'une S.G. (cette opération s'appelle « insérer deux moyens géométriques entre 4 et 500 »).

15. Insérer trois moyens géométriques entre 2 et 512.

16. Calculer les sommes spécifiées pour les P.G. dont les premiers termes sont donnés.

    a) 3 , 9 , 27 , 81 , ... ; S_{10} .
    b) 1 , 0.5 , 0.25 , 0.125 , ... ; S_7 et S_{15} .
    c) 1 , $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{9}{4}$, $\dfrac{27}{8}$, ... ; S_{15}

17. Une somme de 5000 € est placée en banque sur un compte à intérêts composés, au taux de 4% l'an. Quel sera le montant du compte après 1 an, 2 ans, 3 ans, ..., *n* ans ?

18. En 2005, la population mondiale comptait environ 6,5 milliards de personnes.
    Si l'on admet que le taux de croissance annuel de cette population sera de 1,2 % au cours des prochaines années, combien la Terre comptera-t-elle d'êtres humains en 2010 ? Et en 2030 ?

4. Limite d'une suite

Quelle que soit la suite considérée, il est assez naturel de se demander quel sera le comportement des termes de la suite, si l'on avance de plus en plus loin dans celle-ci.

4.1. Exemples

Décrire le comportement des termes de chacune des suites que voici :

❶ 5 10 15 20 …

❷ -10 -100 -1000 -10000 …

❸ $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \ldots$

❹ $u_n = \frac{2n}{n+1} \quad (n \geq 0)$

<u>Constatations</u>

❶ La première suite voit ses termes grandir sans cesse. Quel que soit le « plafond » que l'on se fixe, c'est à dire quel que soit le nombre positif que l'on se donne, aussi grand soit-il, les termes de la suite vont finir par le dépasser et rester plus grands que lui.

❷ La deuxième suite voit ses termes diminuer sans cesse. Quel que soit le « plancher » que l'on se fixe, c'est à dire quel que soit le nombre négatif que l'on se donne, aussi petit soit-il, les termes de la suite vont finir par devenir et rester plus petits que lui.

❸ La troisième suite voit ses termes s'approcher de 0. Cette idée doit être précisée : les termes s'approchent de 0 aussi près que l'on veut. Cela signifie que quelle que soit la distance par rapport à 0 que l'on imagine, aussi petite soit-elle, les termes de la suite vont finir par se situer et rester à une distance inférieure.

❹ Les termes de la quatrième suite se comportent d'une façon comparable à ceux de la troisième. Ces termes convergent vers le réel 2. Expliquer ce que cela signifie à la façon de l'exemple précédent.

4.2. Vocabulaire et définitions

Suite qui tend vers « plus l'infini »

La suite (u_n) tend vers « plus l'infini » si u_n croît sans borne lorsque n augmente sans cesse. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Autrement dit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si le réel u_n devient supérieur à tout nombre positif, lorsque n augmente sans cesse.

Suite qui tend vers « moins l'infini »

La suite (u_n) tend vers « moins l'infini » si u_n décroît sans borne lorsque n augmente sans cesse. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

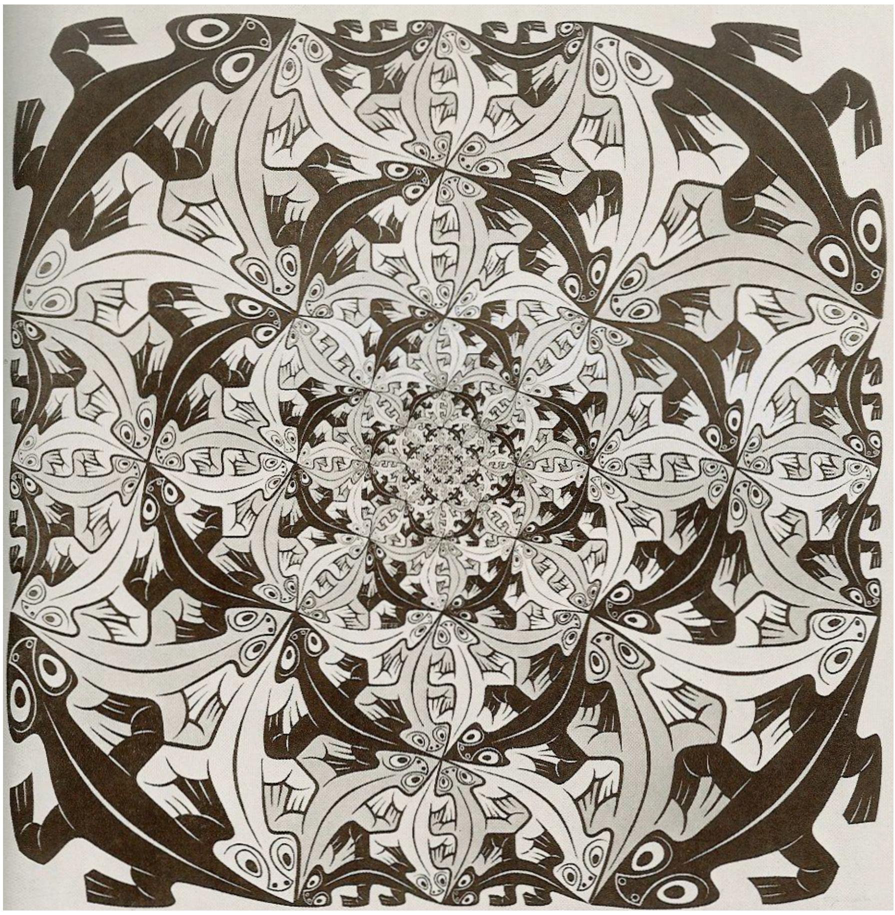
Autrement dit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si le réel u_n devient inférieur à tout nombre négatif, lorsque n augmente sans cesse.

Remarque : les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne désignent pas des nombres. On les utilise pour exprimer qu'une variable croît (décroît) sans cesse et finit par devenir supérieure (inférieure) à n'importe quel nombre positif (négatif).

Suite qui tend vers un réel

La suite (u_n) tend vers le réel a signifie que la différence $|u_n - a|$ devient de plus en plus proche de 0 lorsque n augmente sans cesse. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Autrement dit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ si et seulement si le réel $|u_n - a|$ devient inférieur à tout nombre strictement positif, lorsque n augmente sans cesse.



M.C. ESCHER « De plus en plus petit I »
Gravure sur bois (1956)

Cas particulier

Une suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si le réel $|u_n|$ devient inférieur à tout nombre strictement positif, lorsque n augmente sans cesse.

Suite ne possédant pas de limite

Lorsqu'une suite ne présente aucun des trois comportements que nous venons de décrire, nous dirons qu'elle n'a pas de limite.

Voici un exemple :

1 -2 4 -8 16 -32 64 -128 …

Il est clair que ces termes ne tendant pas vers un réel, car leur valeur absolue devient de plus en plus grande. Ils ne tendent pas vers $+\infty$ car bien que certains termes peuvent dépasser tout nombre positif, ce n'est pas le cas de tous les termes car ceux-ci sont alternativement positifs et négatifs. Ils ne tendent pas vers $-\infty$ non plus (expliquer). Cette suite n'a pas de limite.

4.3. Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Suites de puissances de réels

Comment la suite $(u_n) = a^n$ se comporte-t-elle, pour n de plus en plus grand ? La réponse dépend évidemment de la valeur de a .

- 1er cas : si $a > 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
- 2ème cas : si $a = 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- 3ème cas : si $-1 < a < 1$ c'est-à-dire si $|a| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- 4ème cas : si $a \leq -1$, la suite n'a pas de limite.

Nous admettrons ces propriétés (donner un exemple pour illustrer chaque cas).

Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Que se passe-t-il si l'on additionne indéfiniment les termes d'une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q , c'est à dire si l'on calcule

$$u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + ... + u_1 \cdot q^{n-1} + ...$$

Nous pouvons mettre u_1 en évidence : $u_1 \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} ...\right)$.
La question se ramène alors à comprendre le comportement de la somme illimitée

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ...$$

Ce comportement dépend bien sûr de la valeur de la raison q .

Si $q \geq 1$, nous sommes dans le premier cas ou dans le deuxième cas évoqués ci-dessus. Les termes de la somme deviennent de plus en plus grands ou sont tous égaux à 1. La somme grandira donc indéfiniment.

Par contre, si $|q| < 1$, nous sommes dans le troisième cas, et les termes de la somme deviennent de plus en plus proches de 0 . Même si l'on additionne indéfiniment, on peut se demander si la somme continuera à grandir sans borne, sachant que plus loin on va, plus les termes ajoutés sont minuscules.

Considérons d'abord la somme des n premiers termes.

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}$$

En vertu de la formule vue à la page 4, nous avons :

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Si le nombre n de termes grandit sans cesse, alors q^n tend vers 0 et S_n tend vers $\frac{1}{1-q}$.

Nous en tirons le théorème suivant :

$$\boxed{\text{Si } |q| < 1 \text{ , alors } \lim_{n \to +\infty} \left(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}\right) = \frac{1}{1-q}}$$

Conséquence directe : si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} \left(u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + ... + u_1 \cdot q^{n-1}\right) = \frac{u_1}{1-q}$.

<u>Exemple</u>

Quelle est la limite de la somme $1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + 0,5^4 + ...$?

Nous sommes bien dans les conditions du théorème car $q = 0,5 < 1$.

D'après la formule, cette somme tend vers : $\frac{1}{1 - 0,5} = \frac{1}{0,5} = 2$.

Ceci pouvait être deviné en observant les résultats de quelques sommes finies, mais avec des nombres de plus en plus grands de termes :

$S_3 = 1 + 0,5 + 0,5^2 = 1,75$

$S_5 = 1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + 0,5^4 = 1,9375$

$S_{10} = 1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + 0,5^4 + ... + 0,5^9 \approx 1,9980$

$S_{15} = 1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + 0,5^4 + ... + 0,5^{14} \approx 1,9999$

…

Exercices

1. Calculer la limite de chacune des sommes illimitées suivantes.

   a) $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+...$

   b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$

   c) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+...$

   d) $256+192+144+108+81+...$

---

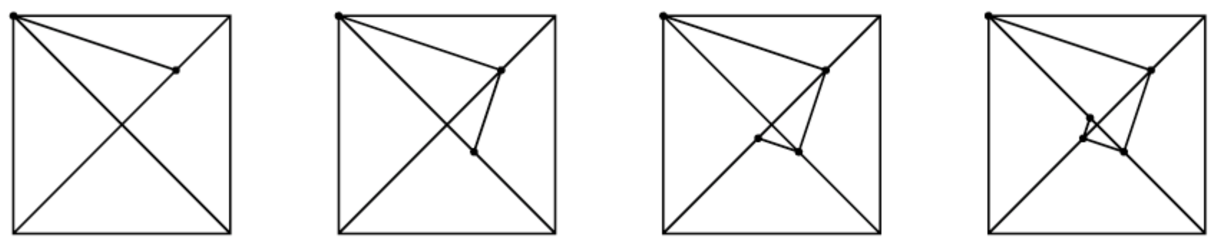
2. Une balle en caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 10 mètres. Sachant qu'à chaque rebond, elle atteint la moitié de la hauteur qu'elle avait atteinte précédemment, calculer la distance totale que parcourt la balle avant de s'arrêter.

---

3. Le poids d'une pendule balance le long d'un arc de 24 centimètres de long. Sachant que la longueur de chaque balancement est approximativement égale aux 5/6 de la longueur qu'il avait parcourue lors du balancement précédent, utiliser une somme illimitée pour évaluer la distance totale que parcourt le poids avant de s'arrêter.

---

4. À l'intérieur d'un carré dont la diagonale mesure deux unités, on construit une ligne brisée de la manière indiquée par la figure ci-dessous. Le premier segment joint un sommet du carré au milieu d'une demi diagonale ; le deuxième va jusqu'au quart de la demi diagonale suivante (le quart est mesuré à partir du centre du carré) ; le troisième joint va jusqu'au huitième de la demi diagonale suivante, et ainsi de suite.

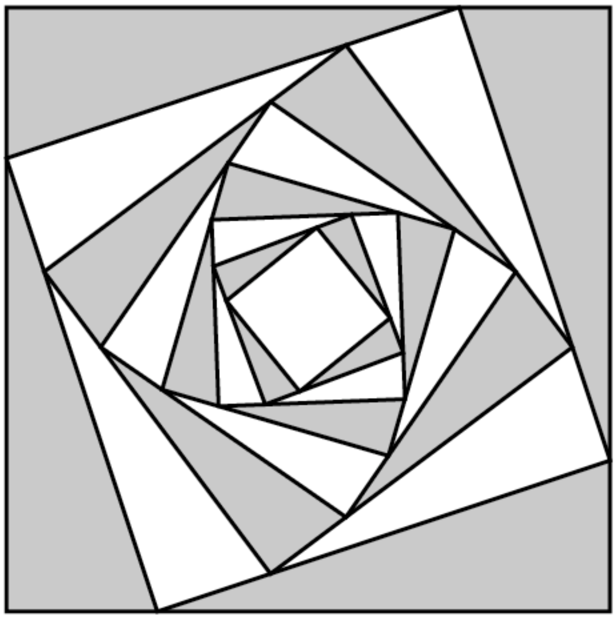


   a) Quelle est la longueur du premier segment ? Des deux premiers ? Des trois premiers ?

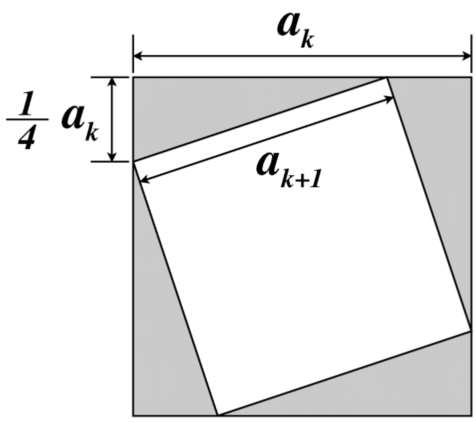
   b) Quelle est la longueur des n premiers ?

   c) Quelle est la longueur totale ?

5. Voici une suite de carrés. Désignons ces carrés par S_1 , S_2 , … , S_k , …
Soient a_k , A_k et P_k respectivement le côté, l'aire et le périmètre du carré S_k .



Le carré S_{k+1} est construit à partir de S_k en reliant quatre points de ce dernier, chaque point se trouvant à une distance de $\frac{1}{4}a_k$ d'un sommet du carré comme indiqué sur la figure ci-contre.



a) Etablir la relation entre a_{k+1} et a_k .

b) Calculer a_n , A_n et P_n .

c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$.

---

6. Soit k un nombre naturel différent de 0 et de 1 ($k \in N_0 \setminus \{1\}$).

Prouver que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^i} = \frac{1}{k-1}$.