Limites de fonctions

Introduction

Nous allons découvrir le concept de limite de fonction au travers de différentes situations.

En voici une première : lorsque nous étudions une fonction, notamment pour réaliser son graphique, nous commençons par déterminer son domaine de définition. Lorsque cette fonction n'est pas définie en un réel a, il peut être intéressant d'étudier comment elle se comporte pour des valeurs de la variable « proches » de ce réel a.

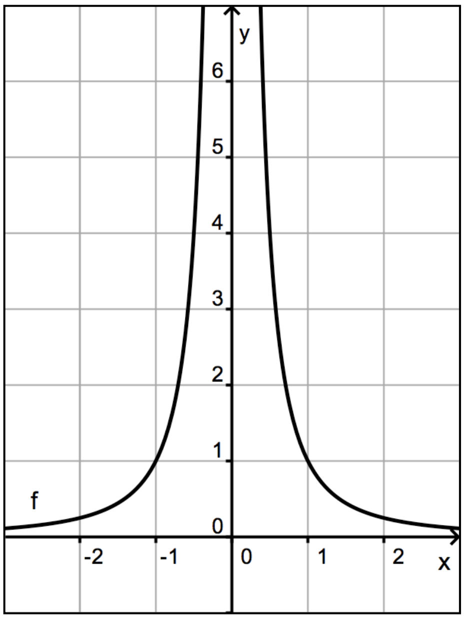
Une autre situation est liée au comportement d'une fonction lorsque la variable prend des valeurs de plus en plus grandes (ou de plus en plus petites). Concrètement, cela peut correspondre à l'étude de l'évolution d'une grandeur au cours du temps : par exemple, une population d'êtres vivants dans un milieu donné pourra-t-elle croître indéfiniment ou se stabilisera-t-elle à long terme ?

Un autre problème important nécessitant la notion de limite est la détermination du taux de variation instantané d'une fonction (le calcul de la vitesse instantanée d'un mobile en physique en est un exemple). Cela nous mènera à la notion de dérivée qui fera l'objet d'un autre chapitre.

1. D'abord, des exemples ...

Exemple 1

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.



Son domaine de définition étant $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, intéressons-nous au comportement de f pour des valeurs de x de plus en plus proches de 0.

a) Considérez des valeurs de x en progression géométrique de valeur initiale 1 et de raison $0{,}1$. Étudiez la suite des images de ces réels.

b) Faites de même si la valeur initiale de x est -1.

c) Est-il possible que $f(x)$ devienne strictement supérieure à 100 ? Pour quelles valeurs de x ? Mêmes questions pour $f(x) > 10000$ et pour $f(x) > 1000000$.

d) Si l'on donne un nombre réel $A > 0$, est-il possible que $f(x) > A$ même si A est « très, très grand » ? Pour quelles valeurs de x ?

Exemple 2

Reprenons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Interrogeons-nous maintenant sur son comportement pour des valeurs de x de plus en plus grandes, et pour des valeurs de x de plus en plus petites.

a) Considérez des valeurs de x en progression géométrique de valeur initiale 1 et de raison 10. Étudiez la suite des images de ces réels.

b) Faites de même si la valeur initiale de x est -1.

c) Est-il possible que $f(x)$ devienne strictement inférieure à $0{,}01$? Pour quelles valeurs de x ? Mêmes questions pour $f(x) < 0{,}0001$ et pour $f(x) < 0{,}000001$.

d) Si l'on donne un nombre réel $\varepsilon > 0$, est-il possible que $f(x) < \varepsilon$ même si ε est « très, très proche de 0 » ? Pour quelles valeurs de x ?

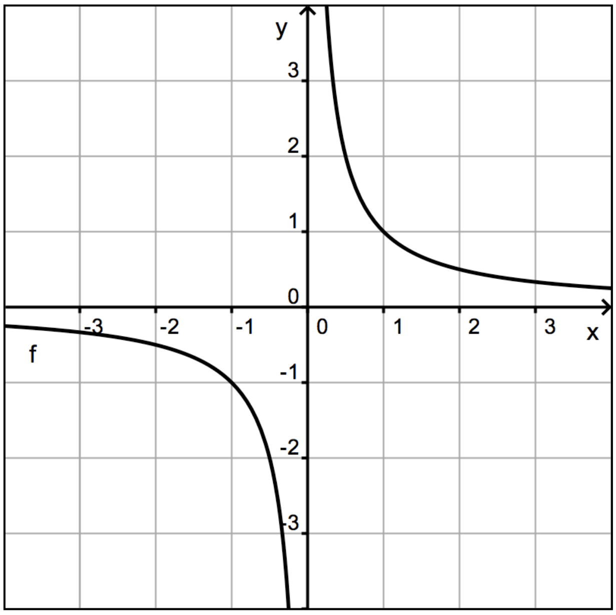
Exemple 3

Penchons-nous sur une autre fonction bien connue :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

a) Sur le modèle de l'exemple 1, étudiez le comportement de f pour x de plus en plus proche de 0 (c'est évidemment là que des questions se posent car dom $f = \boldsymbol{R}_0$).

b) Etudiez le comportement de f pour x de plus en plus grand, et puis pour x de plus en plus petit (sur le modèle de l'exemple 2).



Exemple 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Sur le modèle des exemples précédents, étudiez le comportement de f :

a) pour des valeurs de x de plus en plus proches de 4 ;

b) pour des valeurs de x de plus en plus grandes ;

c) pour des valeurs de x de plus en plus petites.

Exemple 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \le 1 \\ -2x+6 & si \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Tracez le graphique de f.

Sur le modèle des exemples précédents, étudiez le comportement de f :

b) pour des valeurs de x de plus en plus proches de 4 ;

c) pour des valeurs de x de plus en plus grandes ;

d) pour des valeurs de x de plus en plus petites.

Nous allons maintenant étudier deux fonctions de manière un peu plus approfondie, et découvrir une nouveauté du point de vue graphique.

Exemple 6

Soit la fonction $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Sur le modèle des exemples précédents, étudiez le comportement de f pour des valeurs de x proches de 0 (évidemment), ensuite pour des valeurs de x de plus en plus grandes, et enfin pour des valeurs de x de plus en plus petites.
Exprimez vos constatations en termes de limites.

b) Calculez $f(1000)$, $f(10000)$, …
Pour de très grandes valeurs de x , vous observez que $f(x) \approx ...$.

Exemple 7

Soit la fonction $f(x) = 2x + 5 + \dfrac{1}{x-2}$.

a) Sur le modèle des exemples précédents, étudiez le comportement de f pour des valeurs de x proches de 2 (bien sûr), ensuite pour des valeurs de x de plus en plus grandes, et enfin pour des valeurs de x de plus en plus petites.
Exprimez vos constatations en termes de limites.

b) Calculez $f(1000)$, $f(10000)$, …
Pour de très grandes valeurs de x , vous observez que $f(x) \approx ...$.

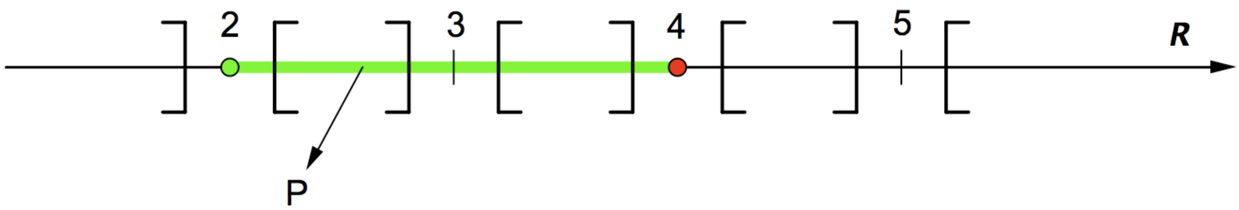
Quelle est la limite de cette fonction lorsque x tend vers ... ? Parfois, cette question n'a pas de sens !
Revoyons l'exemple 4 : nous comprenons aisément qu'étudier la comportement de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ pour des valeurs de x de plus en plus petites - et qui deviennent donc négatives - n'a aucun sens. De même, une limite telle que $\lim_{x \to -4} \sqrt{x}$ n'existe pas.

La question de la limite n'aura de sens que si la variable peut tendre vers un réel donné, ou vers un infini, en restant dans le domaine de définition de la fonction.

Ces considérations nous mènent à introduire la notion d'adhérence.

2. Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Considérons une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$, par exemple l'intervalle $P = [\,2\,,4\,[$.



Le réel 4 n'appartient pas à P, mais il est en quelque sorte « collé » à P.
Nous pouvons en effet observer que tout intervalle ouvert comprenant 4 contient au moins un point de P (même si cet intervalle est très « étroit »).

Les exemples suivants illustrent cette observation :

$\mathbf{I}_1 =]\,3.5\,,4.5\,[$: $\mathbf{I}_1$ contient 4 et contient bien des points de P : $3.6\,,3.75\,,\ldots$

$\mathbf{I}_2 =]\,3.9\,,4.1\,[$: $\mathbf{I}_2$ contient 4 et contient bien des points de P : $3.91\,,3.99\,,\ldots$

$\mathbf{I}_3 =]\,3.99\,,4.01\,[$: $\mathbf{I}_3$ contient 4 et contient bien des points de P : $3.991\,,3.999\,,\ldots$

Et ainsi de suite … Il est impossible de trouver un intervalle ouvert comprenant 4 et ne comprenant aucun point de P : on dit que 4 est « adhérent » à P.

Une façon imagée d'exprimer que 4 est adhérent à P est de dire : « il est possible d'approcher 4 d'aussi près que l'on veut - dans le cas présent sans atteindre 4 - tout en restant dans P ».

D'une façon analogue, on justifie que des réels comme 2 , 3 , 3.5 , … sont adhérents à P (notons que tout réel de P est nécessairement adhérent à P).

Et qu'en est-il du nombre 5 par exemple ?

Il est facile de trouver un intervalle ouvert contenant 5 mais ne contenant aucun point de P : l'intervalle $]\,4\,,6\,[$ par exemple.
Nous en concluons que 5 n'est pas adhérent à P (intuitivement, nous voyons qu'il est « détaché » de P).

Définition

Soit P une partie de $\boldsymbol{R}$. Le réel a est adhérent à P si et seulement si tout intervalle ouvert comprenant a comprend au moins un élément de P.

Remarque

L'ensemble des points adhérents à P s'appelle l'adhérence de P et se note $\overline{P}$.
Ainsi, pour $P = [\ 2\ ,\ 4\ [$, nous avons $\overline{P} = [\ 2\ ,\ 4\ ]$.

Exercices

1. Soit l'intervalle $P =]\ 3\ ,\ 8\ ]$.

   a) Le réel 3 est-il adhérent à P ? Justifiez.

   b) Même question pour les nombres $8{,}1$ et $2{,}99$.

---

2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez le domaine de définition ainsi que l'adhérence du domaine de définition.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \dfrac{1}{x}$

   c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

   d) $f(x) = \sqrt{x^2 \cdot (x-1)}$

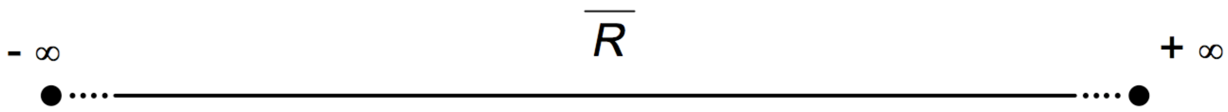
---

3. « Plus l'infini » et « moins l'infini » (+ ∞ et - ∞)

On définit « plus l'infini » et « moins l'infini » comme deux objets, qui ne sont pas des nombres réels, mais qui peuvent être comparés à tout réel de la façon suivante :

$$\forall\ x \in \boldsymbol{R} : -\infty < x < +\infty\ .$$

Nous définissons alors un nouvel ensemble, appelé « droite achevée » , par : $\overline{R} = R \cup \{ -\infty , +\infty \}$.



Nous voudrions pouvoir dire que $+\infty$ et $-\infty$ sont adhérents à R . Pour cela, nous devons définir ce qu'est un intervalle ouvert de $\overline{R}$. Cette définition comporte trois points :

1° tout intervalle ouvert de R est un intervalle ouvert de $\overline{R}$;

2° tout ensemble dont les éléments sont $+\infty$ et les réels strictement supérieurs à un réel r fixé est appelé intervalle ouvert de $\overline{R}$ qui comprend $+\infty$: $]\, r , +\infty\,]$;

3° tout ensemble dont les éléments sont $-\infty$ et les réels strictement inférieurs à un réel r fixé est appelé intervalle ouvert de $\overline{R}$ qui comprend $-\infty$: $[\, -\infty , r\, [$.

Avec cette définition et celle de la page précédente, nous pouvons dire que $-\infty$ et $+\infty$ sont adhérents à R .

4. Définitions des limites en termes de suites

Soit une fonction réelle f et soient a , $b \in \overline{R}$, avec a <u>adhérent</u> au domaine de définition de f .

La limite de la fonction f , lorsque x tend vers a , est égale à b si et seulement si l'image de <u>toute</u> suite de réels x appartenant à $\operatorname{dom} f$ et tendant vers a est une suite de réels $f(x)$ tendant vers b .

On écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ .$$

Dans cette définition, les lettres a et b peuvent donc représenter des nombres réels ou encore $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercices

1. En utilisant des suites de nombres et votre calculatrice, évaluez les limites suivantes.
   Exprimez ensuite votre résultat par une phrase bien construite.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{2x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{4}{2-x}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+6x-27}{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+3x^2}{4x^2-5}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

---

2. **Parlons de limites …**

Dans chacune des phrases suivantes, il est question d'une fonction f de la variable x . Chaque phrase est sensée exprimer une limite. Laquelle selon vous ?

a) Quelle que soit la suite de nombres - extraite du domaine de cette fonction - qui tend vers 2 , la suite des images de ces nombres tend vers - ∞ .

b) La fonction peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, il suffit de prendre des valeurs suffisamment petites de la variable.

c) La fonction peut prendre des valeurs aussi petites que l'on veut, il suffit de prendre des valeurs suffisamment proches de - 1 variable.

d) La fonction prend des valeurs aussi proches de 3 que l'on veut, il suffit de prendre des valeurs suffisamment grandes de la variable.

e) Plus les valeurs de la variable sont proches de ½ , plus la fonction prend des valeurs proches de 0 .

f) Le graphique de la fonction a une asymptote d'équation $x = 1$.

g) Le graphique de la fonction a une asymptote d'équation $y = -\frac{1}{4}$.

h) Plus les valeurs de la variable sont grandes, plus les valeurs prises par la fonction sont grandes.

i) Plus les valeurs de la variable sont petites, plus les valeurs prises par la fonction sont proches de - 4 .

j) La force d'attraction gravitationnelle entre deux corps dépend de la distance qui les sépare ainsi que de la masse de chacun d'eux [*].

1° Plus les corps sont proches, plus l'intensité de la force est grande.

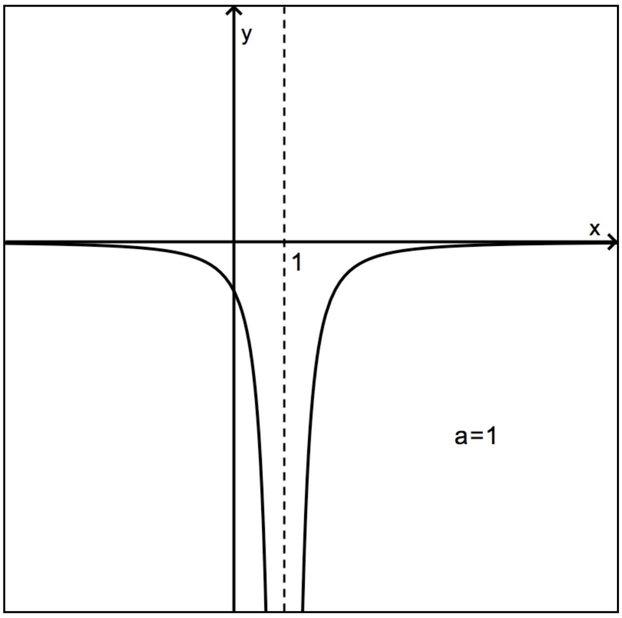
2° Plus les corps sont éloignés, plus l'intensité de la force est faible.

[*] Voyez votre cours de physique : $F = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$.

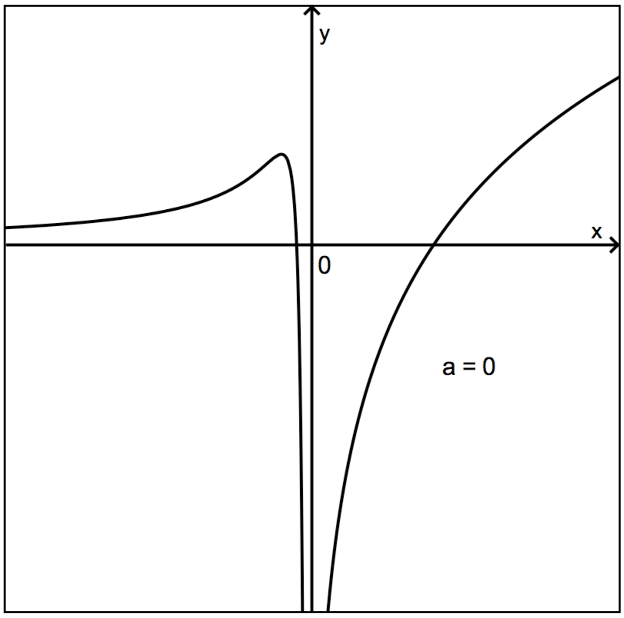
3. **Limites et graphiques.**

Pour chacune des fonctions représentées ci-après, déterminez, si possible, les limites lorsque la variable x tend vers $+\infty$, $-\infty$ et a (la valeur de a est indiquée à proximité de chaque graphique).
Déterminez les équations des asymptotes éventuelles aux graphiques de cette fonction.

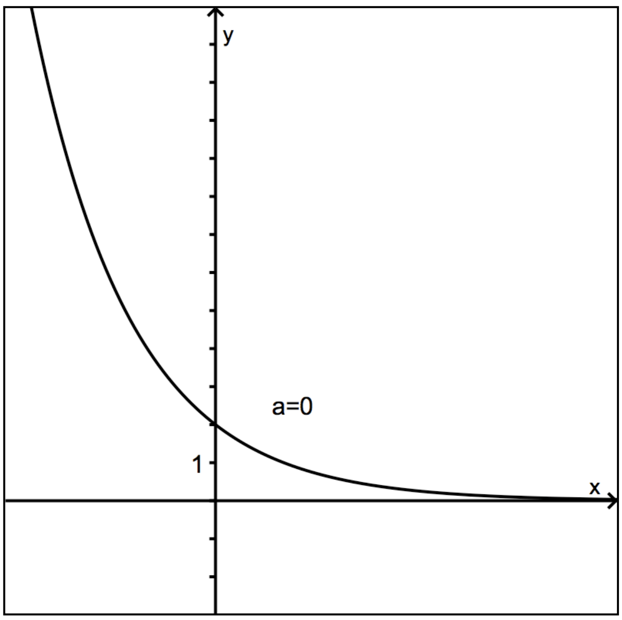
①



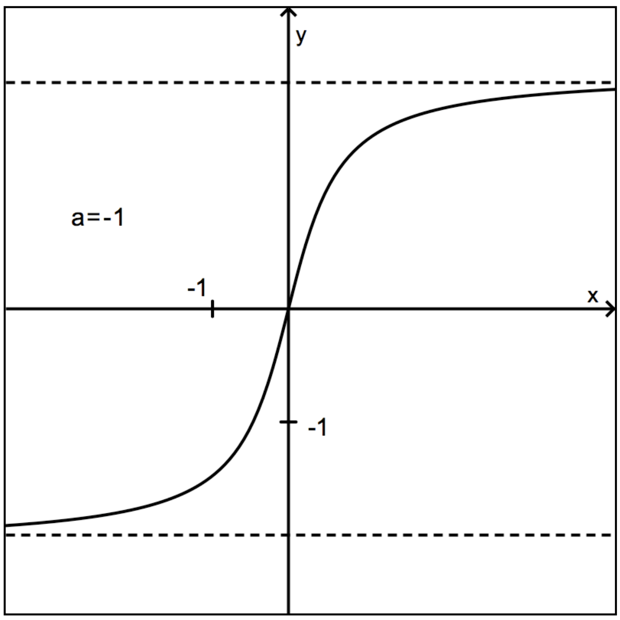
②



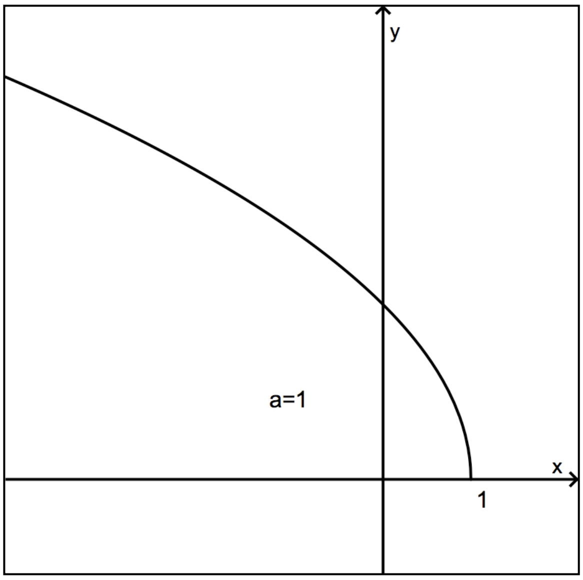
③



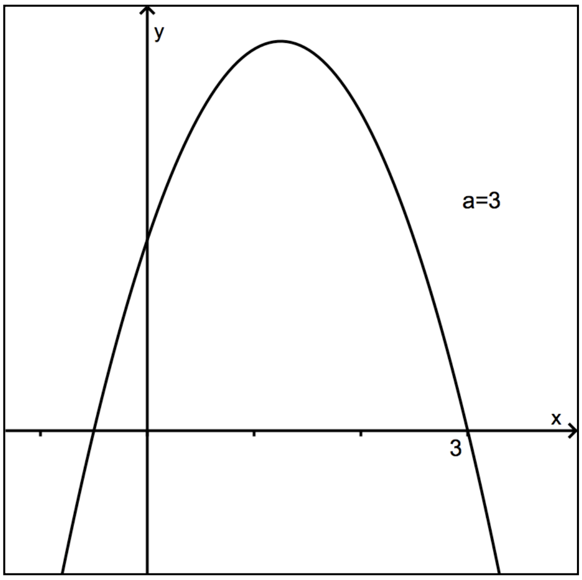
④



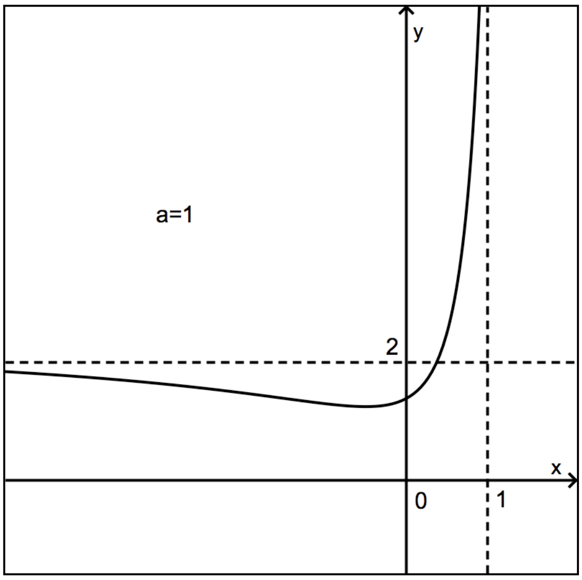
⑤



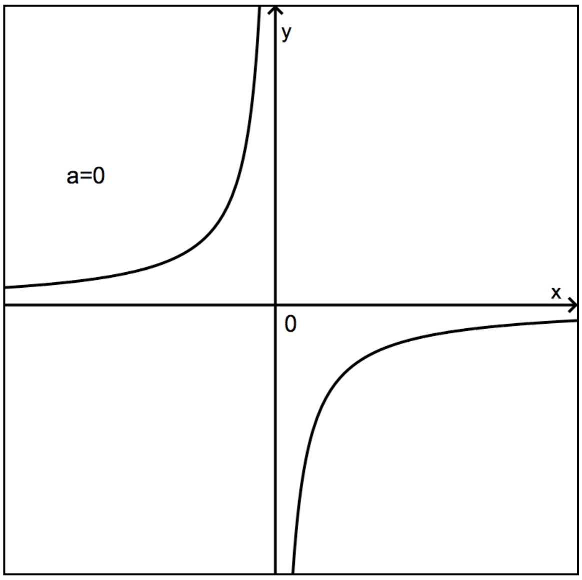
⑥



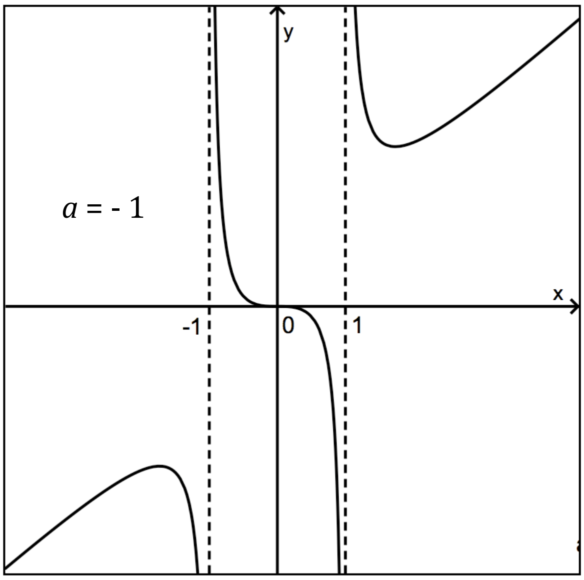
⑦



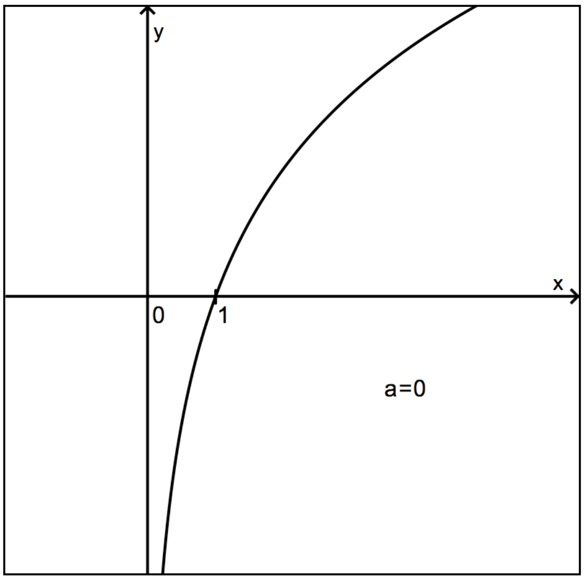
⑧



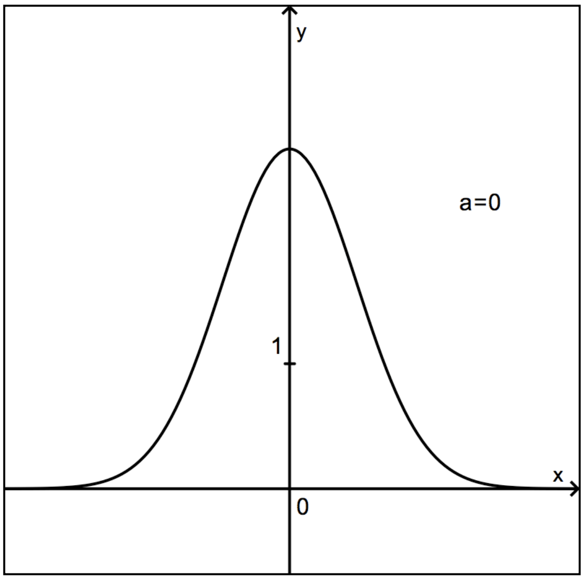
⑨



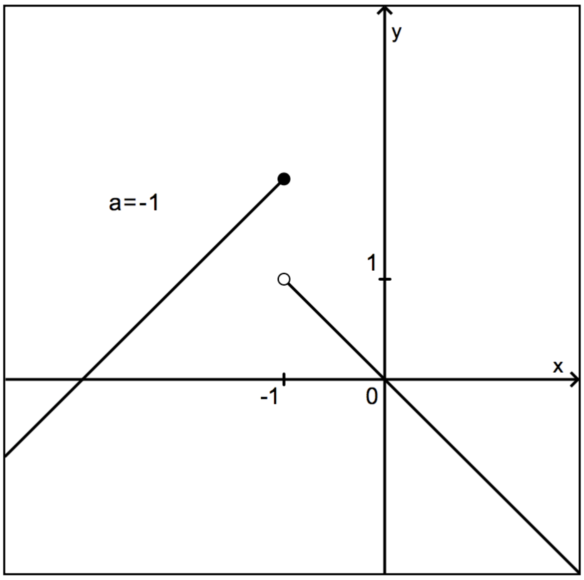
⑩



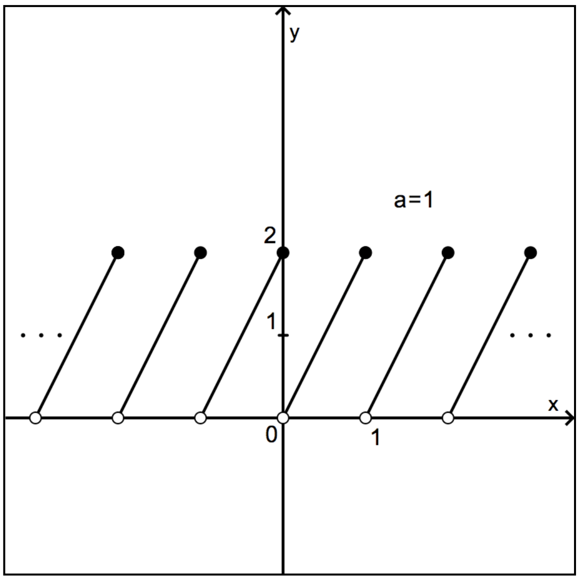
❶①



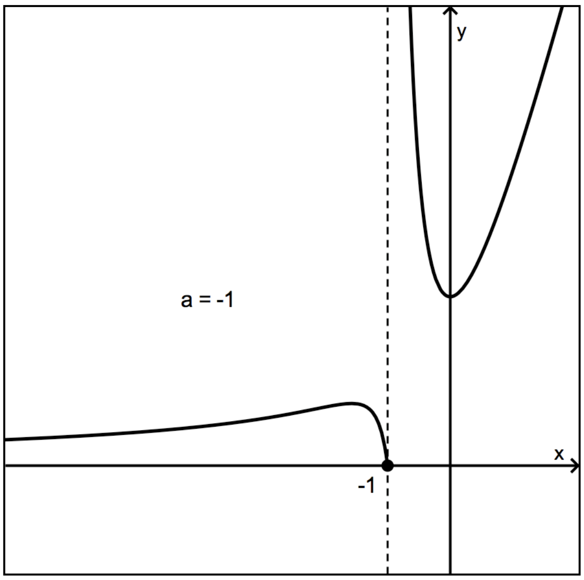
❶②



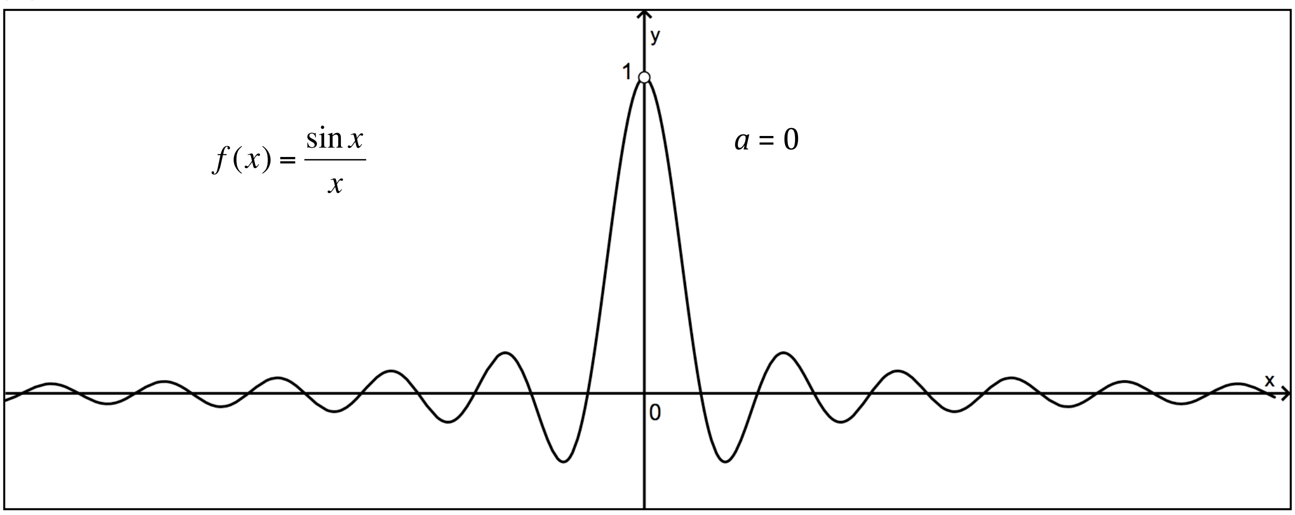
❶③



❶④



❶⑤

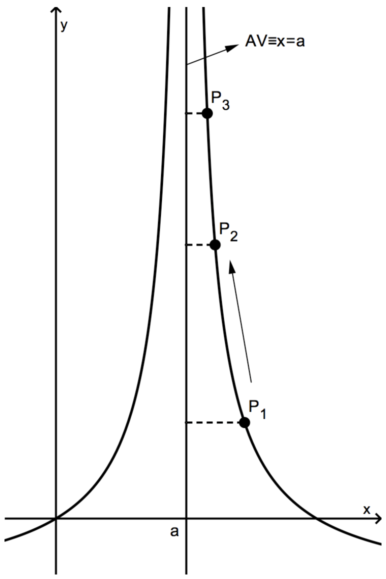


5. Asymptotes

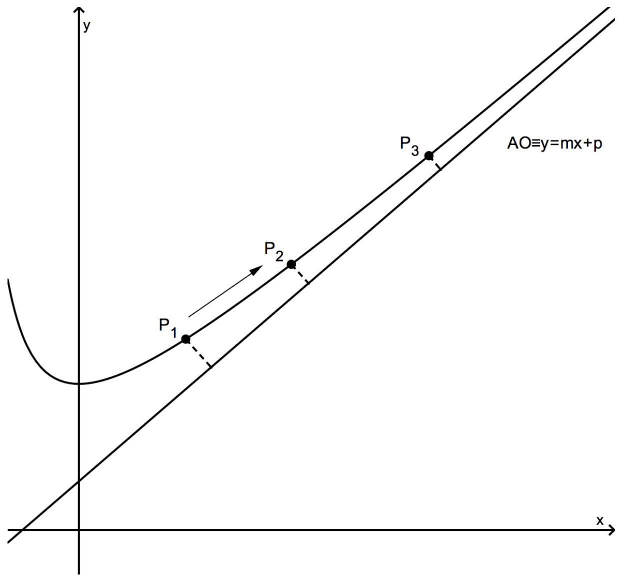
5.1. Définition générale

Une asymptote à une courbe est une droite telle que la distance d'un point P de la courbe à cette droite tend vers 0 lorsque le point P s'éloigne indéfiniment sur la courbe.

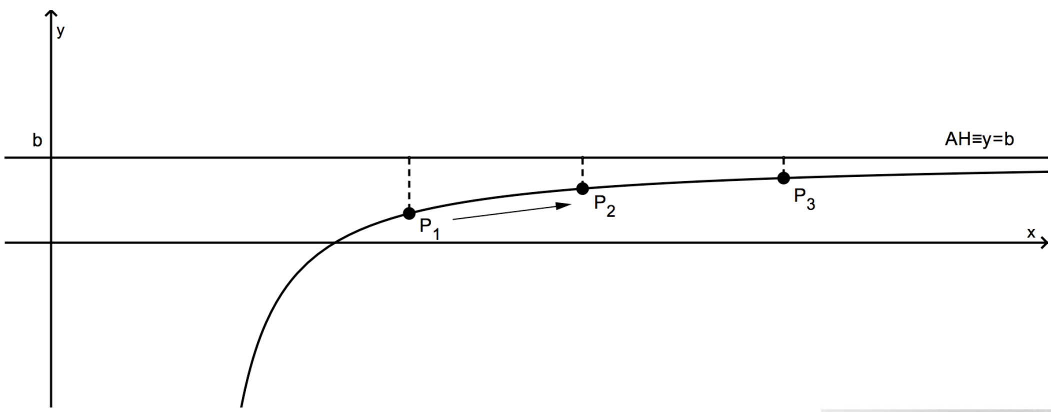
Asymptote verticale



Asymptote oblique



Asymptote horizontale



La notion d'asymptote est joliment exploitée dans cette phrase écrite par un des monstres sacrés de la littérature française :

« La science est l'asymptote de la vérité, elle approche sans cesse et ne touche jamais. »

5.2. Trois types d'asymptotes (et trois définitions)

Asymptote verticale : la droite $d \equiv x = a$ ($a \in \boldsymbol{R}$) est une asymptote verticale au graphique de la fonction f si et seulement si la limite à gauche ou la limite à droite de f en a est infinie.

Technique : pour trouver les asymptotes verticales éventuelles au graphique d'une fonction f, il faut déterminer les réels qui n'appartiennent pas à $\operatorname{dom} f$ (domaine de définition) mais qui adhèrent à celui-ci. Ensuite, il faut calculer la limite de f en chacun de ces réels.

Asymptote horizontale : la droite $d \equiv y = b$ ($b \in \boldsymbol{R}$) est une asymptote horizontale au graphique de la fonction f si et seulement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Asymptote oblique : la droite $d \equiv y = mx + p$ ($m , p \in \boldsymbol{R}$) est une asymptote oblique au graphique de la fonction f si et seulement $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + p) \right] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (mx + p) \right] = 0$.

Technique : pour déterminer si le graphique d'une fonction f admet des asymptotes obliques, on utilise souvent les formules de CAUCHY :

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad p = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] .$$

Nous justifierons ces formules plus loin.

Remarque

Si le graphique d'une fonction admet une asymptote horizontale pour x tendant vers $+\infty$, il ne peut y avoir d'asymptote oblique pour x tendant vers $+\infty$. Expliquez.
La même remarque vaut bien sûr pour x tendant vers $-\infty$.

Comment étudier la position du graphique par rapport aux asymptotes ?

Si l'on a :

1° $AV \equiv x = a$: déterminer les limites à gauche et à droite de la fonction f en a ;

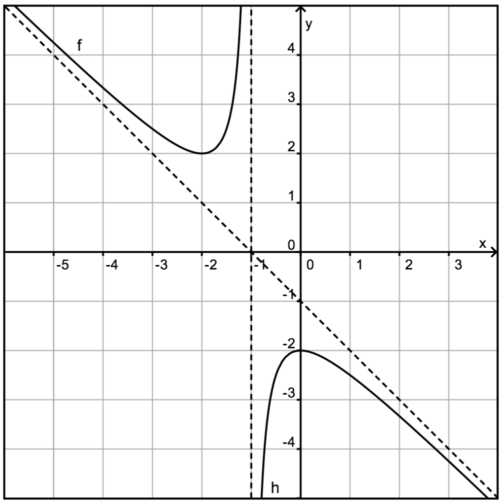
2° $AH \equiv y = b$: étudier le signe de l'expression $f(x) - b$;

3° $AO \equiv y = mx + p$: étudier le signe de l'expression $f(x) - (mx + p)$.

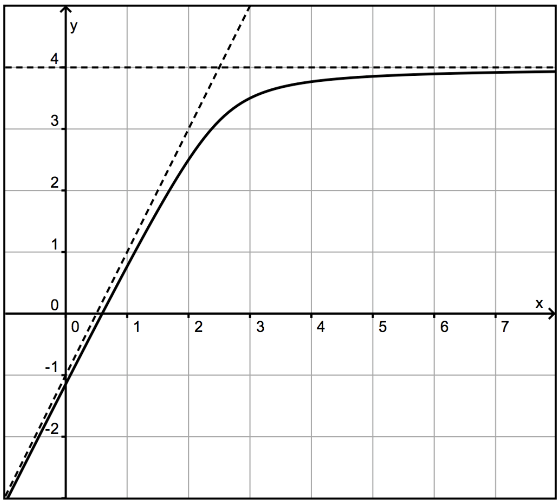
Exercices

1. Déterminez les équations des asymptotes aux graphiques des fonctions représentées ci-dessous. Exprimez l'existence de chaque asymptote par une ou des limites.

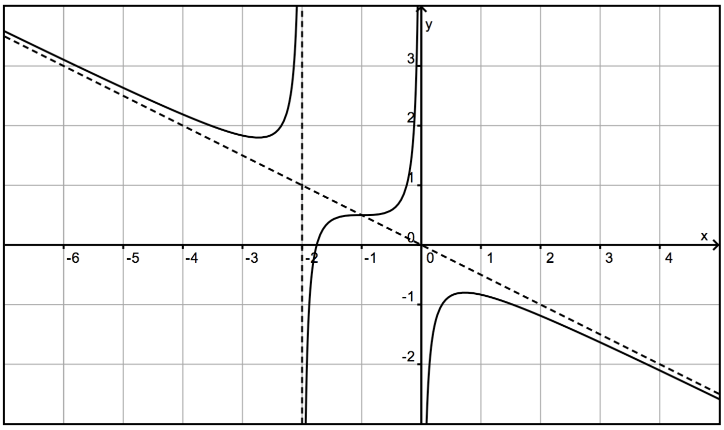
①



②



③



2. Dans chacun des cas suivants, tracez le graphique d'une fonction vérifiant les conditions indiquées.

   a) $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$

   b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

   c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

   d) $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $y = 0$ est asymptote au graphique de f

   e) les droites d'équation $x = -1$ et $y = 2$ sont asymptotes au graphique de f

   f) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $y = 1 - x$ est asymptote au graphique de f

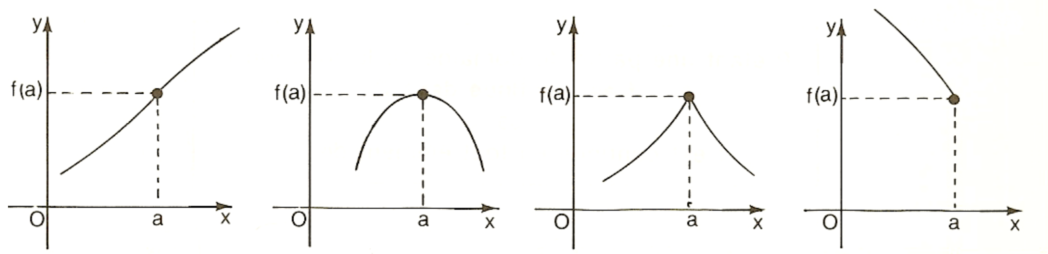
   g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $y - x = 0$ est asymptote au graphique de f pour x tendant vers $+\infty$.

6. Continuité d'une fonction

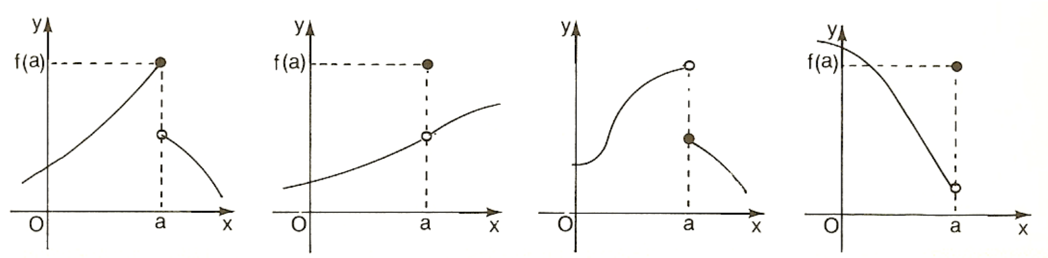
6.1. Fonction continue en un nombre réel

<u>Définition</u> : une fonction f étant définie en un réel a , nous dirons que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ainsi, chacune des fonctions suivantes est continue en a .



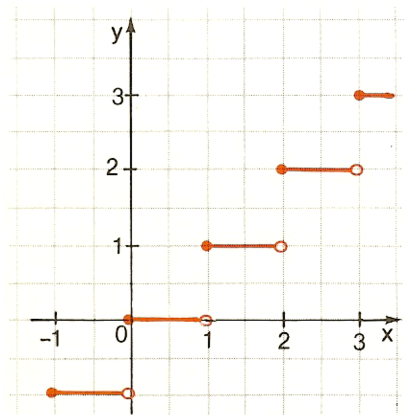
Par contre, aucune des fonctions suivantes n'est continue en a (expliquer).



Notons bien que l'on ne peut parler de fonction continue ou non continue en a qu'à la condition que cette fonction soit définie en a .

6.2. Fonction continue sur une partie de son domaine

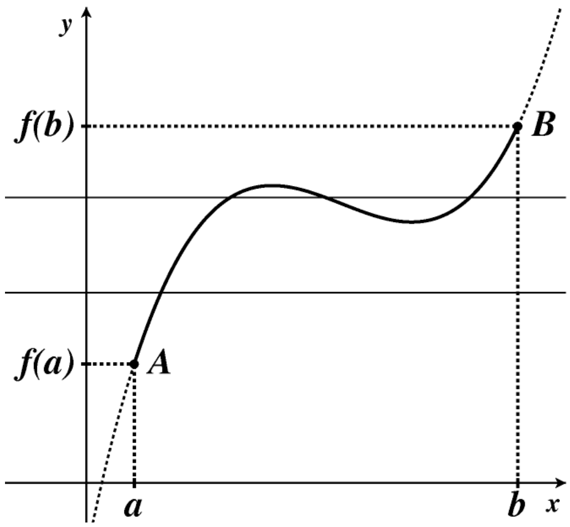
<u>Définition</u> : soit P une partie du domaine de définition de la fonction f ; on dit que f est continue sur P si et seulement si f est continue en tout réel de P .

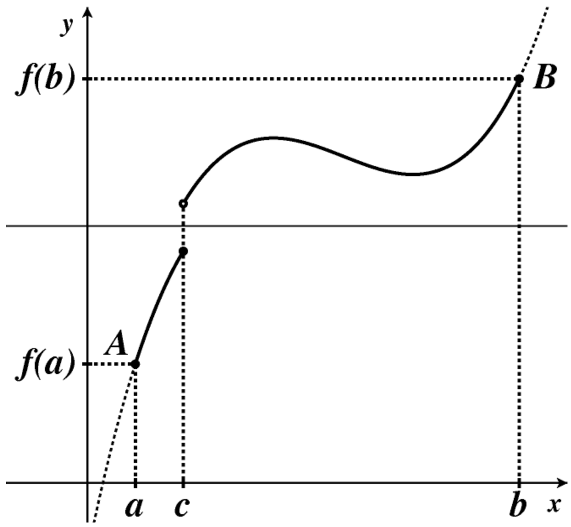


Ainsi, la fonction $E(x)$ est continue sur $[\ 1\ ,\ 1.5\ ]$ mais non sur $[\ 1\ ,\ 2\ ]$ car elle n'est pas continue en 2 .
Notons que cette fonction est continue en tout réel non entier. On dit que son « domaine de continuité » est $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ (l'ensemble des réels dont on exclut tous les entiers).

7. Le théorème des valeurs intermédiaires

Commençons par observer deux graphiques. Celui de gauche montre une fonction f, continue dans l'intervalle $[a,b]$; nous constatons que toute droite horizontale d'ordonnée comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, coupe le graphique de f en au moins un point.
Le graphique de droite montre une fonction discontinue en c ; à cause de cette discontinuité, il existe au moins une droite horizontale d'ordonnée comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, qui ne coupe pas le graphique de f.





Nous admettrons l'énoncé suivant.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue dans l'intervalle $[a,b]$, et soit s un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe un réel r dans $[a,b]$ tel que $f(r) = s$.

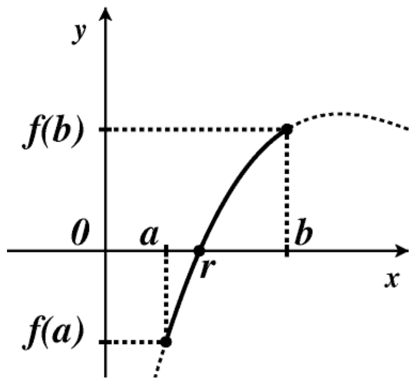
Autrement dit, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un réel compris entre a et b.

Remarque : il se peut qu'une fonction présente une discontinuité dans $[a,b]$, et que malgré cela, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ soit l'image d'au moins un réel compris entre a et b. Inventer un graphique illustrant cette situation.

Conséquence

Si une fonction f est continue dans l'intervalle $[a,b]$, et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors la fonction possède une racine dans $[a,b]$.

En effet, supposons $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Dans ce cas, le réel 0 est situé entre $f(a)$ et $f(b)$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il est l'image d'un réel de $[a,b]$. Ce réel est donc une racine de f.
Le raisonnement est analogue si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.



Application : recherche d'une racine de fonction par la méthode de dichotomie

Certaines équations sont difficiles voire impossible à résoudre algébriquement. Il faut alors se contenter de solutions approximatives.
Une façon d'y arriver est d'utiliser la *méthode de dichotomie*.

Exemple : déterminer une racine à 0,01 près de la fonction $f(x) = x^3 - 4x - 1$.

Il faut résoudre l'équation du troisième degré $x^3 - 4x - 1 = 0$. Des formules existent mais elles dépassent le cadre de ce cours. Entamons donc une recherche dichotomique.

La première chose à faire est de trouver deux réels dont les images ont des signes contraires.
Ce n'est pas bien difficile :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-16	-1	2	-1	-4	-1	14	47

Le tableau nous montre que la fonction admet une racine dans l'intervalle $[-2,-1]$, dans l'intervalle $[-1,0]$, et dans l'intervalle $[2,3]$. En effet, la continuité de f et ses changements de signes nous assurent de l'existence de ces racines.

Cherchons une racine de f dans l'intervalle $[-2,-1]$. L'idée de la méthode est la suivante : calculer le milieu m de l'intervalle $[a,b]$ et calculer l'image de m ; si $f(m)$ est de signe contraire à celui de $f(a)$, la racine se trouve dans l'intervalle $[a,m]$; si $f(m)$ est de signe contraire à celui de $f(b)$, la racine se trouve dans l'intervalle $[m,b]$. On répète le procédé dans le nouvel intervalle jusqu'à ce que l'on atteigne le degré de précision souhaité.

Un tableau contribuera à clarifier cet algorithme. Les valeurs de a et b évoluent tout au long de la procédure : celle de a correspond toujours à l'extrémité gauche de l'intervalle dans lequel se trouve la racine, et celle de b à l'extrémité droite.

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(m)$
-2	-1	-1,5	1,625
-2	-1,5	-1,75	0,64063
-2	-1,75	-1,875	-0,09180
-1,875	-1,75	-1,8125	0,29565
-1,875	-1,8125	-1,84375	0,10733
-1,875	-1,84375	-1,85938	0,00910
-1,875	-1,85938	-1,86719	-0,04101
-1,86719	-1,85938	-1,86329	

La longueur du dernier intervalle obtenu vaut environ :

$$|-1{,}86719 - (-1{,}85938)| \approx 0{,}00781 < 0{,}01 .$$

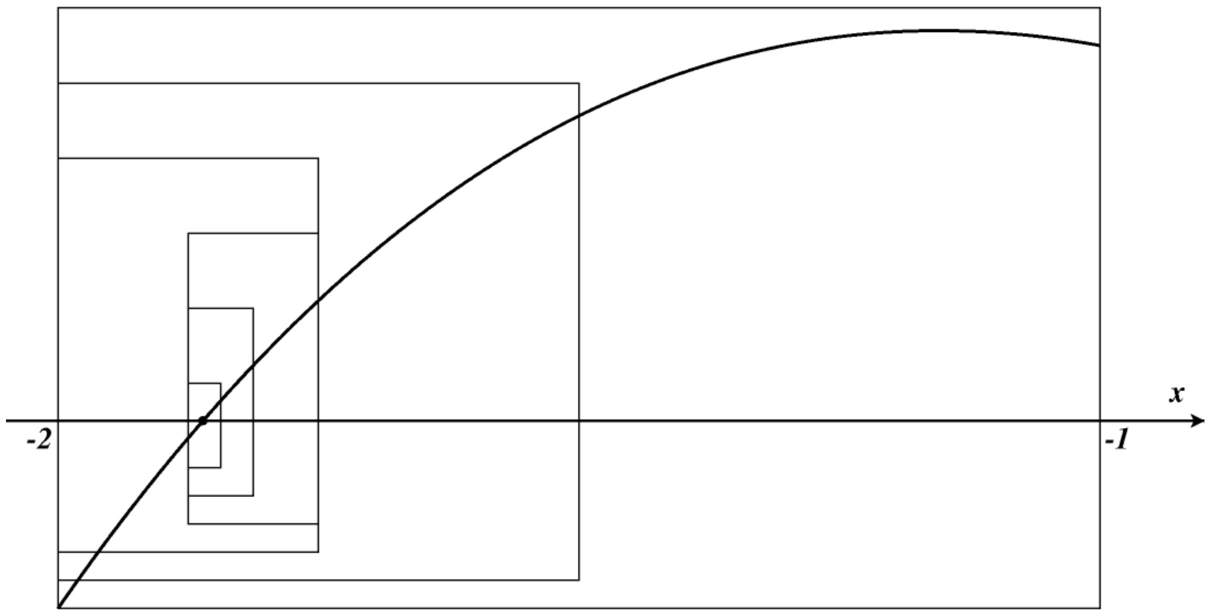
Le milieu de cet intervalle est donc une approximation à 0,01 près de la racine cherchée.

$$\boxed{\text{Racine de } f \ : \ r \approx -1{,}86329} .$$

Illustration graphique

La figure ci-dessous montre le graphique de f dans l'intervalle $[-2,-1]$. Les rectangles montrent comment la racine est progressivement cernée.
Les bases de ces rectangles correspondent successivement aux intervalles :

$[-2,-1]$
$[-2,-1.5]$
$[-2,-1.75]$
$[-1.875,-1.75]$
$[-1.875,-1.8125]$
$[-1.875,-1.84375]$
…



Exercice

En utilisant la méthode de dichotomie, déterminer une approximation à 0,01 près d'une racine de la fonction :

1. $f(x) = x^3 - 4x - 1$ dans l'intervalle $[2,3]$;
2. $f(x) = x^3 - x + 1$ dans l'intervalle $[-2,-1]$;
3. $f(x) = x^4 - 10$ dans l'intervalle $[1,2]$;
4. $f(x) = x - \cos x$ dans l'intervalle $[0,1]$.

8. Techniques de calculs de limites et recherches d'asymptotes

Nous allons d'abord apprendre à calculer des limites de fonctions usuelles non trigonométriques. Ces dernières feront l'objet d'un autre paragraphe.

Notre approche sera encore intuitive. Démontrer une limite sur base d'une définition rigoureuse se fera en fin de chapitre.

8.1. Quand il n'y a pas de problème ... (quelques limites simples)

Exemple 1 : soit la fonction $f(x) = 5x + 1$; calculer $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Pour les exemples suivants, nous écrirons directement ce genre d'énoncé sous la forme suivante : calculer $\lim\limits_{x\to 3}(5x+1)$.

Nous pouvons tenir le raisonnement suivant : si les valeurs de x sont de plus en plus proches de 3 , celles de $5x$ seront de plus en plus proches de 15 , et comme on ajoute encore 1 , nous obtenons :

$$\lim_{x\to 3}(5x+1) = 16 \ .$$

Nous sommes dans la situation où la fonction f est continue en 3 : la limite cherchée n'est autre que $f(3) = 16$.

Les trois résultats suivants s'expliquent de la même façon. Vérifiez …

Exemple 2 : $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3x + 10) = 8$.

Exemple 3 : $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x-1} = 3$.

Exemple 4 : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{5+x} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice

Calculez les limites suivantes si elles existent.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 1)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}(3x-1)^3$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{1-x}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-4}$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{x}\right)$

8.2. Des asymptotes verticales

Les exemples des pages 1 à 3 nous ont permis de découvrir des limites importantes qui nous serviront très souvent.

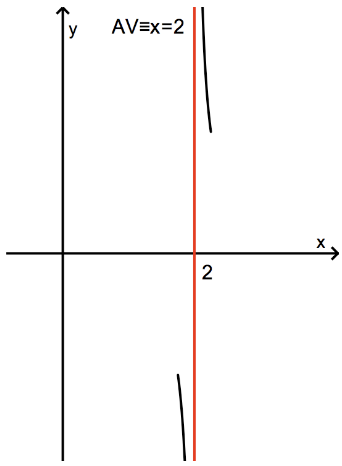
Voici celles que nous allons exploiter maintenant :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exemple 1 : calculer $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$ et interpréter graphiquement.

Le numérateur est constant, mais le dénominateur tend vers 0 lorsque x tend vers 3 .
Avant d'utiliser les limites encadrées ci-dessus, intéressons-nous au signe du dénominateur : il est négatif lorsque x est inférieur à 3 , mais positif lorsque x est supérieur à 3 .

Nous en déduisons que : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty$.



Il nous reste à conclure à propos de la limite demandée : elle n'existe pas car les limites à gauche et à droite sont différentes.

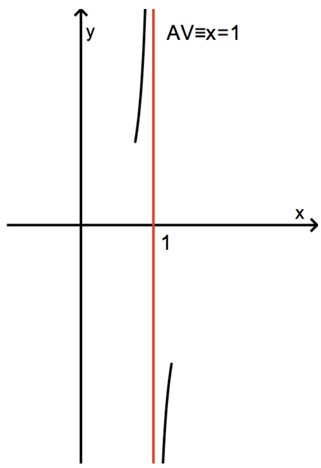
Enfin, comme la fonction tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers 2 , son graphique admet une asymptote verticale :

$$\text{AV} \equiv x = 2 \text{ .}$$

Les limites à gauche et à droite nous permettent de positionner le graphique par rapport à son asymptote verticale (ci-contre).

Exemple 2 : calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{-2x}{x-1}$ et interpréter graphiquement.

Le numérateur tend vers -2 , tandis que le dénominateur tend vers 0 lorsque x tend vers 1 .
Le dénominateur est négatif lorsque x est inférieur à 1 , mais comme le numérateur est négatif aussi, la fonction est de signe positif.
Lorsque x est supérieur à 1 , le dénominateur est positif, et la fonction est donc négative.



Nous en déduisons que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-2x}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-2x}{x-1} = -\infty$.

Le graphique de la fonction admet une asymptote verticale avec le positionnement visible ci-contre : $\text{AV} \equiv x = 1$.

Pour les deux exemples précédents, nous aurions pu formuler la question autrement : « déterminez l'asymptote verticale éventuelle au graphique de cette fonction, et positionnez le graphique par rapport à l'asymptote ».

Nous aurions ainsi été amenés à calculer les limites précédentes, car :

Pour trouver les asymptotes verticales éventuelles au graphique d'une fonction f, il faut déterminer les réels qui n'appartiennent pas à dom f (domaine de définition) mais qui adhèrent à celui-ci. Ensuite, il faut calculer la limite de f en chacun de ces réels.

Exemple 3 : soit la fonction $f(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$.

Déterminer son asymptote verticale éventuelle.

Les conditions d'existence de f sont $x - 1 \geq 0$ et $5 - x > 0$, c'est-à-dire $x \geq 1$ et $x < 5$.
Par conséquent, dom f = [1 , 5 [. Le seul réel n'appartenant pas à dom f mais y adhérant est 5 .
C'est donc le seul « endroit » où chercher une asymptote verticale !

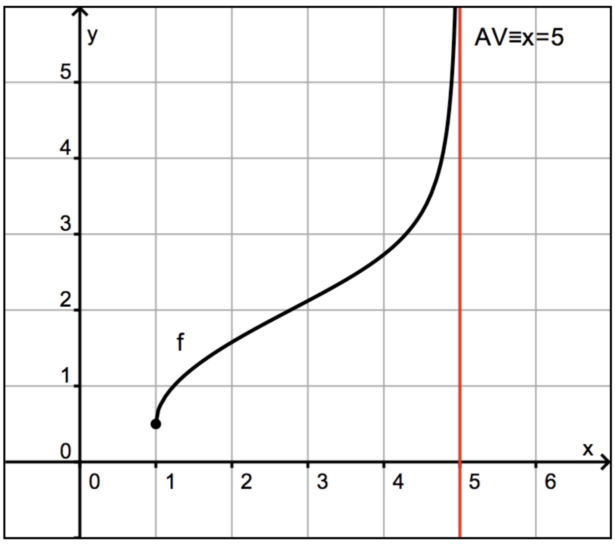
Calculons : $$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}\right) = \lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} + \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{5-x}} \quad {}^{(1)}$$
$$= 2 + \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{5-x}}$$

Nous avons $\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{5-x}} = +\infty$ car le numérateur est constant et positif, tandis que le dénominateur tend vers 0 , tout en étant positif.

Finalement : $\lim_{x\to 5} f(x) = +\infty$. Notez bien qu'il s'agit d'une limite à gauche (pourquoi ?).

La fonction possède bien une asymptote verticale : AV $\equiv x = 5$.

Voici son graphique. Notons que $f(1) = ½$.



[1] Nous prenons la limite de chaque terme séparément.
Cela se justifiera plus tard par la propriété relative à la limite d'une somme de fonctions.

Exercice

Déterminez les asymptotes verticales éventuelles au graphique de chacune des fonctions suivantes. Positionnez le graphique par rapport à son (ses) asymptote(s).

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

b) $f(x)=\dfrac{x+2}{3-x}$

c) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

f) $f(x)=\dfrac{x-2}{4-x^2}$

8.3. Des « points rouges »

Exemple 1 : calculer $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{4-x^2}$ et interpréter graphiquement.

La situation est nouvelle : à la fois le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 !

Il s'agit d'une « forme indéterminée » , souvent notée « $\dfrac{0}{0}$ » .
Nous ne pouvons pas dire immédiatement quel est le résultat de cette limite : il peut s'agir de n'importe quel réel, de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Réfléchissons … Si les deux termes de la fraction s'annulent pour $x = 2$, c'est qu'ils sont tous deux divisibles par le facteur (x - 2) .
Nous pouvons donc écrire la fonction autrement, voire la simplifier (sous la condition $x \neq 2$) :

$$\frac{x-2}{4-x^2}=\frac{x-2}{(2-x)(2+x)}\overset{x\neq 2}{=}\frac{-1}{x+2}\ .$$

Nous trouvons ainsi : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$.

Interprétation graphique : il y a un « point rouge » de coordonnées (2 , - ¼) dans le graphe de f.

(voir graphique page 22).

Remarque importante

La fonction initiale $f(x)=\dfrac{x-2}{4-x^2}$ est égale à la fonction $g(x)=\dfrac{-1}{x+2}$, quel que soit le réel $x\neq 2$.

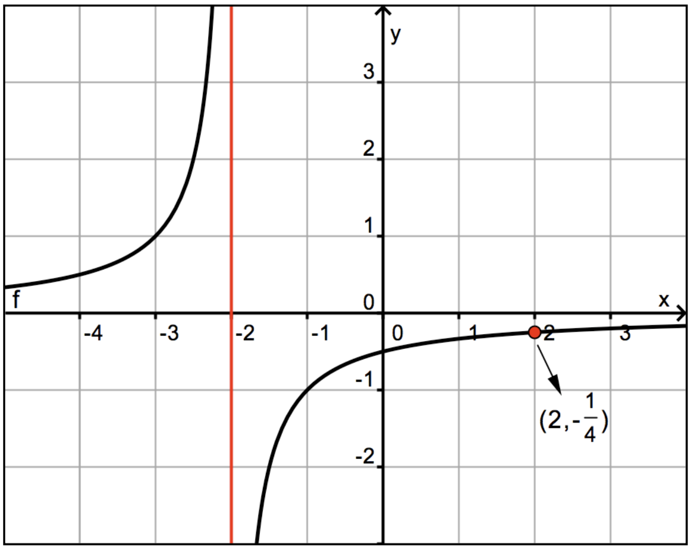
En $x = 2$, la fonction f n'est pas définie, mais la fonction g est définie.
On dit que la fonction g prolonge continûment la fonction f en $x = 2$.
La limite de f en 2 est ainsi l'image de 2 par sa prolongée continue g : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=g(2)=-\dfrac{1}{4}$.

Ci-contre, le graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{x-2}{4-x^2} \ .$$

Outre l'asymptote verticale $x = 2$, ce graphique présente un « trou » ou « point rouge » en (2 , - ¼) .

Le graphique de $g(x) = \dfrac{-1}{x+2}$ se superpose à celui de f et comble la lacune de celui-ci, car le point (2 , - ¼) appartient bien au graphe de g .



Exemple 2 : calculer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}$ et interpréter graphiquement.

Nous sommes de nouveau en présence d'une « forme indéterminée » de type « $\dfrac{0}{0}$ » .

Pour trouver une prolongée de f qui soit continue en 3 , l'idée est de multiplier et diviser par le binôme conjugué de l'expression contenant le radical :

$$\frac{1-\sqrt{x-2}}{x-3} = \frac{\left(1-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \frac{1-(x-2)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \frac{-x+3}{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)} \overset{x \neq 3}{=} \frac{-1}{1+\sqrt{x-2}} \ .$$

Nous obtenons ainsi : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{1+\sqrt{x-2}} = -\dfrac{1}{2}$.

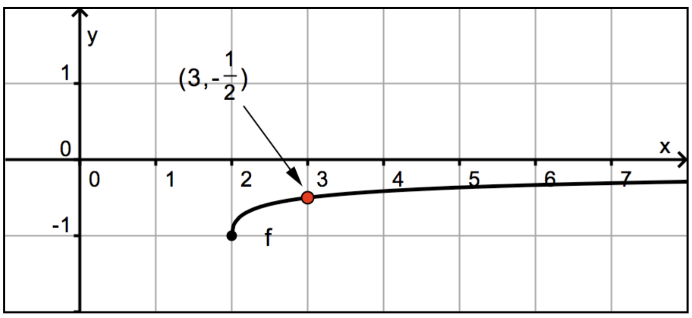
Remarque importante

La fonction $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}$ est égale à la fonction $g(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{x-2}}$, quel que soit le réel $x \neq 3$.

Notons bien que $\operatorname{dom} f = [\, 2 \,, +\infty \,[\setminus \{3\}$ et que $\operatorname{dom} g = [\, 2 \,, +\infty \,[$.
La fonction g prolonge continûment la fonction f en $x = 3$.

La limite de f en 3 est ainsi l'image de 3 par sa prolongée continue g : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = g(3) = -\dfrac{1}{2}$.

Interprétation graphique : il y a un « point rouge » de coordonnées (3 , - ½) dans le graphe de f.



Exercice

Déterminez les asymptotes verticales ou « points rouges » éventuels au graphique de chacune des fonctions suivantes. Positionnez le graphique par rapport à l'asymptote ou au point trouvé.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$	d) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{4-x^2}$	g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$
b) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}$	e) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{(x-3)^2}$	h) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{10+x}}{x+1}$
c) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2-x}$	f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$	i) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{1-\sqrt{x-2}}$

8.4. Des asymptotes horizontales

Dans les exemples des pages 1 à 3, nous avons rencontré deux autres limites importantes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0}$$

Voyons comment les exploiter au travers de nouveaux exemples.

Exemple 1 : calculer $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-5}$ et interpréter graphiquement.

Si la variable x devient aussi grande que l'on veut (ou aussi petite que l'on veut), le dénominateur x - 5 évolue de la même façon (ce n'est pas le terme - 5 qui change quelque chose !).
Quant au numérateur, il est constant.
Par conséquent, en nous référant aux deux limites ci-dessus :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-5}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-5}=0 .$$

La fonction $f(x)=\dfrac{3}{x-5}$ possède donc une asymptote horizontale : AH $\equiv y=0$.

Pour déterminer la position du graphique de f par rapport à cette asymptote, il suffit d'observer que la fonction est positive si $x>5$ et négative si $x<5$.

Exemple 2 : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-3}$ et interpréter graphiquement.

Si x tend vers $+\infty$ $(-\infty)$, le numérateur de la fonction tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ et le dénominateur aussi.

Il s'agit encore d'une « forme indéterminée » , souvent notée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » .

Nous ne pouvons pas dire immédiatement quel est le résultat de cette limite : il peut s'agir de n'importe quel réel, de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Pour déterminer cette limite, modifions l'écriture de la fonction :

$$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{2x \cdot \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{x \cdot \left(1-\dfrac{3}{x}\right)} \overset{x \neq 0}{=} \frac{2 \cdot \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{1-\dfrac{3}{x}} .$$

Nous obtenons ainsi : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2 \cdot \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{1-\dfrac{3}{x}} = 2$.

En effet, les termes $\dfrac{1}{2x}$ et $\dfrac{3}{x}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$ (c'est une conséquence directe des deux limites encadrées à la page 23).

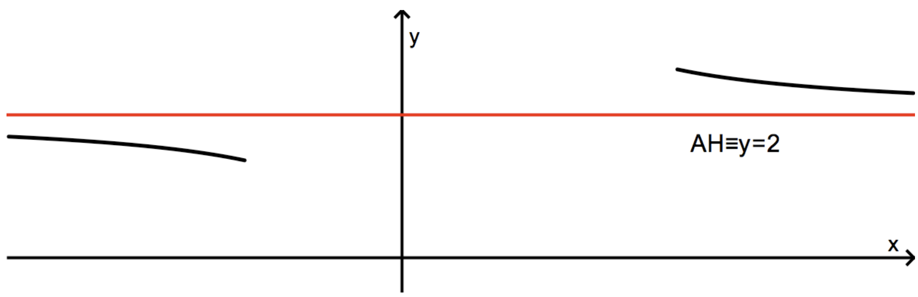
La fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ admet ainsi une asymptote horizontale : AH $\equiv$ $y = 2$.

Pour déterminer la position du graphique de f par rapport à cette asymptote, nous devrions étudier le signe de la différence $f(x) - 2$, et observer quel est ce signe pour x tendant vers $+\infty$, et pour x tendant vers $-\infty$ (exercice).

Pour le moment, contentons-nous de calculer l'image d'une « grande » valeur de x , et d'une « petite » valeur de x :

$$f(100) = \frac{201}{97} \approx 2{,}0722 > 2 \quad \text{et} \quad f(-100) = \frac{-199}{-103} \approx 1{,}9320 < 2 \quad .$$

Nous en déduisons que lorsque x est très grand (petit), le graphique de f est situé au-dessus (en-desous) de l'asymptote $y = 2$. D'où le schéma suivant.



Exemple 3 : calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{7 - x}$.

Si x tend vers $+\infty$, il est clair que le dénominateur tend vers $-\infty$.
Qu'en est-il du numérateur ? Son premier terme tend vers $+\infty$, mais son second tend vers $-\infty$. Nous pouvons donc avoir des doutes quant à l'évolution de ce polynôme.
Pour en avoir le cœur net, utilisons la même technique que précédemment, à savoir la mise en évidence du terme de plus haut degré :

$$2x^2 - 3x + 5 = 2x^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{2x^2}\right) .$$

Si x tend vers $+\infty$, les termes $\dfrac{3}{2x}$ et $\dfrac{5}{2x^2}$ tendent vers 0 , et l'expression entre parenthèses tend vers 1 . Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2x^2 - 3x + 5\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(2x^2\right) = +\infty$.

Au passage, nous venons de voir que la limite de ce polynôme se ramène à la limite de son terme de plus haut degré. Nous y reviendrons.

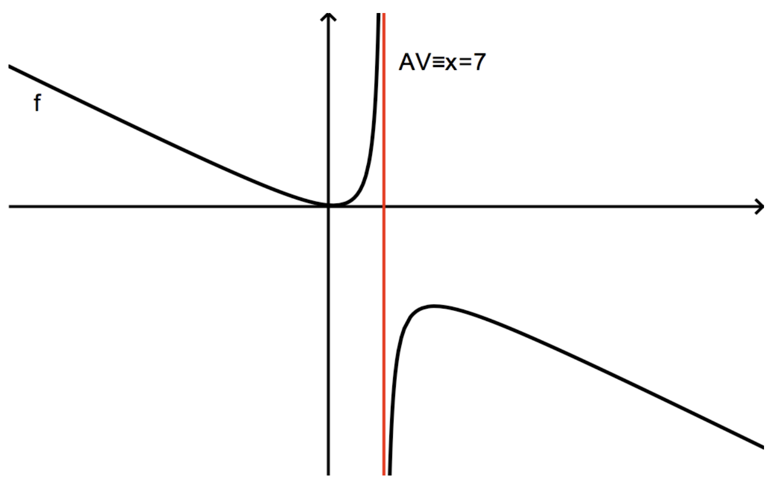
Revenons à la limite demandée. Maintenant que nous savons qu'elle présente une indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » , appliquons la technique connue, à la fois au numérateur et au dénominateur :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{7 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{2x^2}\right)}{-x \cdot \left(-\frac{7}{x} + 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{-x} = \lim_{x \to +\infty}(-2x) = -\infty .$$

Cette fonction tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$: il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

De la même façon, on montre que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{7 - x} = +\infty$ (pourquoi ?).

Vous pouvez aussi montrer que la fonction possède une asymptote verticale en $x = 7$ (exercice). Tout cela permet de comprendre l'allure générale du graphique de f, représentée ci-dessous.



Un peu de théorie . . .

Limite en l'infini d'une fonction polynôme

Soit f une fonction polynôme de la variable x, et de degré n ($n \in N_0$).
La limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est égale à la limite du terme de plus haut degré de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

Prenons par exemple la fonction polynôme $f(x) = 7x^4 + x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ (degré 4).

Nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7x^4 + x^3 - 5x^2 + 6x - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[7x^4\left(1 + \frac{1}{7x} - \frac{5}{7x^2} + \frac{6}{7x^3} - \frac{1}{7x^4}\right)\right]$$

Chacun des termes $\frac{1}{7x}$, $-\frac{5}{7x^2}$, $\frac{6}{7x^3}$ et $-\frac{1}{7x^4}$ tend vers 0 pour x tendant vers $+\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(7x^4\right) = +\infty$.
De la même façon, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(7x^4\right) = +\infty$.

Une démonstration générale est facile à faire, mais n'apporte rien de plus du point de vue des idées.

Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Soit f une fonction rationnelle de la variable x, c'est-à-dire un quotient de fonctions polynômes de la variable x.
La limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

Prenons par exemple la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 5}{2x^3 + x - 1}$.

Nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 5}{2x^3 + x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right)}{2x^3\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right)} .$$

Dans cette expression, toutes les fractions avec une puissance de x au dénominateur tendent vers 0 pour x tendant vers $+\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{2x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.

De la même façon, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$.

Revenons à nos exemples … Voyons comment déterminer les asymptotes horizontales éventuelles d'une fonction irrationnelle.

Exemple 4 : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$.

Assurons-nous d'abord que ces limites ont un sens.
C'est le cas ! En effet, le domaine de définition de f est] - ∞ , - 1 [∪] 1 , + ∞ [\ {2} (exercice).

Calculons d'abord la limite de f en $+\infty$. Nous avons une indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » .

Appliquons une méthode semblable à celle des exemples 2 et 3 :

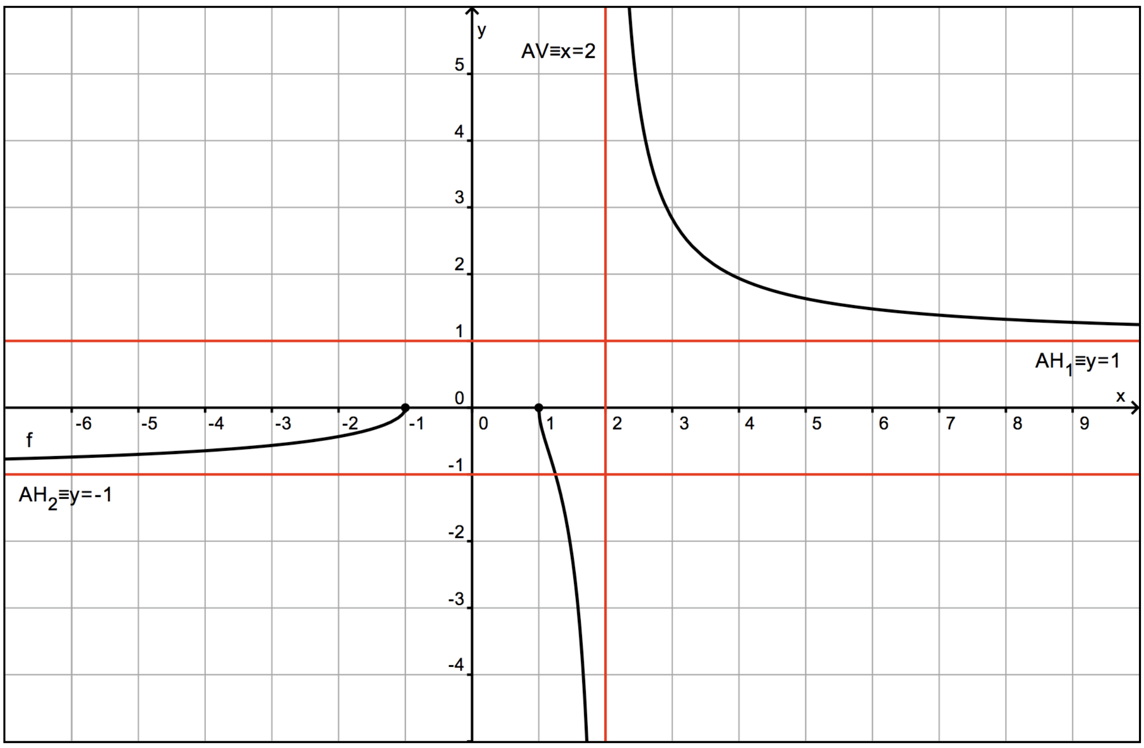
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \ .$$

La fonction admet donc une asymptote horizontale pour x tendant vers $+\infty$: $AH_1 \equiv y = 1$.

Maintenant, attention ! Si x tend vers $-\infty$, ses valeurs deviennent évidemment négatives et nous aurons $\sqrt{x^2} = -x$! En effet, vous devez savoir que : $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & si \ \ x \le 0 \\ x & si \ \ x \ge 0 \end{cases}$.

Dès lors, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x} = -1$.

La fonction admet une autre asymptote horizontale pour x tendant vers $-\infty$: $AH_2 \equiv y = -1$.
Voici le graphique de f . Vous vérifierez qu'il y a une asymptote verticale en $x = 2$ (exercice).



Exercice

Déterminez les asymptotes horizontales éventuelles au graphique de chacune des fonctions suivantes. Positionnez ensuite le graphique de f par rapport à son (ou à ses) asymptote(s).

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-x+8}{x+3}$

d) $f(x)=\dfrac{1-x+3x^3}{2x+x^4}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-2x^2}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3+x^4}{7x+2x^5}$

g) $f(x)=\dfrac{2(x-1)^3}{x^3-1}$

h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-3}$

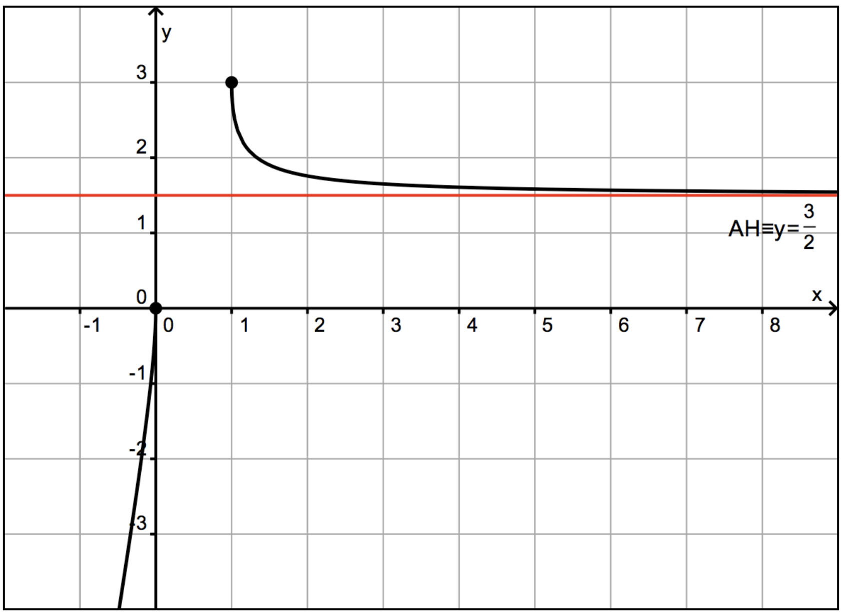
i) $f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-4}}$

j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$

k) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{3-x}$

l) $f(x)=3x-\sqrt{9x^2-9x}$ (nouvelle technique ☺)

La dernière fonction possède bel et bien une asymptote horizontale pour x tendant vers $+\infty$!
Voyez son graphique ci-dessous.
Pour trouver cette asymptote, que diriez-vous d'un binôme conjugué ? Bon travail !



Exemple 5 : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 9x}\right)$.

Le domaine de définition de cette fonction est $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$. Il y a donc du sens à calculer chacune de ces deux limites.

Commençons par x tendant vers $+\infty$. Le terme $3x$ tend vers $+\infty$ et le terme $\sqrt{9x^2 - 9x}$ tend lui aussi vers $+\infty$ (via son terme dominant $9x^2$).
Nous avons une nouvelle forme indéterminée : « ∞ - ∞ » .

$$\lim_{x \to +\infty}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 9x}\right) = \text{« } \infty - \infty \text{ » (nouvelle forme indéterminée)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(3x - \sqrt{9x^2 - 9x}\right)\left(3x + \sqrt{9x^2 - 9x}\right)}{3x + \sqrt{9x^2 - 9x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2 - \left(9x^2 - 9x\right)}{3x + \sqrt{9x^2 - 9x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{9x}{3x + \sqrt{9x^2 - 9x}} \quad = \quad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ » (forme connue)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{9x}{3x + \sqrt{9x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{9x}{3x + 3x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x}{6x} = \frac{3}{2} \quad \text{(et donc : } AH \equiv y = \frac{3}{2} \text{)}$$

Pour x tendant vers $-\infty$, c'est bien plus simple : le terme $3x$ tend vers $-\infty$ et le terme $\sqrt{9x^2 - 9x}$ tend vers $+\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 9x}\right) = -\infty - (+\infty) = -\infty$ (pas d'asymptote horizontale pour $x \to -\infty$).

Exercice

Déterminez les asymptotes horizontales éventuelles au graphique de chacune des fonctions suivantes. Positionnez ensuite le graphique de f par rapport à son (ou à ses) asymptote(s).

a) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 5x + 4}$

b) $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$

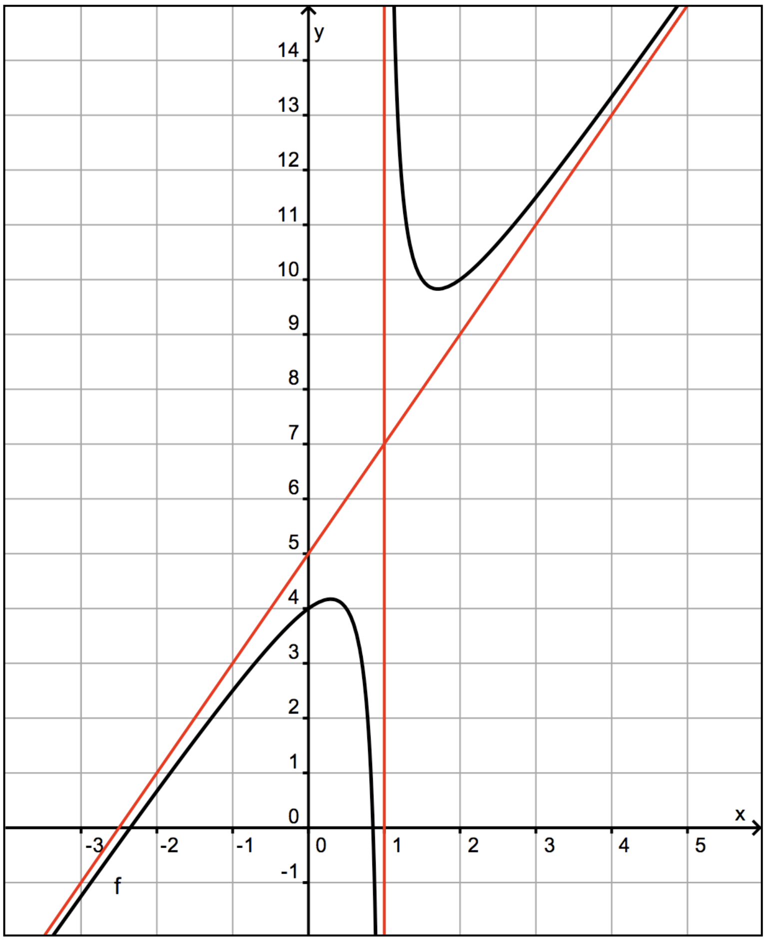
d) $f(x) = \sqrt{9x^2 + x} + 3x$

8.5. Des asymptotes obliques

Le premier exemple a pour but d'expliquer une méthode de recherche d'asymptote oblique.

Exemple 1 : soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.

Observons son graphique ci-dessous (le repère n'est pas orthonormé).



Outre l'asymptote verticale $AV \equiv x = 1$ (exercice), cette fonction semble avoir une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 5$ aussi bien pour x tendant vers $+\infty$ que pour x tendant vers $-\infty$. Intuitivement, cela signifie que pour x très grand ou très petit, on a $f(x) \approx 2x + 5$ (revoyez les exemples 6 et 7, page 3).

Vérifions cela sur des exemples :

$$f(100) = \frac{20296}{99} \approx 205{,}01 \qquad \text{tandis que} \qquad [2x+5]_{x=100} = 205$$

$$f(-100) = \frac{19696}{-101} \approx -195{,}01 \qquad \text{tandis que} \qquad [2x+5]_{x=-100} = -195$$

Les valeurs de $f(x)$ seront d'autant plus proches de $2x+5$ que x sera plus grand ou plus petit.

Mais … une question se pose tout naturellement : comment a-t-on fait pour savoir que le graphique de f admettait une asymptote oblique et, plus précisément, $AO \equiv y = 2x + 5$?

Méthode de recherche d'une asymptote oblique (raisonnement « non standard »)

Supposons que la fonction f admette une asymptote oblique $AO \equiv y = mx + p$ ($m, p \in \boldsymbol{R}$).

Cela signifie que pour x « très grand » (« très petit »), on a : $f(x) \approx mx + p$ (*) .

Ou encore, si nous divisons les deux membres par x : $\dfrac{f(x)}{x} \approx m + \dfrac{p}{x}$.

La valeur de p étant constante, nous avons aussi $\dfrac{p}{x} \approx 0$ et donc : $\dfrac{f(x)}{x} \approx m$.

Autrement dit, plus la valeur de x sera « grande » ou « petite », plus le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ sera proche de la pente m de l'asymptote. Cela nous donne une formule pour déterminer cette pente :

$$\boxed{m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

Il nous reste à trouver la valeur de p . Comme nous connaissons maintenant celle de m , en revenant à la relation (*) nous trouvons $f(x) - mx \approx p$ (toujours pour de « grandes » ou de « petites » valeurs de x). D'où cette seconde formule :

$$\boxed{p = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right]}$$

CAUCHY vers 1840

Les deux formules encadrées sont connues sous le nom de formules de CAUCHY.

Augustin Louis CAUCHY (1789 - 1857). Mathématicien français dont les travaux couvrent de nombreux domaines des mathématiques. Il énonça notamment des critères de convergence pour les suites et les séries.

Revenons maintenant à la fonction de la page 30.

La première formule de CAUCHY nous permet de calculer la pente de l'asymptote oblique :

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{(x-1)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \ .$$

Connaissant la valeur de m , appliquons la seconde formule de CAUCHY pour trouver p :

$$p = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2x^2 + 3x - 4}{x - 1} - 2x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2x^2 + 3x - 4 - 2x(x-1)}{x - 1} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x - 4}{x - 1} = 5 \ .$$

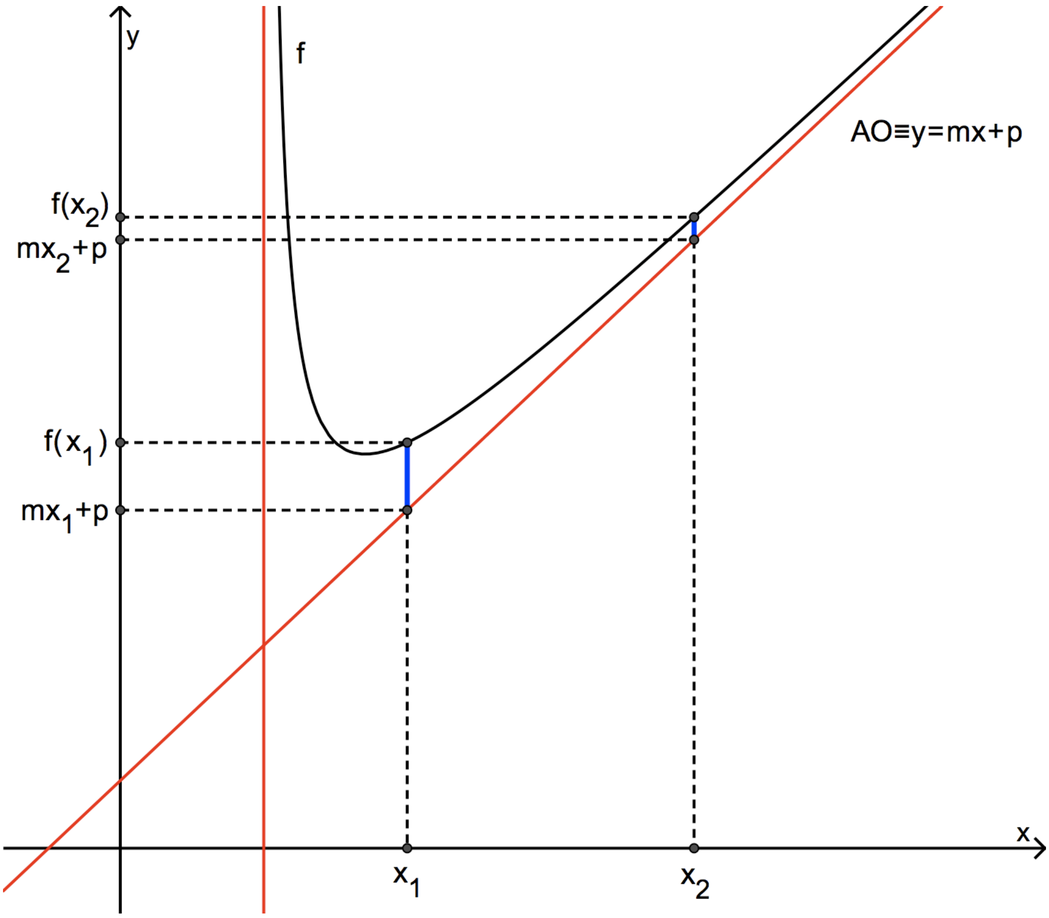
La fonction possède bien l'asymptote oblique $AO \equiv y = 2x + 5$.

Autre façon d'obtenir les formules de Cauchy

<table><tr><td>Une fonction f possède une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (mx + p)\right] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (mx + p)\right] = 0$ (voir page 12).</td></tr></table>

<u>Explications</u>

Le graphique ci-dessous montre une fonction ayant une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$ pour x tendant vers $+\infty$.
Pour une certaine abscisse x_1, on observe la différence d'ordonnées entre le point de G_f et celui de la droite. Cette différence est égale à $f(x_1) - (mx_1 + p)$.
Si nous prenons une abscisse x_2 avec $x_2 > x_1$, la différence $f(x_2) - (mx_2 + p)$ est plus petite que la précédente. Et ainsi de suite pour des valeurs de x de plus en plus grandes.
La différence $f(x) - (mx + p)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (mx + p)\right] = 0$.
On raisonne de la même façon si la droite est asymptote oblique à G_f pour x tendant vers $-\infty$.



Partant de l'énoncé encadré ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left[f(x) - (mx + p)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \left(m + \frac{p}{x}\right)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m \quad (\text{ car } \lim_{x \to \pm\infty}\frac{p}{x} = 0 \text{ }).$$

Et ensuite :

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left[f(x) - (mx + p)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty}\left[f(x) - mx\right] - p = 0 \Rightarrow p = \lim_{x \to \pm\infty}\left[f(x) - mx\right].$$

Et sans les formules de Cauchy, c'est possible ?

Oui, pour les fonctions rationnelles, il est possible de déterminer une asymptote oblique via la division euclidienne.

Reprenons la fonction $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-4}{x-1}$ et effectuons la division :

$$
\begin{array}{rrr|rr}
2x^2 & +\ 3x & -\ 4 & x & -\ 1 \\ \cline{4-5}
-(\,2x^2 & -\ 2x\,) & & 2x & +\ 5 \\ \cline{1-2}
 & 5x & -\ 4 & & \\
 & -(\ 5x & -\ 1\,) & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 3 & &
\end{array}
$$

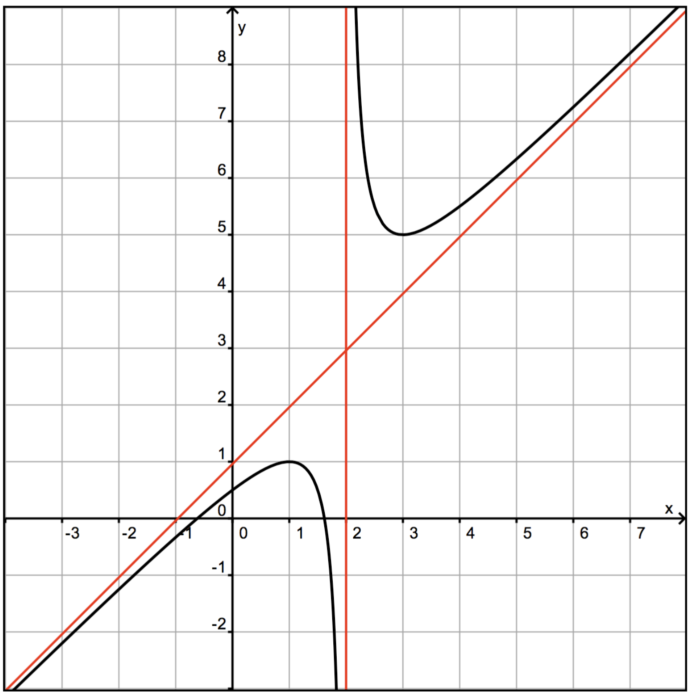
Nous pouvons donc écrire que : $2x^2+3x-4=(2x+5)(x-1)-3$. [1]

Mais alors : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-4}{x-1}=\dfrac{(2x+5)(x-1)-3}{x-1}=2x+5-\dfrac{3}{x-1}$.

En écrivant la fonction sous cette forme, nous voyons que le terme $\dfrac{3}{x-1}$ tendra vers 0 pour x tendant vers $\pm\infty$. Les valeurs de $f(x)$ tendront donc vers celles de la fonction du premier degré $g(x)=2x+5$. La droite qui représente g est asymptote oblique au graphe de f !

Exemple 2 : déterminer l'asymptote oblique de la fonction $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

Il est clair que cette fonction admet l'asymptote oblique $AO\equiv y=x+1$. Pourquoi ? Voyez ci-dessus … Moralité : si la fonction est « bien » présentée, profitez-en et ne calculez pas inutilement.



[1] En effet, le dividende est égal au produit du quotient par le diviseur augmenté du reste : $D=qd+r$.

Exemple 3 : déterminer l'asymptote oblique de la fonction $f(x) = 3x - \sqrt{9x^2 - 9x}$.

Nous avons déjà rencontré cette fonction aux pages 28 et 29, et nous lui avons trouvé une asymptote horizontale pour x tendant vers $+\infty$ ($AH \equiv y = \frac{3}{2}$).

Il nous reste à chercher une asymptote oblique éventuelle pour x tendant vers $-\infty$.

Les formules de CAUCHY sont nécessaires.

<u>Calcul de m</u>

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - \sqrt{9x^2 - 9x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(3 - \frac{\sqrt{9x^2 - 9x}}{x} \right)$$

$$= 3 - \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{x} = 3 - \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} = 3 - (-3) = 6 \ .$$

<u>Calcul de p</u>

$$p = \lim_{x \to -\infty} \left[3x - \sqrt{9x^2 - 9x} - 6x \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[-3x - \sqrt{9x^2 - 9x} \right] = \text{« } +\infty - \infty \text{ »} \ \text{(forme indéterminée)}$$

Nous avons appris à lever ce genre d'indétermination (relisez la page 29 si nécessaire).

$$p = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(-3x - \sqrt{9x^2 - 9x}\right)\left(-3x + \sqrt{9x^2 - 9x}\right)}{-3x + \sqrt{9x^2 - 9x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{9x^2 - \left(9x^2 - 9x\right)}{-3x + \sqrt{9x^2 - 9x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{-3x + \sqrt{9x^2 - 9x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{-3x + \sqrt{9x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{-3x - 3x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{-3x - 3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{-6x} = -\frac{3}{2}$$

<u>Conclusion</u> : la fonction f admet l'asymptote oblique $AO \equiv y = 6x - \frac{3}{2}$ pour x tendant vers $-\infty$.

Exercice

Déterminez les asymptotes obliques éventuelles au graphique de chacune des fonctions suivantes. Positionnez ensuite le graphique de f par rapport à son (ou à ses) asymptote(s).

a) $f(x) = \dfrac{4x^2+1}{2x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{2x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3-x+4}{2x+7}$

d) $f(x) = \dfrac{3+2x+x^2}{-2x^2+6}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

f) $f(x) = x+1-\sqrt{x^2-5x+6}$

g) $f(x) = 3x+4+\sqrt{x^2-1}$

h) $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

8.6. Calculs de limites dans les cas d'indétermination : synthèse pour les fonctions algébriques

Premier cas « 0 / 0 »

Fonctions rationnelles

Factoriser numérateur et dénominateur afin de simplifier les facteurs (x - a) .

Exemple : calculer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - 7x + 3}$ ($a = 3$).

Fonctions irrationnelles

Multiplier numérateur et dénominateur par les expressions conjuguées des expressions où apparaissent les radicaux ; le but est de faire apparaître les facteurs (x - a) et de simplifier.

Exemple : calculer $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1}$ (a = - 1).

Deuxième cas « ∞ / ∞ »

Fonctions rationnelles

La limite du quotient de deux fonctions polynômes est la limite du quotient des termes de plus haut degré de ces fonctions.

Exemple : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 - x + 1}$.

Fonctions irrationnelles

Mettre en évidence la plus haute puissance de x au numérateur et au dénominateur ; repérer ensuite les termes qui tendent vers 0 .

Attention : pour extraire une racine carrée, tenir compte du fait que $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x \le 0 \\ x & si \quad x \ge 0 \end{cases}$.

Exemple : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{3x - 4}$.

Troisième cas « ∞ - ∞ »

Fonctions rationnelles

La limite en ± ∞ d'une fonction polynôme est égale à la limite du terme de plus haut degré de cette fonction.

Exemple : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + x^2 - 5x^3\right)$.

Fonctions irrationnelles

Multiplier et diviser par l'expression conjuguée ; on est alors parfois ramené au cas « ∞ / ∞ » .

Exemple : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{9x^2 - x} - 3x\right)$.

Quatrième cas « 0 . ∞ »

Ce cas se ramène au cas « 0 / 0 » ou « ∞ / ∞ ».

<u>Exemple</u> : calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{x^2 + x} \cdot \sqrt{3x^2 - 1} \right)$.

Exercices récapitulatifs

Calculez chacune des limites suivantes après avoir déterminé le domaine de définition de la fonction.

1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{8x-3}{\sqrt{x+4x^2}}$
2. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{30-x}-5}{5-x}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}$
4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2x - \sqrt{x^2-5x+4}\right)$
5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1-x^2}{x^3-3x^2+4}$
6. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x+3}$
7. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3+2x^2-1}{4-x^2}$
8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+2}}{x-1}$
9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3+\sqrt{6+3x}}{x-1}$
10. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{1-x^2} - x\right)$
11. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{2x-1} + x\right)$
12. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+2x^2}{5x^2-1}$

(Réponses et indications page suivante).

Solutions des exercices de la page 37

	Domaine de définition	Limites	Indications
1	$]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]0, +\infty[$	4 en $+\infty$ - 4 en $-\infty$	Mise en évidence de la plus haute puissance de x au numérateur et au dénominateur.
2	$]-\infty, 30] \setminus \{5\}$	$\frac{1}{10}$	Multiplication et division par le binôme conjugué du numérateur.
3	$\mathbf{R} \setminus \{2\}$	$+\infty$ à gauche $-\infty$ à droite	Factorisation du numérateur et du dénominateur. Ensuite, étude des signes.
4	$]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$	$+\infty$ en $+\infty$; $-\infty$ en $-\infty$	Pour x tendant vers $+\infty$, binôme conjugué et ensuite mise en évidence de la plus haute puissance de x au numérateur et au dénominateur. Pas d'indétermination pour x tendant vers $-\infty$.
5	$\mathbf{R} \setminus \{-1,2\}$	$\frac{2}{9}$	Factorisation du numérateur et du dénominateur (méthode de HORNER).
6	$]-\infty, \frac{1}{2}] \setminus \{-3\}$	n'existe pas en $+\infty$ 0 en $-\infty$	$+\infty$ n'est pas adhérent à dom f. Pour x tendant vers $-\infty$, mise en évidence de la plus haute puissance de x au numérateur et au dénominateur.
7	$\mathbf{R} \setminus \{-2,2\}$	$-\infty$ en $+\infty$ $+\infty$ en $-\infty$	Mise en évidence de la plus haute puissance de x au numérateur et au dénominateur.
8	$[-\frac{1}{4}, +\infty[\setminus \{1\}$	$\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$	Multiplication et division par le binôme conjugué du numérateur.
9	$[-2, +\infty[\setminus \{1\}$	$-\infty$ à gauche $+\infty$ à droite	Étude des signes.
10	$[-1, 1]$	n'existent pas	$+\infty$ et $-\infty$ n'adhèrent à dom f.
11	$[\frac{1}{2}, +\infty[$	$+\infty$ en $+\infty$ n'existe pas en $-\infty$	Pas d'indétermination quand x tend vers $+\infty$. $-\infty$ n'est pas adhérent à dom f.
12	$\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$	$\frac{2}{5}$	Mise en évidence de la plus haute puissance de x au numérateur et au dénominateur.

9. Le théorème du sandwich

Nous admettons les deux théorèmes suivants. Le premier a pour conséquence le second.

Théorème

Si $f(x) \le g(x)$ quand x est voisin de a (sauf peut-être en a) et si les limites de f et de g existent pour x tendant vers a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

Théorème du sandwich

Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ quand x est voisin de a (sauf peut-être en a) et si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

<u>Exemple d'application</u> : calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$.

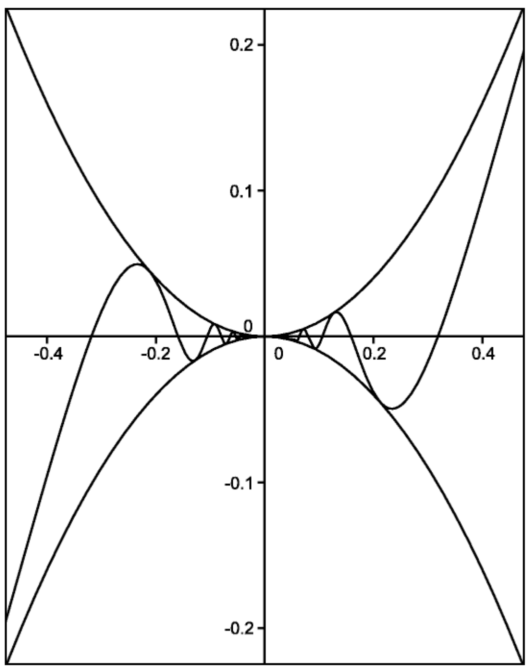
Il n'est pas possible de calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right) \cdot \lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$ car la seconde limite n'existe pas (expliquer).

Mais il est possible de « coincer » la fonction $x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$ entre les fonctions $-x^2$ et x^2.

En effet, puisque $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$, nous trouvons :

$$-x^2 \le x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

La première condition du théorème du sandwich est ainsi satisfaite puisque la fonction $g(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$ est encadrée par les fonctions $f(x) = -x^2$ et $h(x) = x^2$. Cette situation est illustrée par le graphique.



La deuxième condition est satisfaite aussi car $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$.

Nous en concluons que $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$.

10. Limites de fonctions trigonométriques

10.1 Une limite importante pour la suite : $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$

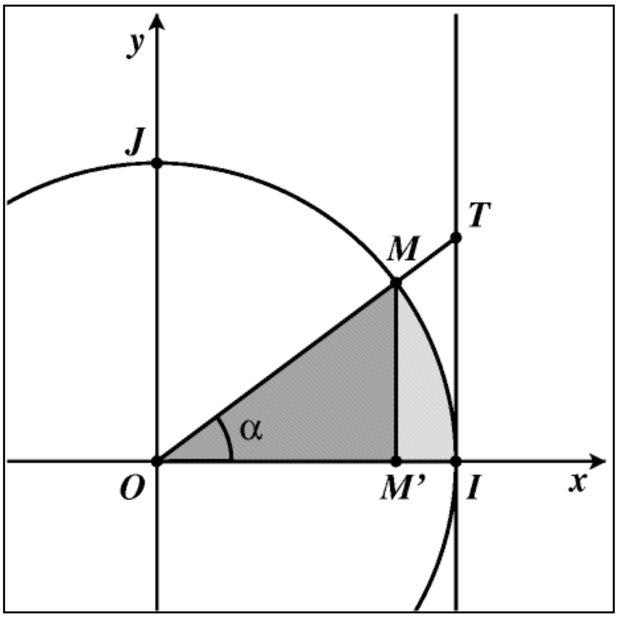
Cette limite mène à une forme indéterminée 0 / 0 .
Un raisonnement géométrique va nous permettre de surmonter cette difficulté.

Traçons le cercle trigonométrique et comparons les aires du triangle *OMM'* , du secteur *OMI* et du triangle *OTI* .

Il est clair que :

$$aire(OMM') < aire(OMI) < aire(OTI) \qquad (1)$$

Calculons l'aire de chacune de ces trois formes.



<u>1° Le triangle *OMM'*</u>

Il a pour base $|OM'| = \cos\alpha$ et pour hauteur $|M'M| = \sin\alpha$.

Par conséquent, $aire(OMM') = \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2}$.

<u>2° Le secteur de disque *OMI*</u>

Il faut tenir un raisonnement de proportionnalité :

- à un angle de 2π radians correspond l'aire du disque complet, à savoir $\pi \cdot r^2 = \pi$ (car le cercle trigonométrique a pour rayon $r = 1$) ;
- pour obtenir un angle d'amplitude α , il faut multiplier 2π par le facteur $\dfrac{\alpha}{2\pi}$;
- l'aire du secteur correspondant à un angle d'amplitude α est donc égale à l'aire du disque multipliée par ce même facteur : $aire(OMI) = \pi \cdot \dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{\alpha}{2}$.

<u>3° Le triangle *OTI*</u> : il a pour base $|OI| = 1$, pour hauteur $|IT| = \tan\alpha$, et donc $aire(OTI) = \dfrac{\tan\alpha}{2}$.

La double inégalité (1) peut maintenant s'écrire : $\dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\tan\alpha}{2}$.

Ou encore :

$$\cos\alpha \cdot \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha \quad (2)$$

Maintenant, que se passe-t-il si l'amplitude α devient voisine de 0 ? Nous devons envisager deux cas, celui où $\alpha > 0$ et celui où $\alpha < 0$.

Premier cas : $\alpha > 0$

Comme α doit tendre vers 0 , nous finirons bien par avoir $\alpha \in]\ 0\ , \frac{\pi}{2}\ [$ et donc $\sin\alpha > 0$.
Nous pouvons donc diviser chaque membre de (2) par $\sin\alpha > 0$ en maintenant l'orientation des signes d'inégalité :

$$\frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} \ ,$$

c'est-à-dire

$$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \ .$$

En inversant chaque membre, nous obtenons* :

$$\frac{1}{\cos\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha \ \ (3)\ .$$

Il nous reste à faire tendre α vers 0 . Comme $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha} = 1$ et que $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos\alpha) = 1$, le théorème du sandwich nous assure que $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

Deuxième cas : $\alpha < 0$

Comme α doit tendre vers 0 , nous finirons par avoir $\alpha \in]\ -\frac{\pi}{2}\ , 0\ [$ et donc $-\alpha \in]\ 0\ , \frac{\pi}{2}\ [$.
Nous sommes donc ramenés au premier cas et nous pouvons reprendre la double inégalité (3) en remplaçant α par $-\alpha$.

$$\frac{1}{\cos(-\alpha)} > \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} > \cos(-\alpha) \ .$$

Les propriétés des angles associés permettent d'écrire :

$$\frac{1}{\cos\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha \ .$$

Pour les mêmes raisons que dans le premier cas, le théorème du sandwich nous permet de conclure que $\lim\limits_{\alpha\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

Finalement, les limites à gauche et à droite étant toutes les deux égales à 1 , nous avons prouvé que

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1}$$

---

* En effet, si x et y sont des nombres strictements positifs : $x < y \Leftrightarrow 1/x > 1/y$.

10.2 Calculer des limites de fonctions trigonométriques

Mentionnons quelques propriétés qui nous serons certainement utiles :

- Les fonctions sinus, cosinus et tangente étant continues dans leur domaine de définition, nous avons :

$$\forall a \in R : \lim_{x \to a} (\sin x) = \sin a$$

$$\forall a \in R : \lim_{x \to a} (\cos x) = \cos a$$

$$\forall a \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \big(k \in Z \big) \right\} : \lim_{x \to a} (\tan x) = \tan a$$

- La fonction tangente admet une asymptote verticale en tout x égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

  En particulier : $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} \big(\tan x\big) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ >}} \big(\tan x\big) = -\infty$.

- Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions périodiques n'existent pas (expliquer).

- Certaines limites menant à une indétermination $0 / 0$ peuvent être calculées grâce à la propriété

  $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exemples

❶ Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$.

Il s'agit bien d'un cas d'indétermination $0 / 0$.
Manipulons d'abord les constantes pour obtenir une limite qui ressemble à la limite de référence :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$$

Maintenant, posons $y = 2x$. Tenant compte du fait que si x tend vers 0 , alors y tend vers 0 aussi, nous obtenons :

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

❷ Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

Après avoir vérifié que nous somme bien dans le cas 0 / 0 , multiplions les deux termes de la fraction par $1 + \cos x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x\cdot(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}\end{aligned}$$

Si nous observons l'expression obtenue, nous y voyons le produit de $\frac{\sin x}{x}$ (et donc la possibilité d'utiliser la limite de référence !) et de $\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

La suite est donc :

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{0}{2} = 0$$

Exercice

Calculer les limites suivantes (ou éventuellement les limites à gauche et à droite).

1. $\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)$
2. $\lim_{x\to 0}(2\cdot\cos x+\sin x)$
3. $\lim_{x\to \pi/2}(\cos 2x)$
4. $\lim_{x\to \pi/4}\frac{1}{1+\tan x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{x}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$
10. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x}$
11. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$
12. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}$
13. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{1}{\sin x-1}$
14. $\lim_{x\to \pi}\frac{1}{\tan x}$
15. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{1}{\tan x}$
16. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{\tan x}{\cos x}$

Et pour clore ce chapitre, un peu d'entraînement d'endurance …

Calculez les limites suivantes, avec des fonctions algébriques et trigonométriques.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3-x}{(x-5)^3}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x}{1+\cos x}$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{(\sin x)-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+1}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x}}{\sqrt{1-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{3x}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-4x^2-x+2}{3x^2-6x+3}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{x-1}$

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-8}-\sqrt{x-2}}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-2}}$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3-2x^2+x\right)$

14. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x^3}{x^2+x+8}$

15. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5-2x}{3+2x-x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{24x^3-x^2+6x-4}{1+3x-x^2-6x^3}$

17. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2-1}}{2x-3}$

18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x-5}{\sqrt{x+8}}$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{\left(4x^2-1\right)\cdot x}}$

20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^3-3}}$

21. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)$

22. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-5x+4}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{5-2x}-2x\right)$

24. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2x}-4x}{2+5x}$

25. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x}+2x}{1+2x}$

26. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-x}{\tan^2 x}$

27. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\cos x}{x}$

28. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\tan x}{2x-\pi}$

29. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{\sqrt{2+x}}$

30. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(x\cdot\sin x\right)$

II. Compléments théoriques

II.1 Définitions « en ε (epsilon) et δ (delta) » des limites de fonctions

Pour chacune des définitions suivantes, nous considérons une fonction $f : R \to R : x \to f(x)$.

❶ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si et seulement si pour tout réel strictement positif ε , il est possible de trouver un réel strictement positif δ (pouvant dépendre de ε) tel que

si $a - \delta < x < a + \delta$ et $x \neq a$ alors $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$

❷

❸

❹

❺

❻

❼

❽

❾