Dérivées

Historiquement, le calcul des dérivées est né de deux problèmes apparemment sans lien l'un avec l'autre : le problème de la construction de la tangente à une courbe et celui du calcul de la vitesse instantanée d'un corps en mouvement, la distance parcourue en fonction du temps étant connue. Au cours du XVII^e siècle, nombreux furent les mathématiciens qui firent progresser la résolution de ces problèmes : Torricelli, Roberval, Fermat, Descartes, Wallis, Barrow, … Toutefois, les résultats s'étant multipliés, la nécessité de les rassembler et de les ordonner s'imposait. Cet effort de systématisation fut l'œuvre de l'Anglais Isaac Newton (1642-1727) et de l'Allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) qui peuvent être considérés comme les fondateurs du calcul différentiel et intégral.

Nous verrons qu'il est possible d'appliquer le concept de dérivée à n'importe quelle quantité qui s'exprime comme une fonction. Comme de telles quantités apparaissent dans presque tous les domaines, les applications possibles de la dérivée sont nombreuses et variées, mais elles concernent toutes une vitesse de variation. *La dérivée peut ainsi être vue comme un outil privilégié pour l'étude des variations et des mouvements.*

---

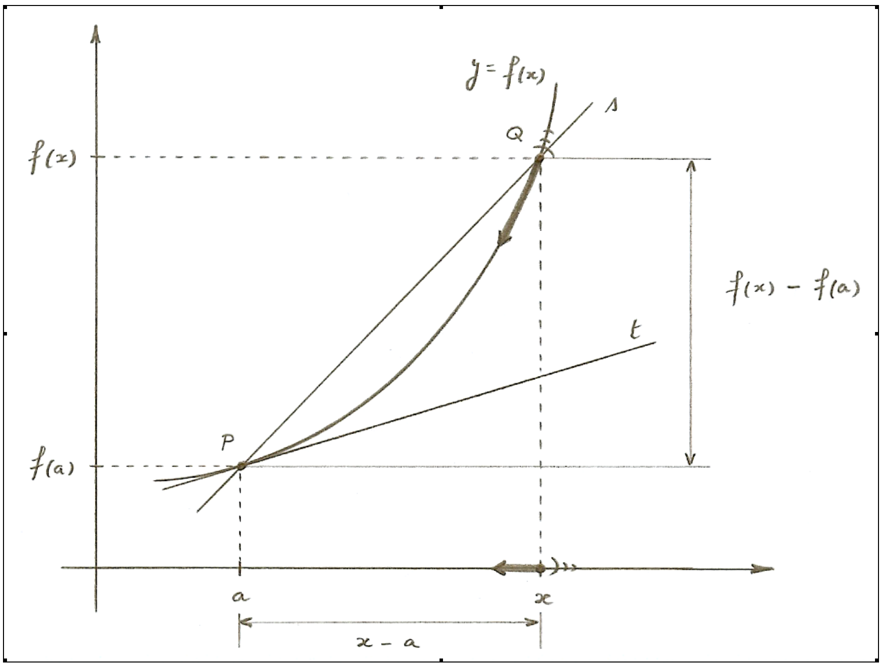
1. Taux de variation moyen et taux de variation instantané

Définition

Le taux de variation moyen d'une fonction f entre les abscisses a et x ($x \neq a$) est défini par

$$m_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Géométriquement, cette quantité est représentée par la pente de la sécante au graphe de f passant par les points $P(a, f(a))$ et $Q(x, f(x))$.

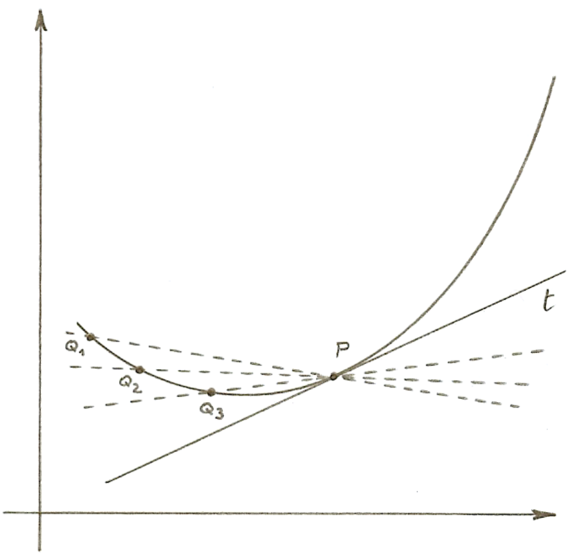


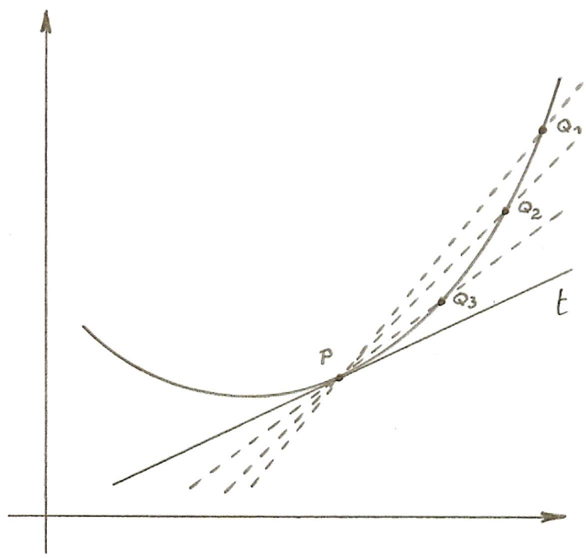
Définition

Le taux de variation instantané d'une fonction f en l'abscisse a est défini par $$m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ Géométriquement, cette quantité est représentée par la pente de la tangente au graphe de f en son point $P(a, f(a))$.

Le taux de variation instantané s'obtient donc en calculant la limite lorsque x tend vers a du taux de variation moyen.
D'un point de vue géométrique, nous constatons que lorsque x tend vers a , le point Q se déplace sur la courbe et s'approche du point P . Ainsi, la sécante comprenant les points P et Q s'approche de la tangente à la courbe au point P .

D'une façon générale, la tangente au graphe d'une fonction f , en un point P , est la droite vers laquelle tendent les sécantes PQ_1 , PQ_2 , PQ_3 , … où Q_1 , Q_2 , Q_3 , … sont des points de plus en plus proches de P .
Dans le cas de la figure ci-dessous, en s'approchant d'un côté ou de l'autre du point P , on obtient la même tangente t (ce ne sera pas toujours le cas !)





Autre façon de définir le taux de variation instantané d'une fonction en l'abscisse a

Au lieu d'appeler x l'abscisse du point « mobile », on peut l'appeler $a + \Delta x$ où Δx représente la différence entre les abscisses des points P et Q .

Il suffit d'adapter la définition ci-dessus en prenant en compte que si x tend vers a , cela signifie que $a + \Delta x$ tend vers a et donc que Δx tend vers 0 ! On obtient ainsi :

$$\boxed{m_a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}}$$

2. Nombre dérivé d'une fonction f en un réel a

Définition

Le taux de variation instantané d'une fonction f en un réel a est appelé nombre dérivé de la fonction f en a et est noté $f'(a)$.
On a ainsi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Géométriquement, le nombre dérivé est la pente de la tangente au graphe de f en son point $P(a, f(a))$.

De façon générale, on peut écrire :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Soulignons enfin que « taux de variation instantané » , « nombre dérivé » et « pente de tangente » sont des expressions équivalentes.

Exemple de calcul d'un nombre dérivé

Calculer la pente de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = 2x - 3x^2$ en son point d'abscisse 2 .

Il s'agit donc de calculer le nombre dérivé de f en 2 : $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Calculons d'abord l'image de 2 par f: $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = -8$

Calculons maintenant le taux de variation moyen de f entre les abscisses x et 2 :

$$m_2(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x - 3x^2 + 8}{x - 2}$$

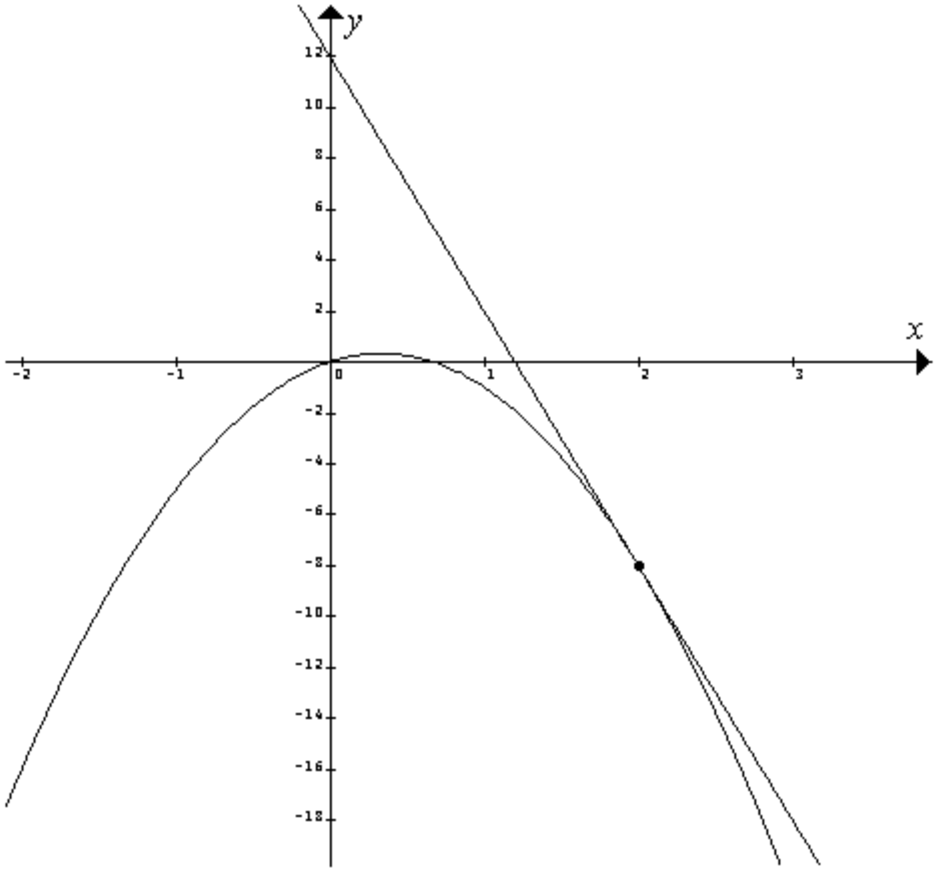
Calculons les racines du numérateur : $-3x^2 + 2x + 8 = 0$; on trouve $x_1 = -\frac{4}{3}$ et $x_2 = 2$.
Nous pouvons alors factoriser le numérateur en utilisant une formule vue en 4$^{\text{ème}}$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Il suit :

$$m_2(x) = \frac{-3(x + \frac{4}{3})(x - 2)}{x - 2} = -3(x + \frac{4}{3}) = -3x - 4 \quad (\text{si } x \neq 2)$$

Finalement

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} m_2(x) = \lim_{x \to 2}(-3x - 4) = -10$$

A titre de vérification graphique, voici le graphe de la fonction $f(x) = 2x - 3x^2$ et de sa tangente de pente -10 au point (2,-8) .



Exercices

1. Calculer la pente de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a .
   Déterminer ensuite une équation cartésienne de cette tangente et vérifier graphiquement (graphiques pages suivantes).

a) $f(x) = x^2 - 4$ $(a = 1)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(a = \text{-}2)$

c) $f(x) = \sin x$ $(a = \dfrac{\pi}{2}$ et $a = 2\pi)$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ $(a = 1)$

e) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{4 - x}$ $(a = 3)$

f) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ $(a = \text{-}1)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$ $(a = 0)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 2$ $(a = \text{-}1)$

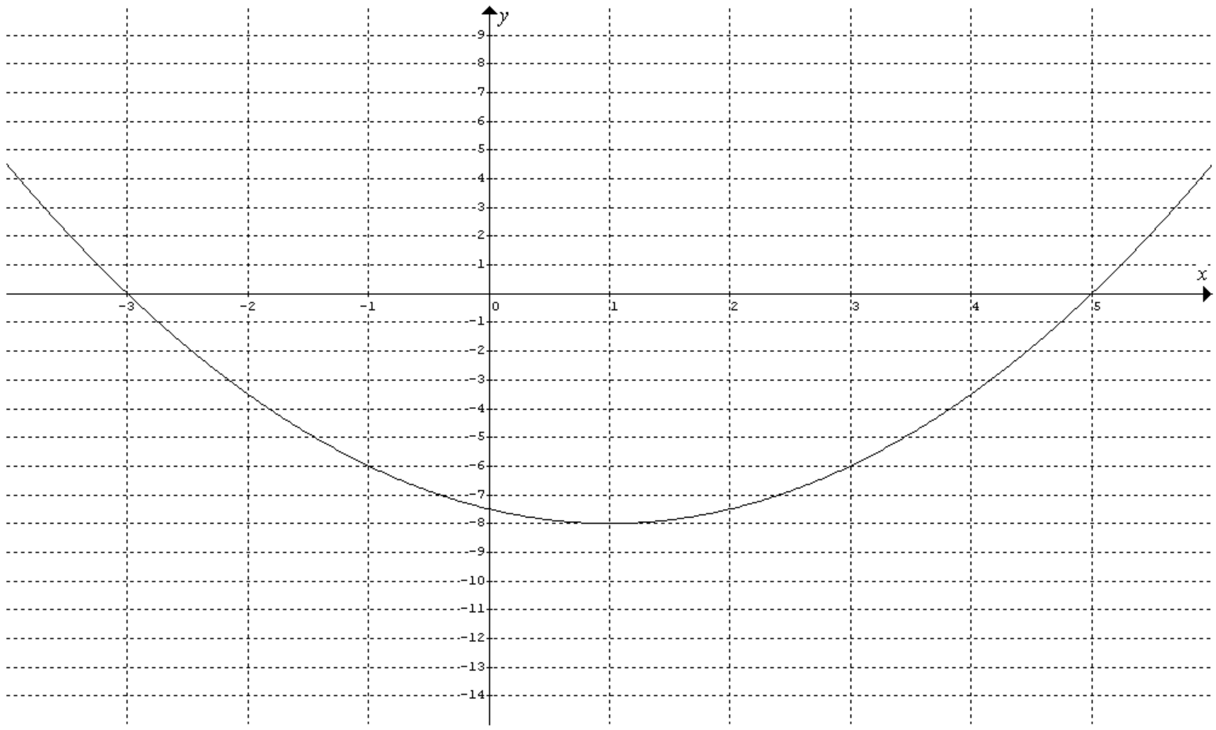
i) $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ $(a = \dfrac{3}{2})$

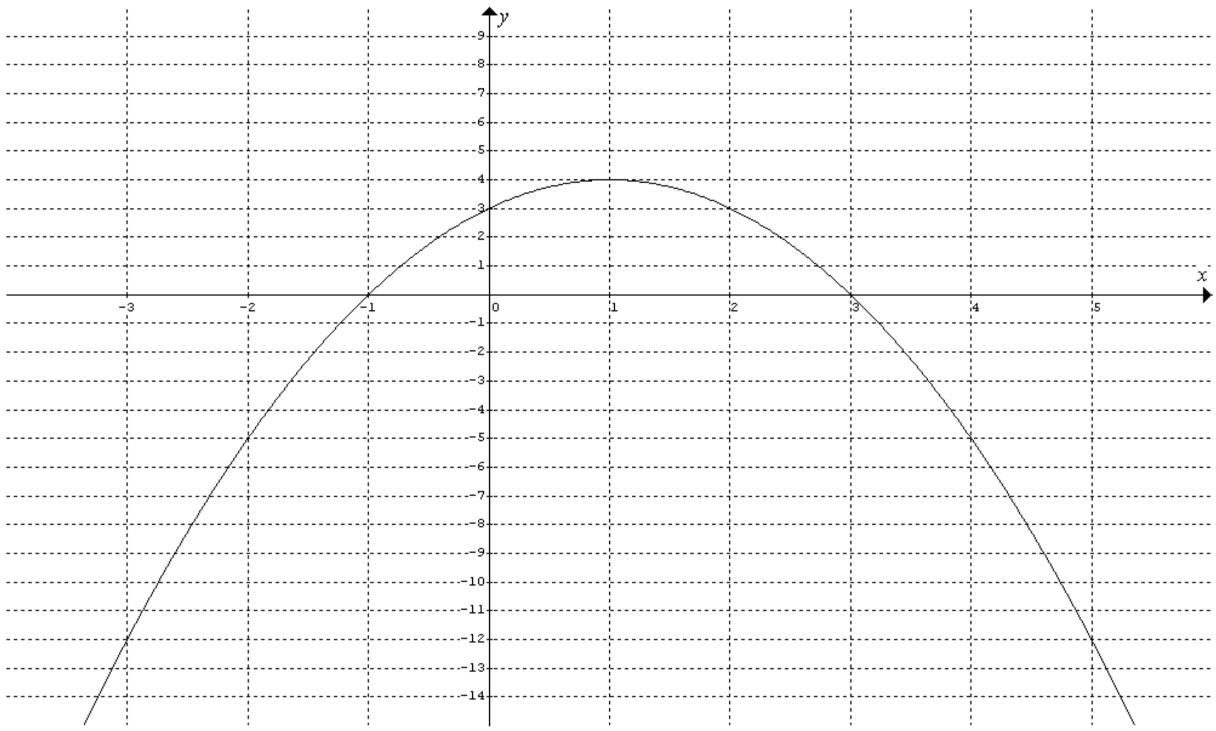
j) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $(a = \text{-}1)$

2. Voici le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{15}{2}$ suivi de celui de $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

   Pour chacune de ces fonctions, calculer la pente de la tangente au graphe de f en l'abscisse a = -3 , a = -2 , a = -1 , a = 0 , a = 3 et a = 5 .

   Déterminer chaque fois une équation cartésienne de tangente et vérifier graphiquement.





3. Fonction dérivable en un réel a

Définition

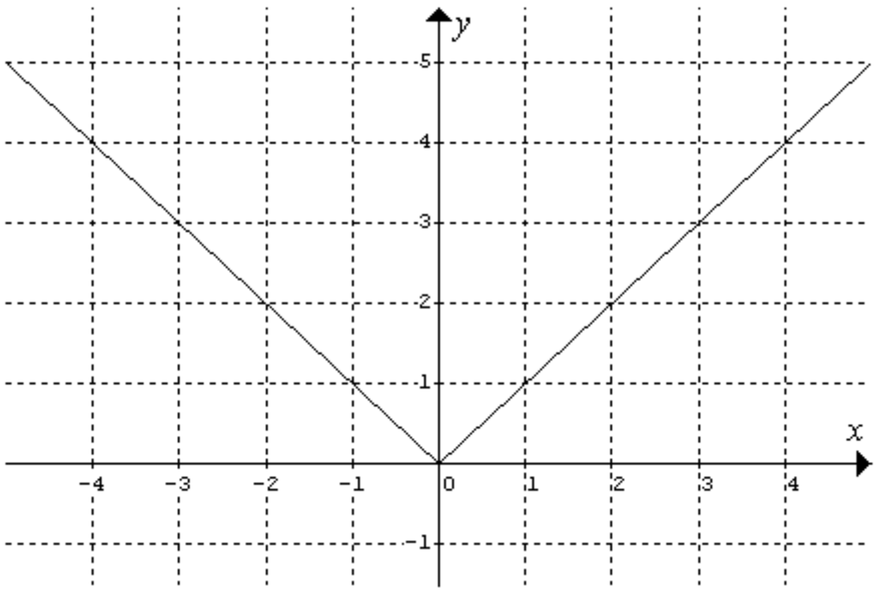
Une fonction dérivable en un réel a est une fonction dont le nombre dérivé en a existe.

Si le nombre dérivé en a n'existe pas, la fonction n'est pas dérivable en a .

Dans quel cas une fonction n'est-elle pas dérivable en un réel ? Sans vouloir épuiser le sujet, voyons quelques exemples.

- D'abord, il est clair que si une fonction n'est pas définie en a , elle ne peut être dérivable en a (puisque $f(a)$ n'existe pas, il n'est pas possible de calculer $f'(a)$).

- Un exemple typique est fourni par la fonction « valeur absolue ». Cette fonction est partout définie mais on pressent qu'un problème va se poser en $a = 0$. En effet, quelle est la tangente au graphique en ce point ?



Intuitivement, nous imaginons bien qu'il y a une tangente de pente -1 confondue avec la partie gauche du graphe de f et une autre tangente de pente 1 confondue avec la partie droite du graphe de f. Tentons de calculer le nombre dérivé de $f(x) = |x|$ en $a = 0$:

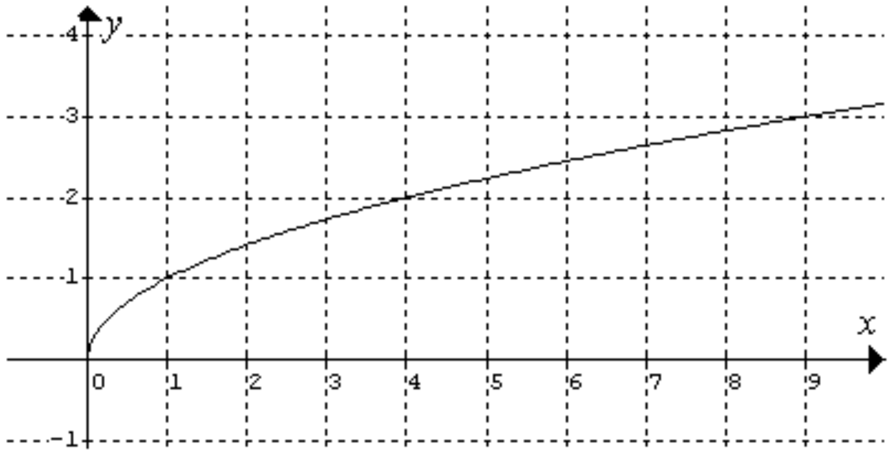
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Si $x < 0$, nous trouvons le <u>nombre dérivé à gauche</u> en $a = 0$: $f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x}{x} = -1$

Si $x > 0$, nous trouvons le <u>nombre dérivé à droite</u> en $a = 0$: $f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} = 1$

Une fonction pour laquelle le nombre dérivé à gauche en a diffère du nombre dérivé à droite en a n'est pas dérivable en a . Elle admet deux tangentes de pentes différentes au point d'abscisse a .

- Un autre exemple typique est fourni par la fonction « racine carrée » en $a = 0$.



En effet, la tangente au graphe de f est verticale (pourquoi ?) : c'est l'axe des ordonnées. Dès lors, comme la pente d'une droite verticale n'existe pas, le nombre dérivé de f en $a = 0$ n'existe pas non plus. La fonction « racine carrée » n'est pas dérivable en $a = 0$.

Que se passe-t-il si l'on essaie de calculer ce nombre dérivé par la définition ?

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Ce dernier résultat trouve sa justification dans le chapitre concernant les limites de fonctions. Voici un début d'explication : si x se rapproche de plus en plus de 0 par valeurs positives, alors $\sqrt{x}$ va devenir de plus en plus proche de 0 également et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ va devenir de plus en plus grande (et même aussi grande que l'on veut).

C'est ce que signifie l'écriture $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ (où $+\infty$ se lit « plus l'infini »).

Une droite dont la pente devient de plus en plus grande se rapproche de plus en plus de la verticale. Nous « retrouvons » la tangente verticale évoquée ci-dessus.

Définition

Le domaine de dérivabilité d'une fonction f est l'ensemble de tous les réels a tels que f est dérivable en a .

Exemples

- La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable partout sauf en $a = 0$. Son domaine de dérivabilité est donc R_0 . On note $dom_D f = R_0$.

- La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est définie que pour les réels positifs ; elle est dérivable en chacun d'eux sauf en $a = 0$. Son domaine de dérivabilité est donc : $dom_D f = R_0^+$.

Lien entre dérivabilité et continuité

Une fonction dérivable en a est continue en a .

Preuve

Rappelons d'abord qu'une fonction est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Nous allons donc devoir prouver que f possède cette propriété en a .

Par hypothèse, f étant dérivable en a , son nombre dérivé $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Ecrivons maintenant $f(x)$ d'une façon qui fasse apparaître le quotient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(a) + f(a) \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \end{aligned}$$

Passons à la limite pour x tendant vers a dans les deux membres :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) + \lim_{x \to a} f(a) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Notons bien que la réciproque de cette propriété est fausse. Une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a .
Ainsi, la fonction « valeur absolue » qui est continue en $a = 0$ n'y est pas dérivable ainsi que nous l'avons vu à la page 8.

Les pages 11 et 12 résument les définitions et propriétés concernant la dérivabilité et illustrent quelques cas où une fonction n'est pas dérivable en un réel.

4. Fonction dérivée

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$. Imaginons que nous voulions connaître la pente de la tangente au graphe de f en ses points d'abscisses -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , etc.

Pour ne pas devoir refaire plusieurs fois des calculs analogues, il serait utile de calculer, une fois pour toutes, le nombre dérivé de f en une abscisse x quelconque. Pour cela, nous allons utiliser la troisième forme de la définition du nombre dérivé (page 3).

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} \qquad (\ \Delta x \neq 0\ ) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Le problème est maintenant complètement résolu pour la fonction $f(x) = x^2$: quel que soit le point du graphe de cette fonction, la pente de la tangente y est égale au double de l'abscisse du point.

Nous pouvons répondre rapidement aux questions posées ci-dessus :

$f'(-2) = -4$, $f'(-1) = -2$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$, $f'(2) = 4$, $f'(3) = 6$, etc.

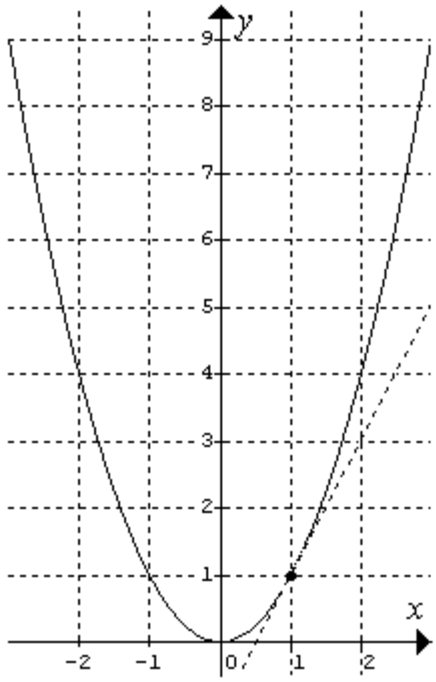
Nous venons en outre de définir l'expression analytique d'une nouvelle fonction : celle qui fait correspondre, à toute valeur de x , la pente du graphique de f en son point d'abscisse x . Cette nouvelle fonction s'appelle « fonction dérivée » de f . Son expression analytique est $f'(x) = 2x$.

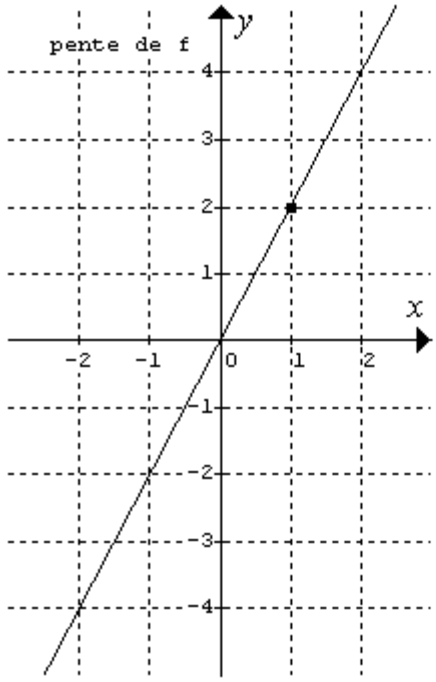
Pour exprimer que $f(x) = x^2$ a pour fonction dérivée $f'(x) = 2x$, deux notations sont couramment utilisées :

- $\left(x^2\right)' = 2x$
- $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$ (la notation de Leibniz, courante en sciences, en économie, …)

Utilité de la fonction dérivée

Représentons le graphe de $f(x) = x^2$ à gauche et celui de $f'(x) = 2x$ à droite (insistons sur le fait que le graphe de f' représente la pente du graphe de f !)





Par exemple, à gauche, nous avons marqué le point $(1,1)$. En ce point, la pente de la tangente est égale à 2 . Cette information se retrouve sur le graphique de droite : en l'abscisse 1 , nous lisons l'ordonnée 2 , c'est-à-dire la pente du graphe de f.

Remarquons ensuite que lorsque la fonction f est décroissante, la pente de son graphique est négative. Inversement, lorsque la fonction f est croissante, la pente de son graphique est positive. Quand il faut étudier une fonction dont on ne connaît pas le graphique, le calcul de la fonction dérivée et l'étude de son signe permet de dire où la fonction f est croissante, décroissante.

Dans la cas de la fonction $f(x) = x^2$, voici le tableau de signes de la fonction dérivée $f'(x) = 2x$ et les conclusions que l'on en tire sur les variations de f :

x		0	
$f'(x) = 2x$	-	0	+
$f(x) = x^2$	↘	min	↗

La dernière ligne du tableau signifie que f est strictement décroissante dans $]-\infty,0[$, qu'elle atteint un minimum pour $x = 0$ et qu'elle est strictement croissante dans $]0,+\infty[$.

Exercice

Sur le modèle de ce qui vient d'être fait pour la fonction $f(x) = x^2$, déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = x^3$

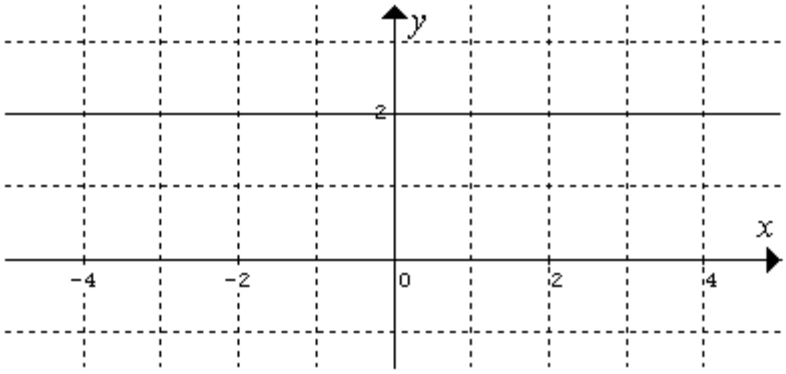
5. Méthodes de dérivation

Nous allons maintenant établir des formules et des méthodes pour déterminer rapidement la fonction dérivée d'une fonction donnée.

Dans tout ce qui suit, f et g désignent des fonctions dérivables.

5.1. Dérivée d'une fonction constante

Soit une fonction constante définie par $f(x) = k$ (par exemple $f(x) = 2$).



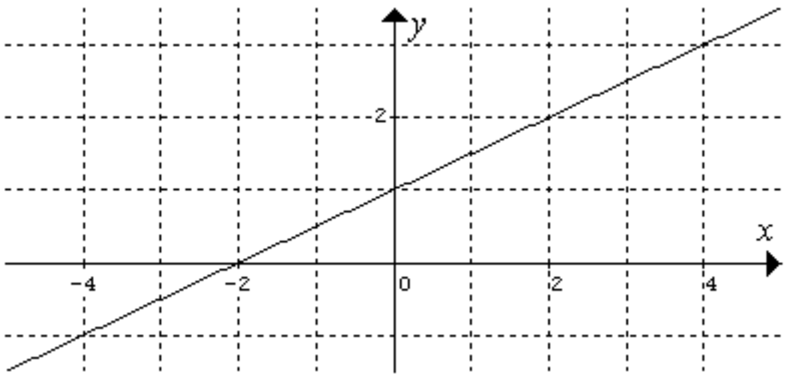
Comme le graphique d'une fonction constante est une droite horizontale, il est clair qu'une tangente en un point de cette droite (qui se confond avec elle) est de pente nulle.

$$\boxed{\text{Si } f(x) = k \text{ , alors } f'(x) = 0}$$

$$\boxed{(k)' = 0} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(k) = 0}$$

5.2. Dérivée d'une fonction du premier degré

Soit une fonction du premier degré définie par $f(x) = mx + p$ (par exemple $f(x) = 0{,}5 \cdot x + 1$).



Comme le graphique d'une fonction du premier degré est une droite oblique, il est clair qu'une tangente en un point de cette droite (qui se confond avec elle) est de pente égale à m .

$$\boxed{\text{Si } f(x) = mx + p \text{ , alors } f'(x) = m}$$

$$\boxed{(mx + p)' = m} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(mx + p) = m}$$

Dans le cas de l'exemple, si $f(x) = 0{,}5 \cdot x + 1$, alors $f'(x) = 0{,}5$.

Cas particulier

La fonction identique $f(x) = x$ a pour fonction dérivée la fonction $f'(x) = 1$.

5.3. Dérivée d'une somme ou d'une différence

Calculons le nombre dérivé en a de la fonction $f + g$.

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right] \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \\
&= f'(a) + g'(a)
\end{aligned}
$$

On démontre de manière analogue que $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.

Ces résultats peuvent s'énoncer de la façon suivante : « la dérivée d'une somme est la somme des dérivées » et « la dérivée d'une différence est la différence des dérivées ».

Exemples

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $h(x) = x^2 + 5x - 3$.

  La fonction h peut être vue comme la somme des fonctions f et g avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = 5x - 3$. Dès lors, $h'(x) = f'(x) + g'(x) = \left(x^2\right)' + (5x-3)' = 2x + 5$.

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 8x$.

  La règle de dérivation que nous venons de voir peut être étendue au cas où la fonction est la somme ou la différence de plus de deux termes :

$$h'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(8x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 8 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + 8$$

5.4. Dérivée d'un produit

Calculons le nombre dérivé en a de la fonction $f \cdot g$.

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}
\end{aligned}
$$

Afin de progresser dans le calcul de cette limite, on transforme le numérateur en retranchant et en ajoutant et en le produit $f(x) \cdot g(a)$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x).g(x) - f(x) \cdot g(a) + f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\
&= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} g(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}
\end{aligned}
$$

Passons chaque facteur en revue :

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$: en effet, comme f est dérivable en a , elle est continue en x (voir le lien entre dérivabilité et continuité, page 10)
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$: en effet, comme g est dérivable en a , le nombre dérivé $g'(a)$ existe
- $\lim\limits_{x \to a} g(a) = g(a)$: en effet, comme a est fixé au départ, son image $g(a)$ est une constante qui n'est pas influencée par le passage à la limite
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$: en effet, comme f est dérivable en a , le nombre dérivé $f'(a)$ existe

Finalement, nous obtenons :

$$(f \cdot g)'(a) = f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a)$$

Nous présenterons ce résultat sous la forme suivante :

$$\boxed{(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)}$$

Ce résultat peut s'énoncer de la façon suivante : « la dérivée d'un produit est égale au produit de la dérivée du premier facteur par le second facteur auquel on ajoute le produit du premier facteur par la dérivée du second facteur ».

Exemples

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $h(x) = x^2 \cdot (7x-2)$.

  La fonction h peut être vue comme le produit des fonctions f et g avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = 7x-2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= \left(x^2\right)' \cdot (7x-2) + x^2 \cdot (7x-2)' \\ &= 2x \cdot (7x-2) + x^2 \cdot 7 \\ &= 14x^2 - 4x + 7x^2 \\ &= 21x^2 - 4x \end{aligned}$$

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $h(x) = (3x-1) \cdot (2-5x)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (3x-1)' \cdot (2-5x) + (3x-1) \cdot (2-5x)' \\ &= 3 \cdot (2-5x) + (3x-1) \cdot (-5) \\ &= 6 - 15x - 15x + 5 \\ &= 11 - 30x \end{aligned}$$

Cas particulier : dérivée du produit d'une fonction par une constante

Supposons que la fonction f soit une fonction constante $f(x) = k$.
La fonction dérivée d'une fonction constante est la fonction constante nulle ; donc $f'(a) = 0$.
De plus, $f(a) = k$ quel que soit a .

Remplaçant dans la formule de dérivation d'un produit, nous obtenons :

$$(f \cdot g)'(a) = 0 \cdot g(a) + k \cdot g'(a) = k \cdot g'(a)$$

On écrit généralement :

$$\boxed{(k \cdot g)'(a) = k \cdot g'(a)}$$

Exemple

Déterminer la fonction dérivée de la fonction $h(x) = 5x^2$.

La fonction h peut être vue comme le produit des fonctions f et g avec $f(x) = 5$ et $g(x) = x^2$. Dès lors, $h'(x) = 5 \cdot g'(x) = 5.\left(x^2\right)' = 5 \cdot 2x = 10x$.

5.5. Dérivée d'un quotient

Calculons le nombre dérivé en a de la fonction $\dfrac{f}{g}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{(x-a)\cdot g(x)\cdot g(a)}$$

Afin de progresser dans le calcul de cette limite, on transforme le numérateur en retranchant et en ajoutant le produit $f(a)\cdot g(a)$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{(x-a)\cdot g(x)\cdot g(a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{g(a)\cdot\left[f(x)-f(a)\right]-f(a)\cdot\left[g(x)-g(a)\right]}{(x-a)\cdot g(x)\cdot g(a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{g(a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{g(a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}-\lim_{x\to a}\frac{f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$= g(a)\cdot\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot g(a)}-f(a)\cdot\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot g(a)}$$

$$= g(a)\cdot\frac{f'(a)}{g^2(a)}-f(a)\cdot\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

$$= \frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Nous avons obtenu la formule de dérivation d'un quotient :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}}$$

Exemples

Déterminer la fonction dérivée de la fonction $h(x)=\dfrac{4x+5}{1-x}$.

La fonction h peut être vue comme le quotient des fonctions f et g avec $f(x)=4x+5$ et $g(x)=1-x$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\\
&= \frac{(4x+5)'\cdot(1-x)-(4x+5)\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}\\
&= \frac{4\cdot(1-x)-(4x+5)\cdot(-1)}{(1-x)^2}\\
&= \frac{4-4x+4x+5}{(1-x)^2}\\
&= \frac{9}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Cas particulier : dérivée de l'inverse d'une fonction

Supposons que la fonction f soit la fonction constante $f(x)=1$. Nous avons alors $f'(a)=0$ et $f(a)=1$. Remplaçons dans la formule précédente :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{0\cdot g(a)-1\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Nous obtenons la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction :

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{g^2(a)}}$$

Exemple

Déterminer la fonction dérivée de la fonction $h(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-9}$.

$$h'(x)=\frac{-(x^2+2x-9)'}{(x^2+2x-9)^2}=\frac{-2x+2}{(x^2+2x-9)^2}$$

5.6. Dérivée d'une puissance de x

Nous savons déjà que $\left(x^2\right)' = 2x$.

Pour déterminer la fonction dérivée de $f(x) = x^3$, nous pouvons considérer cette fonction comme le produit de x^2 par x et appliquer la formule de dérivation d'un produit :

$$\left(x^3\right)' = \left(x^2 \cdot x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

Donc, $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

En utilisant ce résultat et un procédé analogue, nous pouvons calculer la fonction dérivée de $f(x) = x^4$:

$$\left(x^4\right)' = \left(x^3 \cdot x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$$

Donc, $\left(x^4\right)' = 4x^3$.

En continuant de la même façon, on montre que : $\left(x^5\right)' = 5x^4$, $\left(x^6\right)' = 6x^5$, $\left(x^7\right)' = 7x^6$, etc.

De façon générale, on peut montrer que

$$\boxed{\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}}$$

On peut démontrer que cette règle de dérivation, qui vient d'être établie pour des exposants n naturels, est en réalité valable pour des exposants réels quelconques.

En particulier, nous pourrons l'utiliser pour des exposants rationnels.

Par exemple, pour déterminer la fonction dérivée de $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nous avions déjà trouvé ce résultat grâce à la définition du nombre dérivé (page 14) !

Nous pouvons aussi retrouver la fonction dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$:

$$\left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

5.7. Dérivée d'une composée

Calculons le nombre dérivé en a de la fonction $g \circ f$. Nous supposerons que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$. Nous ferons en outre l'hypothèse que si $x - a \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \neq 0$ aussi.

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left[\frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to f(a)} \frac{g(x) - g[f(a)]}{x - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= g'(f(a)) \cdot f'(a)
\end{aligned}
$$

Nous avons obtenu la formule de dérivation d'une composée de fonctions

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)}$$

La démonstration précédente n'est valable que s'il existe un intervalle ouvert comprenant a en tout point duquel (sauf en a) $f(x) - f(a) \neq 0$. Il existe des fonctions pour lesquelles cette condition n'est pas réalisée. La démonstration précédente ne peut donc leur être appliquée. Toutefois, nous ne rencontrerons pas de telles fonctions dans ce cours.

Exemple d'application

Quelle est la fonction dérivée de la fonction $h(x) = (3x^2 - 5)^4$?

La fonction h peut être vue comme la composée des fonctions f et g avec $f(x) = 3x^2 - 5$ et $g(x) = x^4$.

Nous avons donc : $h'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) = g'(3a^2 - 5) \cdot f'(a)$

Tenant compte de $g'(x) = 4x^3$ et de $f'(x) = 6x$, nous trouvons : $h'(a) = 4 \cdot (3a^2 - 5)^3 \cdot 6a$

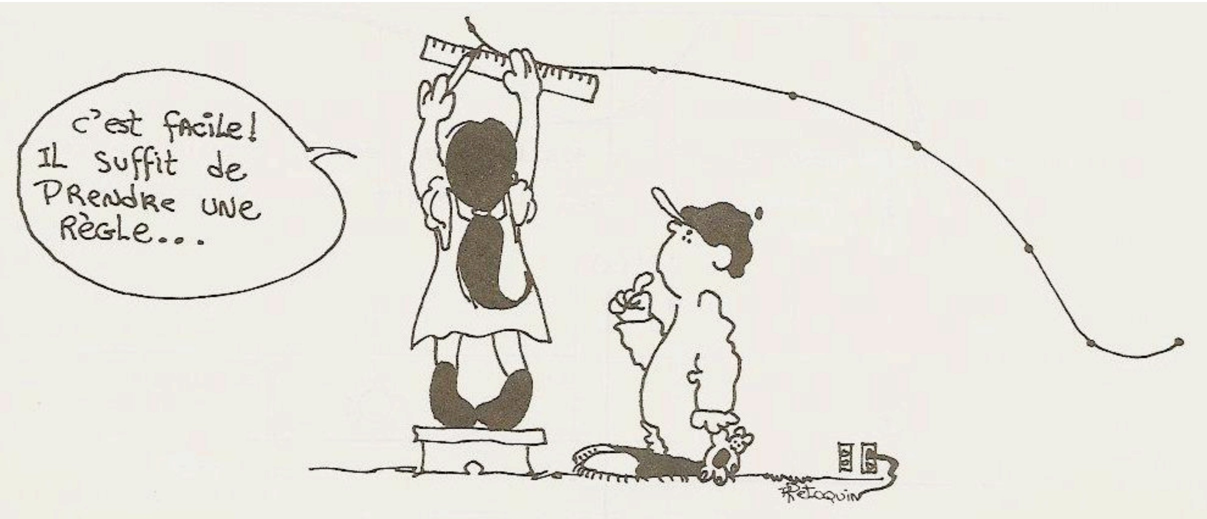
Finalement : $h'(x) = 24x \cdot (3x^2 - 5)^3$

5.8. Dérivées des fonctions trigonométriques

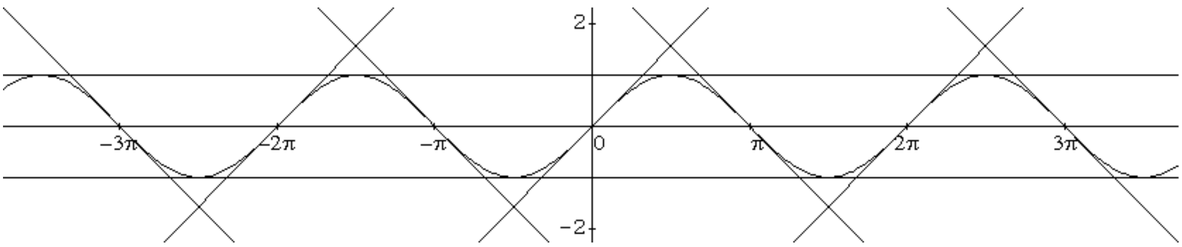
Dérivée de la fonction « sinus »

Exploration graphique

Connaissant le graphe d'une fonction f et en se basant sur l'interprétation géométrique du nombre dérivé (la pente de la tangente), il est possible d'obtenir l'allure générale du graphe de sa fonction dérivée f' .



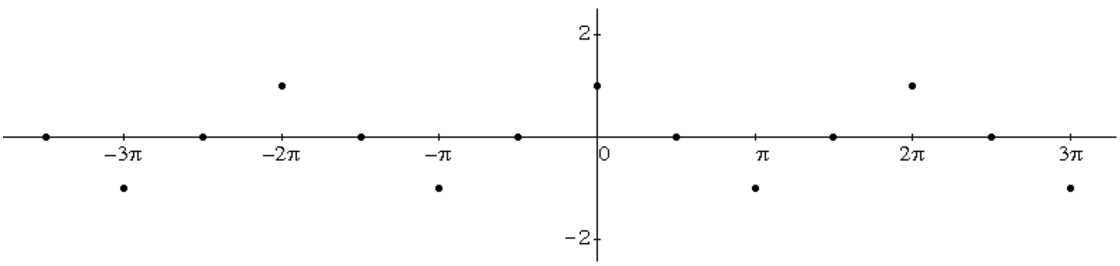
Voici le graphe bien connu de la fonction « sinus ».



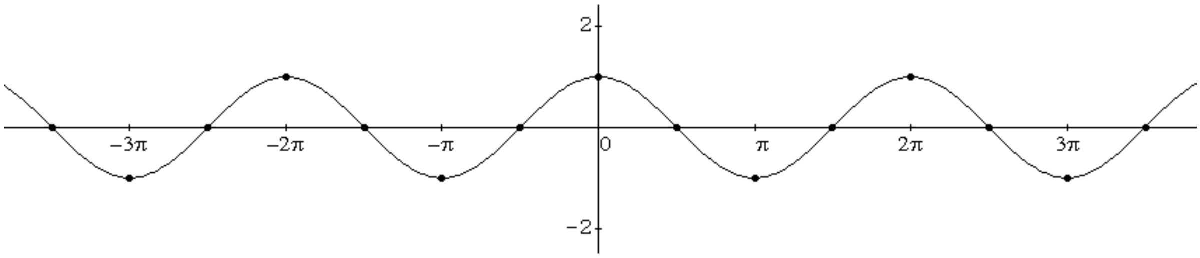
Nous avons tracé quelques tangentes à ce graphique :

- aux points où la fonction atteint un maximum (tangente horizontale, pente nulle)
- aux points où la fonction atteint un minimum (tangente horizontale, pente nulle)
- aux points où la fonction coupe l'axe des x (tangentes de pente égale à 1 ou à -1)

Cela nous donne quelques points du graphe des pentes de f, c'est-à-dire du graphe de f' .



Ce graphe nous rappelle celui de la fonction « cosinus ».



Il est donc logique de conjecturer que la fonction dérivée de la fonction « sinus » est la fonction « cosinus ». Il reste à le démontrer !

Calculons le nombre dérivé en a de la fonction $f(x) = \sin x$.

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} \qquad \text{(formule de Simpson)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \to a} \cos \frac{x+a}{2} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \to a} \cos \frac{x+a}{2} \qquad \text{(on a posé } y = \frac{x-a}{2} \text{)}
\end{aligned}
$$

La première limite peut être évaluée à l'aide d'une calculatrice (avec y en radians) :

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

La seconde limite ne pose pas de problème : $\lim_{x \to a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos \frac{a+a}{2} = \cos a$.

Nous trouvons ainsi : $f'(a) = \cos a$. La fonction dérivée de la fonction « sinus » est donc bien la fonction « cosinus ».

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Dérivée de la fonction « cosinus »

Comme nous venons de le faire pour la fonction « sinus », nous pourrions encore entreprendre une exploration graphique et ensuite un calcul basé sur la définition du nombre dérivé (c'est un bon exercice !).

Toutefois, connaissant la dérivée de la fonction « sinus », on peut avoir une autre idée : se baser sur les angles associés et utiliser la formule de dérivation d'une composée.

Soit h la fonction « cosinus ». Nous savons que $h(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

La fonction h peut ainsi être vue comme la composée des fonctions f et g avec $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ et $g(x) = \sin x$.

Nous avons donc : $h'(x) = \left(g \circ f\right)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(\frac{\pi}{2} - x) \cdot f'(x)$

Tenant compte de $g'(x) = \cos x$ et de $f'(x) = -1$, nous trouvons : $h'(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x$

La fonction dérivée de la fonction « cosinus » est donc l'opposée de la fonction « sinus ».

$$\boxed{\left(\cos x\right)' = -\sin x}$$

Dérivée de la fonction « tangente »

Considérant la fonction « tangente » comme le quotient de la fonction « sinus » par la fonction « cosinus » et utilisant la formule de dérivation d'un quotient, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\left(\tan x\right)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\left(\sin x\right)' \cdot \cos x - \sin x \cdot \left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \left(-\sin x\right)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Dérivée de la fonction « cotangente » (exercice)

$$\boxed{(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}}$$

5.9. Formulaire

Fonction	Fonction dérivée
k (constante)	0
$mx + p$	m
x	1
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$f(x) + g(x) - h(x)$	$f'(x) + g'(x) - h'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$k \cdot g(x)$ (k : constante)	$k \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$\frac{1}{g(x)}$	$\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\left[f(x)\right]^n$	$n \cdot \left[f(x)\right]^{n-1} \cdot f'(x)$
$\sin\left[f(x)\right]$	$\cos\left[f(x)\right] \cdot f'(x)$
$\cos\left[f(x)\right]$	$-\sin\left[f(x)\right] \cdot f'(x)$
$\tan\left[f(x)\right]$	$\frac{1}{\cos^2\left[f(x)\right]} \cdot f'(x)$
$\cot\left[f(x)\right]$	$\frac{-1}{\sin^2\left[f(x)\right]} \cdot f'(x)$

Ce formulaire sera complété en 6ème année.

Exercices de calculs de fonctions dérivées (utilisation des formules) : pages 27 et 28. Réponses aux pages 29 et 30.

6. Lien entre les variations d'une fonction et sa dérivée première

Rappelons d'abord deux définitions.

- Une fonction f est **croissante** dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, si $x_2 > x_1$, alors $f(x_2) \geq f(x_1)$.

f est **croissante** dans I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

- Une fonction f est **décroissante** dans un intervalle I si et seulement si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I, si $x_2 > x_1$, alors $f(x_2) \leq f(x_1)$.

f est **décroissante** dans I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

Pour obtenir la définition d'une fonction strictement (dé)croissante, il suffit de remplacer les signes $\leq$ et $\geq$ respectivement par $<$ et $>$ dans les définitions ci-dessus.

Rappelons encore les définitions concernant les extrema.

- Une fonction f admet un **maximum absolu** sur une partie I de son domaine, s'il est possible de trouver un réel x_0 tel que : $\forall\, x \in \mathrm{I} : f(x_0) \geq f(x)$

  (on dit que $f(x_0)$ est le maximum absolu de f sur I)

- Une fonction f admet un **minimum absolu** sur une partie I de son domaine, s'il est possible de trouver un réel x_0 tel que : $\forall\, x \in \mathrm{I} : f(x_0) \leq f(x)$

  (on dit que $f(x_0)$ est le minimum absolu de f sur I)

- Une fonction f admet un **maximum local** pour $x = x_0 \in \mathrm{dom}\, f$, si on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x_0)$ soit un maximum absolu dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap \mathrm{dom}\, f$.

- Une fonction f admet un **minimum local** pour $x = x_0 \in \mathrm{dom}\, f$, si on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x_0)$ soit un minimum absolu dans $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap \mathrm{dom}\, f$.

Théorème des valeurs extrêmes

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, alors f admet au moins un minimum et un maximum sur $[a,b]$.

Théorème

Si une fonction admet un extremum local en un point c d'un intervalle ouvert, alors, soit $f'(c) = 0$, soit $f'(c)$ n'existe pas.