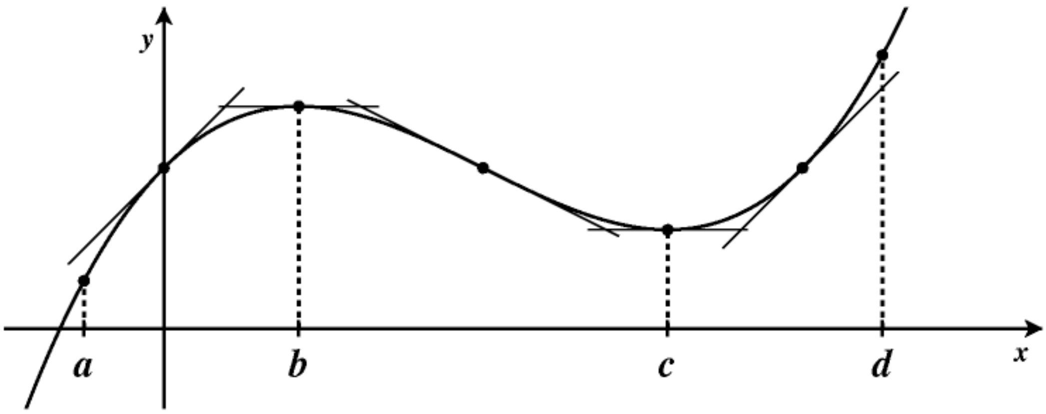
6. Variations d'une fonction et dérivée première

6.1. Observons des graphiques

Exemple 1

Voici d'abord une fonction f continue dans **R** (il s'agit d'un polynôme du troisième degré).



Observons les variations de f dans l'intervalle $[a,d]$. Notons également le signe de sa dérivée première, en considérant la pente de la tangente à la courbe en différents points.

- f est strictement croissante dans $[a,b[$ $\quad \forall x \in [a,b[: f'(x) > 0$
- f atteint un maximum en b $\quad f'(b) = 0$
- f est strictement décroissante dans $]b,c[$ $\quad \forall x \in]b,c[: f'(x) < 0$
- f atteint un minimum en c $\quad f'(c) = 0$
- f est strictement croissante dans $]c,d]$ $\quad \forall x \in]c,d] : f'(x) > 0$

Si nous débordons de l'intervalle $[a,d]$, nous pouvons encore écrire que

- f est strictement croissante dans $]-\infty,b[$ $\quad \forall x \in]-\infty,b[: f'(x) > 0$;
- f est strictement croissante dans $[d,+\infty[$ $\quad \forall x \in]d,+\infty[: f'(x) > 0$.

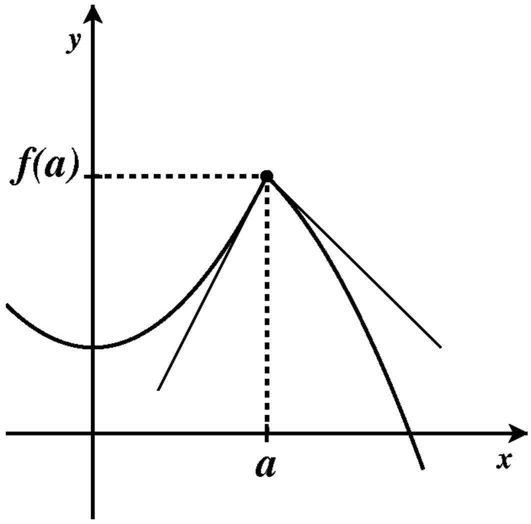
Toutes ces observations peuvent être résumées dans un *tableau des variations*. Celui-ci donne d'abord les signes de f' et ensuite les variations de f.

x		b		c	
f'	+	0	-	0	+
f	↗	Max $(b,f(b))$	↘	Min $(c,f(c))$	↗

Les observations que nous venons de faire ne permettent pas encore de tirer des conclusions générales, car elles ne concernent qu'une fonction particulière. Les exemples suivants vont nous montrer d'autres situations.

Exemple 2

Voici maintenant une fonction que nous supposerons continue dans **R** . Elle n'est cependant pas dérivable en a car les nombres dérivés à gauche et à droite y sont différents (nous observons deux demi tangentes de pentes différentes).
Nous sommes en présence d'un *point anguleux*, phénomène que l'on rencontre notamment avec certaines fonctions irrationnelles.



Voici le tableau des variations de cette fonction.

x		a	
f'	+	💣	-
f	↗	Max $(a,f(a))$	↘

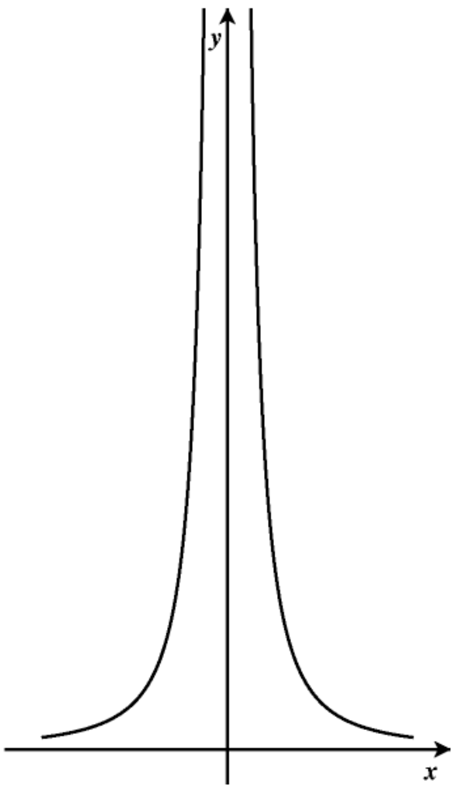
Il faut bien sûr y signaler, d'une manière ou d'une autre, que $f'(a)$ n'existe pas !

La fonction atteint bien un maximum en a . En effet, d'une part elle passe d'une phase de croissance à une phase de décroissance, d'autre part elle est définie et continue en a . Le fait qu'elle ne soit pas dérivable en a n'est pas un problème.

Exemple 3

Un changement de signe de f' signifie-t-il toujours que la fonction atteint un extremum ?

Observons le graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.



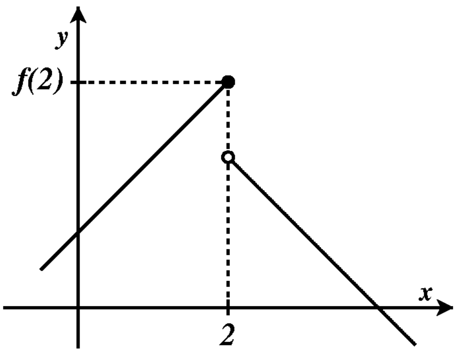
Nous en déduisons son tableau des variations (que nous pouvons bien sûr obtenir en étudiant le signe de sa fonction dérivée $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$).

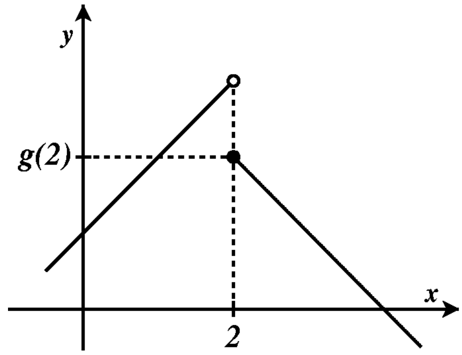
x		a	
f'	+	$\|\|$	-
f	↗	$^{+\infty}\|\|_{-\infty}$ $AV \equiv x=0$	↘

Bien que f' change de signe, nous ne pouvons évidemment pas dire que f atteint un maximum en $x=0$. En effet, la fonction n'y est pas définie, et elle y a même une asymptote verticale.

Exemple 4

Voici deux fonctions définies en tout réel, mais discontinues en $x = 2$.





Chaque fonction passe d'une phase de croissance à une phase de décroissance. Mais seule celle de gauche atteint un maximum en $x = 2$. En effet, il existe un intervalle ouvert contenant 2 , dans lequel tout réel a une image inférieure ou égale à $f(2)$.
Pour la fonction g (figure de droite), tout intervalle ouvert contenant 2 contiendra toujours des réels dont l'image est supérieure à $g(2)$.

6.2. Formulations théoriques

① Dérivée d'une fonction croissante (ou décroissante)

La dérivée d'une fonction dérivable et croissante (ou décroissante) dans l'intervalle I est positive (ou négative) ou nulle dans I.

Démontrons la propriété dans le cas d'une fonction croissante.

Hypothèse : une fonction f est dérivable et croissante dans I .

Thèse : $\forall a \in I : f'(a) \geq 0$.

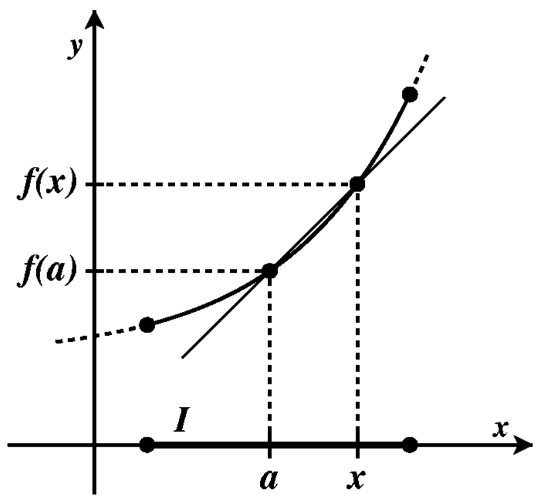
Démonstration

Si f est croissante dans I , nous avons :

$$\forall x, a \in I, x \neq a : x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

$$\forall x, a \in I, x \neq a : x > a \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

La fonction m définie par $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est donc positive dans I (sauf en a où elle n'est pas définie).
On en déduit que $\lim_{x \to a} m(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$.



D'après la définition du nombre dérivé de f en a , nous concluons : $f'(a) \geq 0$.

La démonstration est analogue pour une fonction décroissante. Voyons maintenant la réciproque.

② Fonction dont la dérivée est positive (ou négative)

Une fonction dont la dérivée est positive (ou négative) dans l'intervalle I est croissante (ou décroissante) dans I.

Démontrons la propriété dans le cas d'une fonction dont la dérivée est positive.

Hypothèse : $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$.

Thèse : la fonction f est croissante dans I.

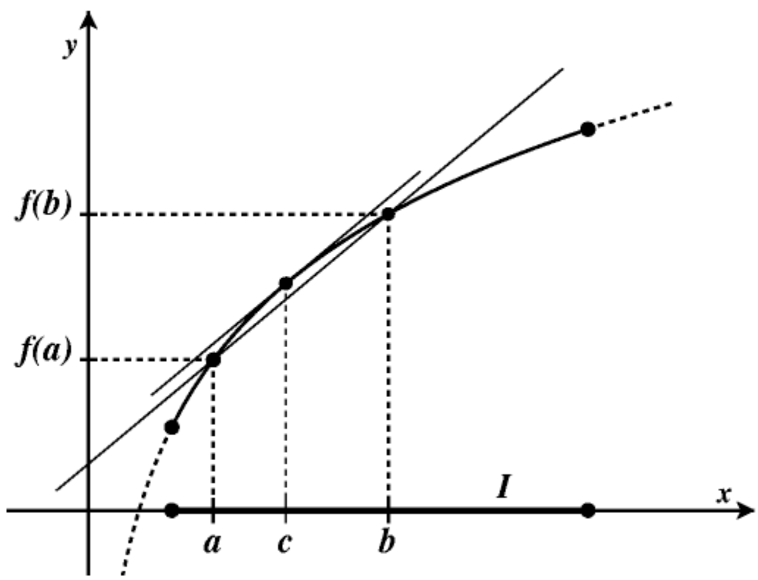
Démonstration

Rappelons d'abord que f croissante dans I équivaut à : $\forall a,b \in I : b > a \Rightarrow f(b) \geq f(a)$,

$$\forall a,b \in I, b \neq a : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0 .$$

Il faut donc prouver que si a et b sont deux réels quelconques de I, avec $b \neq a$ on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$$



Comme la fonction f est continue dans $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$, le *théorème des accroissements finis*[1] nous assure qu'il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La dérivée de f étant positive en tout point de I, elle l'est certainement en c .

Donc : $f'(c) \geq 0$, c'est-à-dire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$. La fonction f est donc croissante dans I.

La démonstration est analogue lorsque la dérivée est négative.

---

[1] Voir page 36

Conclusion

Une fonction f étant dérivable dans l'intervalle I,	
f **est croissante dans** I	f **est décroissante dans** I
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
f' **est positive dans** I	f' **est négative dans** I
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\forall x \in I : f'(x) \geq 0$	$\forall x \in I : f'(x) \leq 0$

6.3. Extrema[2]

Maintenant que nous savons déterminer quand une fonction est croissante ou décroissante, il est naturel de vouloir trouver précisément quand elle passe d'une phase à une autre.

Soit un intervalle $[a,b]$ et un réel $c \in [a,b]$. Soit une fonction f continue dans $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$, sauf éventuellement en c.

Premier cas

Supposons f croissante dans $[a,c]$ et décroissante dans $[c,b]$. La fonction f' est donc positive dans $]a,c[$ et négative dans $]c,b[$. La fonction f a un maximum en c.

Deuxième cas

Supposons f décroissante dans $[a,c]$ et croissante dans $[c,b]$. La fonction f' est donc négative dans $]a,c[$ et positive dans $]c,b[$. La fonction f a un minimum en c.

Nous admettrons les équivalences suivantes.

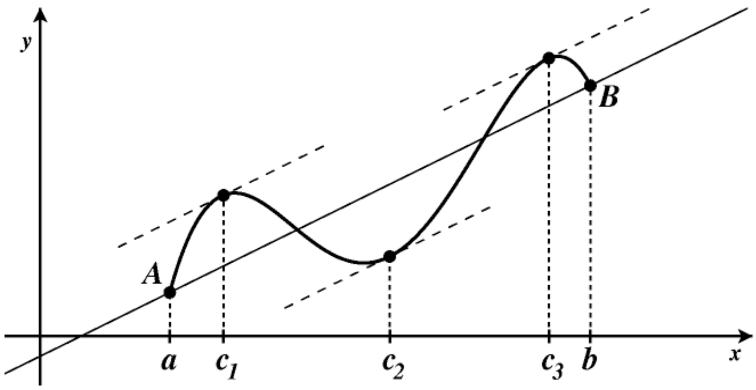
Une fonction f étant dérivable dans un intervalle ouvert comprenant c, sauf éventuellement en c où elle est supposée être continue,	
f **a un maximum en** c	f **a un minimum en** c
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
f' **change de signe en** c **en passant de valeurs positives à des valeurs négatives**	f' **change de signe en** c **en passant de valeurs négatives à des valeurs positives**

[2] Pluriel de extremum, terme général pour maximum et minimum.

LE THÉORÈME DES « ACCROISSEMENTS FINIS » DE LAGRANGE

Voici le graphique d'une fonction f continue dans l'intervalle $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$.

Nous savons que le taux de variation moyen de f entre a et b est la pente de la droite AB , c'est-à-dire $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



D'autre part, nous voyons qu'il existe des points du graphique de f où la tangente à la courbe est parallèle à la droite AB : c'est le cas des points d'abscisses c_1 , c_2 et c_3 .
Ces tangentes ont donc la même pente que AB . Comme nous savons que la pente de la tangente correspond au nombre dérivé, nous pouvons par exemple écrire :

(pente de la tangente à G_f en l'abscisse c_1 = pente de AB) $\Leftrightarrow$ $f'(c_1)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

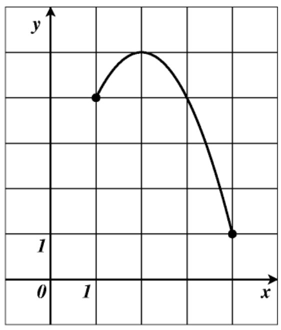
Nous admettrons l'énoncé suivant (théorème des accroissements finis) :

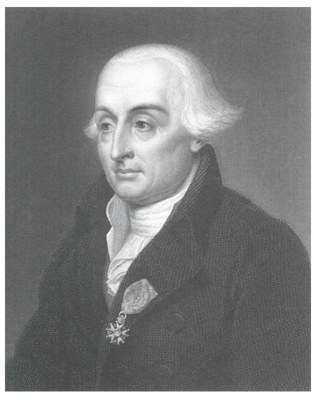
> Si f est une fonction continue dans l'intervalle $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$, alors il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarquons que ce théorème n'assure pas l'unicité du point de l'arc AB où la tangente à G_f est parallèle à la droite AB . Dans le cas de notre figure, il y a trois points qui vérifient cette propriété.
Pour mieux comprendre le sens du théorème de LAGRANGE, on peut donner l'exemple suivant : si la vitesse moyenne d'une voiture entre les instants a et b est de 60 (km/h) , il y a *au moins* un instant entre a et b , où sa vitesse instantanée est égale à 60 (km/h) .

<u>Exercice</u>

Voici le graphique de $f(x)=-x^2+4x+1$ dans l'intervalle $[1,4]$.
Dans cet intervalle, trouver le réel c qui vérifie le théorème de LAGRANGE.





Joseph-Louis LAGRANGE
(1736 - 1813)

Exercices

1. Étudier les variations des fonctions suivantes et déterminer les coordonnés des extrema éventuels.

   a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

   b) $f(x) = x^3 - 3x$

   c) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x - 1$

   d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$

   e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 2$

---

2. Déterminer le paramètre p pour que la fonction $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 3px + 1$ soit croissante dans $\mathbf{R}$.

---

3. L'Hydro-Québec doit prévoir la consommation en électricité à l'instant même où la demande se manifeste car elle ne dispose pas encore de moyens pratiques pour la stocker. Pendant un rude après-midi de l'hiver 1976, entre midi et 18 heures, la prévision de la demande en électricité au Québec, t heures après midi, était donnée par :

$$D(t) = -27t^4 + 252t^3 - 540t^2 + 9400 \text{ (mégawatts) pour } 0 \le t \le 6$$

   a) À quelle(s) heure(s), ce jour-là, prévoyait-on les extrema de la demande en électricité ?

   b) À quelle heure prévoyait-on la demande minimale (minimum absolu) ? Quelle était cette demande ?

   c) À quelle heure prévoyait-on la demande de pointe (maximum absolu) ? Quelle était cette demande ?

---

4. Déterminer l'ensemble des réels m pour que la fonction $f(x) = \dfrac{3}{mx - 4}$ soit strictement décroissante sur son domaine.

---

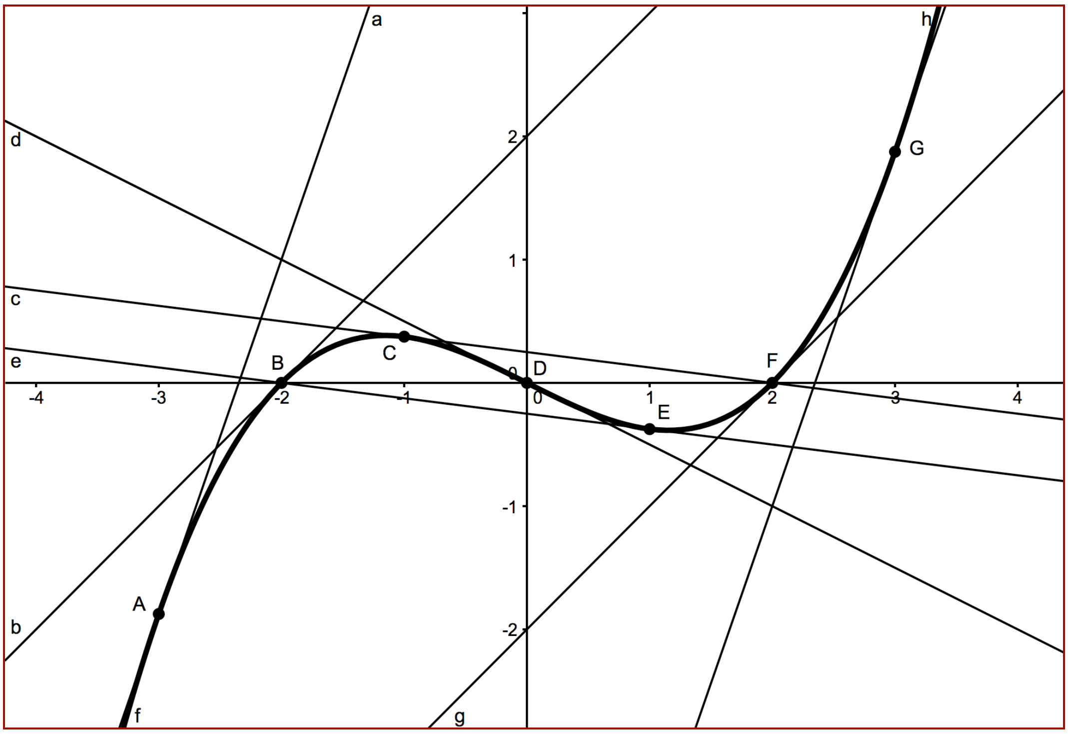
5. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + bx}$ admette un maximum local en $x = 1$ et un minimum local en $x = 2$.

---

7. Concavité et dérivée seconde

7.1. Observation d'un graphique

Voici le graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{8}-\dfrac{x}{2}$. Étudions l'évolution de la pente de la tangente au graphique de f lorsque l'abscisse augmente.



Si nous considérons la tangente à la courbe successivement aux points A , B , C et D , nous voyons que la pente diminue. Notons par ailleurs que la concavité de la courbe est tournée vers le bas.
À partir de D , en prenant successivement la tangente aux points E , F et G , nous voyons que la pente augmente. Quant à la concavité de la courbe, elle est maintenant tournée vers le haut. Le changement de concavité semble se produire au point D (origine des axes).

Nous pouvons aussi calculer la pente en chacun des points de A à G.

En effet, puisque $f'(x)=\dfrac{3x^2}{8}-\dfrac{1}{2}$, nous pouvons dresser le tableau suivant.

<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$\dfrac{23}{8}$</td><td>1</td><td>$-\dfrac{1}{8}$</td><td>$-\dfrac{1}{2}$</td><td>$-\dfrac{1}{8}$</td><td>1</td><td>$\dfrac{23}{8}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">f' décroît
la dérivée de f' est négative</td><td>f' est
minimale</td><td colspan="3">f' croît
la dérivée de f' est positive</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">concavité de G_f vers le bas</td><td>point
d'inflexion</td><td colspan="3">concavité de G_f vers le bas</td></tr>
</table>

Ces observations nous incitent à lier la concavité de la fonction au signe de *la dérivée de* f' , c'est-à-dire la *dérivée seconde* notée f'' .

Pour notre exemple, elle est définie par : $f''(x) = \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{1}{2}\right)' = \frac{3x}{4}$.

Nous pouvons maintenant dresser le tableau des signes de f'' et en déduire le *tableau des concavités de* f .

x		0	
$f''(x) = \frac{3x}{4}$	-	0	+
$f(x)$	$\frown$	PI	$\smile$

Dans l'intervalle $]-\infty,0[$, le symbole $\frown$ signifie que la concavité est tournée vers le bas ; dans l'intervalle $]0,+\infty[$, le symbole $\smile$ signifie qu'elle est tournée vers le haut.
Le point où se produit le changement de concavité est appelé *point d'inflexion* (PI) ; pour notre exemple, ses coordonnées sont $(0,0)$.

7.2. Formulation théorique

Nous admettrons les équivalences suivantes.

Une fonction f étant dérivable deux fois dans l'intervalle I ,

le graphique de f tourne sa concavité vers le haut dans I	**le graphique de f tourne sa concavité vers le bas dans I**
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
f' **est croissante dans I**	f' **est décroissante dans I**
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\forall x \in I : f''(x) \geq 0$	$\forall x \in I : f''(x) \leq 0$

7.3. Point d'inflexion

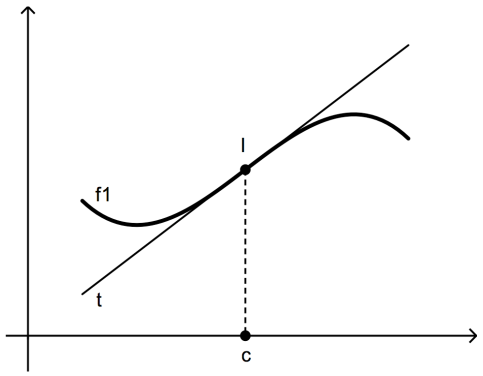
<u>Définition</u>

Le graphique d'une fonction f possède un *point d'inflexion* I si et seulement si

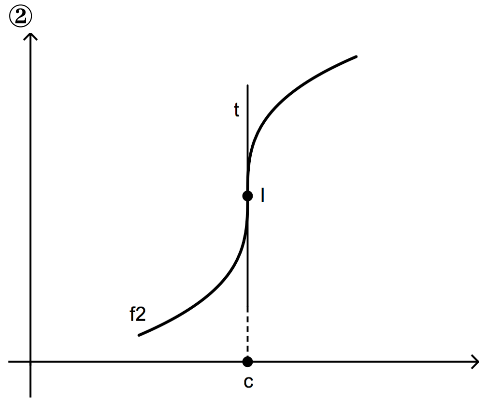
1. le graphique de f admet une tangente en I, <u>et</u>
2. la concavité du graphique de f change de sens en I.

<u>Exemples et contre-exemples</u>

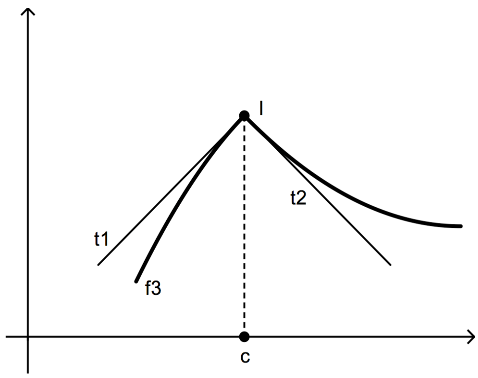
①



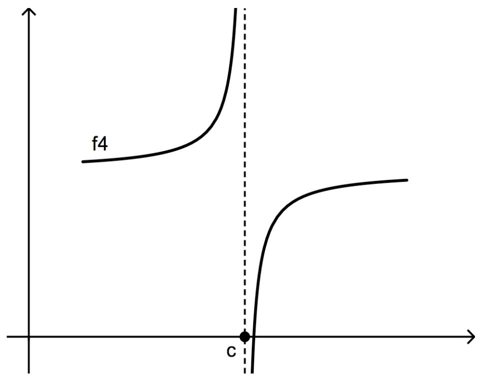
②



③



④



<u>Commentaires</u>

Les graphiques de f_1 et de f_2 ont un point d'inflexion d'abscisse c. En effet, leur concavité change en ce point et ils y admettent une tangente (remarquons que celle de f_2 est verticale et que f_2 n'est donc pas dérivable en c). Les graphiques de f_3 et de f_4, bien que montrant un changement de concavité, n'ont pas de point d'inflexion. En effet, au point d'abscisse c de f_3, il n'y a pas une tangente unique, mais deux demi tangentes de pentes différentes. Quant à f_4, elle n'est tout simplement pas définie en c.

Point d'inflexion et dérivée seconde

Une fonction f étant dérivable deux fois dans un intervalle ouvert comprenant c, sauf éventuellement en c où elle est supposée être continue, le graphique de f possède un point d'inflexion d'abscisse c si et seulement si

1. le graphique de f admet une tangente au point d'abscisse c, et
2. f'' change de signe en c.

Exercices

1. Étudier les variations et la concavité des fonctions suivantes. Déterminer les coordonnées des extrema et des points d'inflexion éventuels.

   a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

   b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

   c) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3 + 2$

   d) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 3)$

   e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

---

2. Calculer, dans l'intervalle $\left[0,2\pi\right]$, les coordonnées des points d'inflexion des fonctions suivantes.

   a) $f(x) = \sin 2x$

   b) $f(x) = x - \cos x$

   c) $f(x) = \sin^2 x$

   d) $f(x) = \sin 2x - 2\cos x$

   e) $f(x) = 2 + \tan 2x$

---

3. Un mobile est animé d'un mouvement décrit par l'équation horaire $e(t) = 2t^3 - 6t^2 + 5$. Quelle est son accélération au temps t ? Au temps $t = 0$? Au temps $t = 5$?

---

4. Soit la famille de fonctions définie par $f(x) = 2x^4 + 12ax^2 + 50$.

   a) Déterminer le réel a pour obtenir une fonction admettant un point d'inflexion de coordonnées $\left(2,-110\right)$.

   b) Existe-t-il un réel a permettant d'obtenir une fonction avec un point d'inflexion de coordonnées $\left(-2,7\right)$?

---

8. Études complètes de fonctions

L'étude complète d'une fonction est un travail dont le but est d'en réaliser une représentation graphique aussi précise que possible.

Voici une démarche courante.

1. Rechercher le domaine de définition.
2. Étudier la parité.
3. Calculer les racines et étudier le signe de la fonction.
4. Calculer l'ordonnée à l'origine.
5. Déterminer les asymptotes.
6. Calculer la dérivée première afin d'étudier les variations de la fonction, et de trouver ses extrema.
7. Calculer la dérivée seconde afin d'étudier les changements de concavité de la fonction, et de trouver ses points d'inflexion.
8. Construire le graphique en exploitant tous les résultats précédents, et en calculant des points supplémentaires.

Cette démarche ne doit pas être appliquée aveuglément. Certaines étapes peuvent parfois être omises, car tout dépend des informations que l'on recherche sur la fonction.
Une étude complète reste néanmoins un bon exercice de synthèse sur les techniques apprises. Une fois cet exercice réalisé, il est très intéressant de vérifier les résultats avec une calculette graphique ou avec un logiciel tel que GeoGebra (www.geogebra.org).

Exercices

Réaliser une étude complète et construire le graphique de chacune des fonctions suivantes.

1. Fonctions rationnelles

a) $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$	c) $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$	e) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+1}$
b) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$	d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$	f) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

2. Fonctions irrationnelles

a) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$	c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-3}$	e) $\sqrt{x^3+3x^2}$
b) $\sqrt{x\cdot(x-2)^2}$	d) $\sqrt{x^3-x^2}$	f) $\sqrt[3]{x^2\cdot(x-1)}$

3. Fonctions trigonométriques

a) $f(x)=\sin 2x-\sin x$	c) $f(x)=\cos x-\sin x$	e) $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$
b) $f(x)=\cos 2x+\cos x$	d) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$	f) $f(x)=\sin 2x-2\cos x$

9. Problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation sont des problèmes dont le but est de déterminer la valeur maximale ou la valeur minimale d'une grandeur définie par une fonction.

Voici quelques énoncés.

1. Un fermier dispose de quarante mètres de treillis et veut réaliser un poulailler rectangulaire adossé à un mur (voir figure). Quelles dimensions doit-il donner au rectangle pour que l'aire du poulailler soit maximale ?

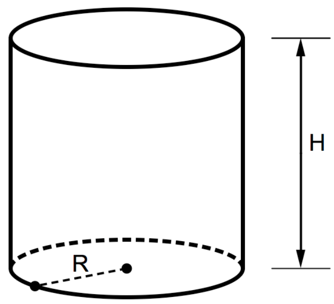
2. Aux quatre coins d'un carré de $50(\text{cm})$ de côté, on découpe quatre carrés isométriques. Par pliage, on obtient ainsi une boîte sans couvercle. Déterminer le côté des carrés à découper pour que le volume de la boîte soit maximal.

3. On veut réaliser une caisse en forme de parallélépipède rectangle à base carrée, sans couvercle, et de volume $1(\text{m}^3)$. Calculer les dimensions de la caisse pour que sa surface totale soit minimale.

Démarche pour résoudre un problème d'optimisation à deux variables

- *Exprimer la grandeur à optimiser en fonction des deux variables.*
- *Ecrire la contrainte du problème sous la forme d'une relation entre les deux variables.*
- *Exprimer une des variables en fonction de l'autre.*
- *Exprimer la grandeur à optimiser en fonction d'une seule variable.*
- *Dériver la fonction ainsi obtenue et étudier ses variations.*
- *Déterminer l'extremum cherché et conclure.*

4. Les boîtes de maïs doivent être réalisées avec une tôle plus épaisse que pour les autres boîtes, car le maïs se conserve sous vide. Les industriels ont donc optimisé les dimensions des boîtes pour réduire les coûts.
   Si une boîte de maïs doit avoir un volume de 1 litre, déterminer ses dimensions (rayon de base et hauteur) pour que sa surface totale soit minimale.



5. Déterminer les dimensions d'un rectangle pour que son aire soit égale à $100(\text{m}^2)$ et que son périmètre soit minimal.

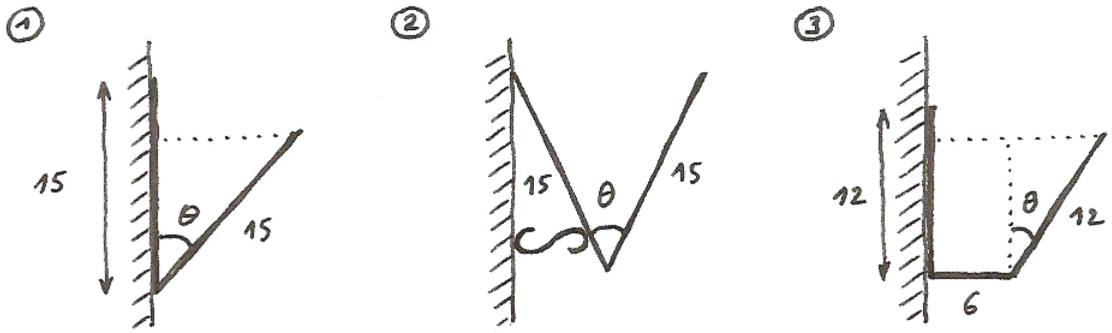
6. Déterminer les dimensions d'un rectangle pour que son périmètre soit égal à $50(\text{m})$ et que son aire soit maximale.

7. Une fenêtre romane a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le diamètre du cercle est égal à la largeur de la fenêtre. Sachant que le pourtour de la fenêtre mesure $30(\text{m})$, déterminer ses dimensions pour qu'elle laisse passer le plus de lumière possible.

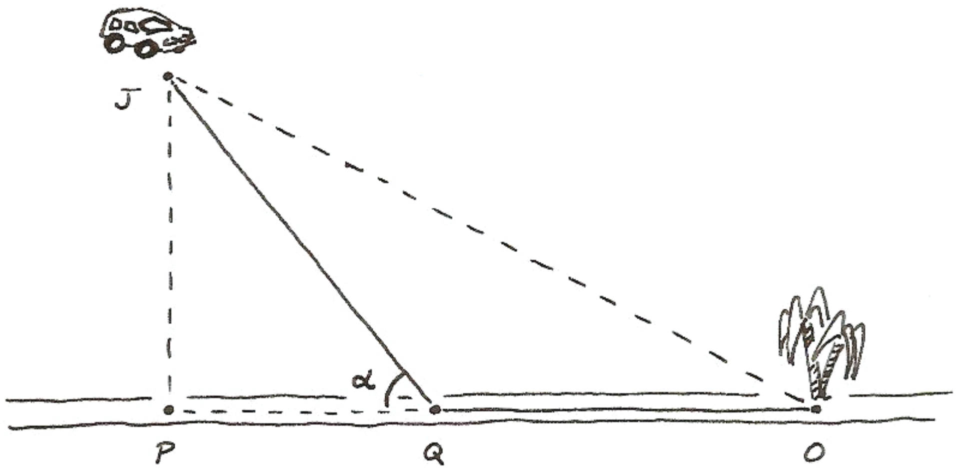
8. Un triangle isocèle est inscrit dans un cercle donné de rayon R. Calculer les dimensions de ce triangle pour que son aire soit maximale.

Problèmes d'optimisation avec fonctions trigonométriques

9. On veut fabriquer une corniche avec une tôle de zinc de 30(cm) de largeur. Si on plie la tôle suivant un des schémas ci-dessous, quel angle θ faut-il lui donner pour obtenir une capacité maximale ?



10. Une jeep se trouve dans un désert de sable au point J. Lorsqu'elle roule sur une piste, elle consomme 10 litres d'essence aux 100 kilomètres, tandis que hors-piste, l'utilisation du « 4 x 4 » porte cette consommation à 20 litres aux 100 kilomètres. Le conducteur doit rejoindre l'oasis O en minimisant la consommation de carburant de son véhicule. Sachant que celui-ci se trouve à 50(km) de la piste PO et que la distance PO est de 200(km), établir le plan de route le plus économique. Il s'agit donc de déterminer l'angle α optimal entre les droites JQ et PQ, où Q est le point où la jeep rejoint la piste.



11. Deux couloirs de largeurs respectives 64(u) et 27(u) se rencontrent à angle droit. Calculer la dimension L de la plus longue tige rigide qui puisse passer d'un couloir à l'autre, la tige restant parallèle au sol.

    Remarque : cet énoncé peut induire en erreur. Il s'agit en effet de déterminer un minimum. Pourquoi ?