Avertissement

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

FACTORISATION

IDENTITÉS REMARQUABLES

Voici les principales identités remarquables.

Certaines vous sont familières, d'autres peut-être moins !

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

<u>Formules de factorisation</u>

(5) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

(6) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

(7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Exercices

1. Vérifiez les formules (3), (4), (6) et (7).

---

2. Développez les expressions suivantes.

a) $(2x+1)^2$

b) $(7x-3)^2$

c) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2$

d) $\left(5-\frac{10}{x}\right)^2$

e) $(x+4)^3$

f) $(x-2)^3$

g) $(1+3x)^3$

h) $(5x-2)^3$

i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

j) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$

3. Si p , q et r sont des nombres réels tels que $p = q + r$, montrez que :

$$p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr .$$

---

4. Factorisez les expressions suivantes.

a) $4x^2 + 4x + 1$

b) $25x^2 - 30x + 9$

c) $16x^2 - 9$

d) $1 - \dfrac{x^2}{4}$

e) $x^3 - 8$

f) $\dfrac{x^3}{8} - \dfrac{1}{27}$

g) $27x^3 + 1$

h) $(x-2a)^2 - (a-2x)^2$

i) $x^2 - (2+x)^2$

j) $(x-a)^3 - x^3$

k) $125a^3 + 8$

l) $(2x+1)^3 - 8x^3$

---

5. a) Compléter l'expression $a^4 + 4b^4$ de manière à obtenir un trinôme carré parfait.

b) En déduire une factorisation de $a^4 + 4b^4$ en un produit de deux facteurs.

c) De la même manière, factoriser $x^4 + 1$.

---

6. a) Vérifier l'égalité de LAGRANGE :

$$(ab + cd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) .$$

b) En déduire la décomposition de $(4a^2 + 9) \cdot (16x^2 + 1)$ en une somme de deux carrés.

1. Si $a = 2{,}99$, que vaut $\dfrac{9-a^2}{3+a}$?

(A) 0,01 (B) 0,014 (C) 5,99 (D) 3 (E) 2,99

---

2. Si a , b et c $\in$ $\mathbf{R}_0$ et si $a^5b^4c^3 \neq 1$, alors $\dfrac{a^8b^6c^4 - a^3b^2c}{a^{10}b^8c^6 - a^5b^4c^3}$ est égal à

(A) 1 (B) abc (C) $\dfrac{1}{abc}$ (D) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}$

---

3. Quel que soit le nombre réel x , le nombre $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ est égal à

(A) $(x^2-1)^4$ (B) $(x^4+1)^2$ (C) x^6-1 (D) x^8-1 (E) $x^{16}-1$

---

4. Quel que soit le nombre réel x , le nombre $(3-2x)^2-(5-x)^2$ est égal à

(A) $(3x-8)(-2-x)$ (B) $-(x+2)(8-3x)$ (C) $(x-2)(8-3x)$

(D) $(x-2)(3x-8)$ (E) $(-8-3x)(-2-x)$

---

5. Pour tout nombre naturel n , que vaut $\dfrac{16^n-4^n}{4^n}$?

(A) 16^{n-1} (B) 4^n-1 (C) 12 (D) 2^{2n} (E) $3n$

---

6. Si le nombre réel a est strictement négatif, alors la plus grande racine réelle de l'équation

$$(x^2-a^2)^2+(x^2-a^2)(x^2-3a^2)=0$$

est nécessairement

(A) a (B) $-a$ (C) $\sqrt{2}a$ (D) $-\sqrt{2}a$

FACTORISATION D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Nous considérons ici des trinômes du second degré d'une variable réelle x, c'est-à-dire des polynômes de la forme

$$ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des coefficients réels, avec $a \neq 0$.

Nous désignons par Δ le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Racines du trinôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$: deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$: une seule racine dite « racine double » $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$: le trinôme n'a pas de racine réelle

Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
- Si $\Delta < 0$: pas de factorisation dans $\boldsymbol{R}$

Voyons deux applications de ces formules.

Exemple 1 : recherche d'une prolongée continue d'une fonction rationnelle.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - x - 15}$.

a) Déterminez le domaine de définition de f.

b) Déterminez une forme simplifiée de l'expression de f.

Solution

a) Les racines du dénominateur sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -\dfrac{5}{2}$ (vérifiez).

Nous avons donc : $\operatorname{dom} f = \mathbf{R} \,/\, \left\{3, -\dfrac{5}{2}\right\}$.

b) En factorisant numérateur et dénominateur, nous obtenons :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^2 - x - 15} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)\left(x + \frac{5}{2}\right)} = \frac{x+3}{2\left(x + \frac{5}{2}\right)} = \frac{x+3}{2x+5} \quad (\text{ si } x \neq 3).$$

Commentaires

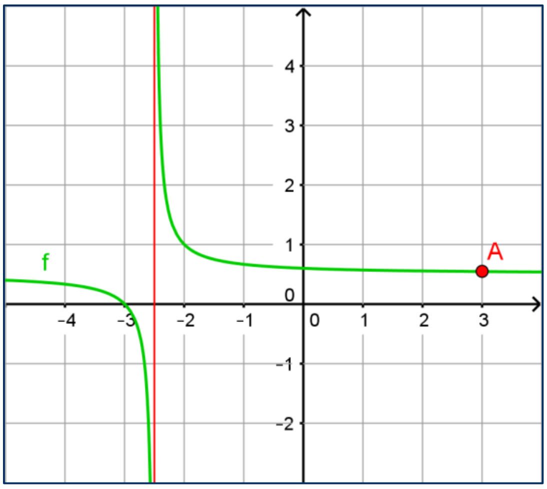
Considérons la fonction $g(x) = \dfrac{x+3}{2x+5}$. Nous avons dom $g = \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

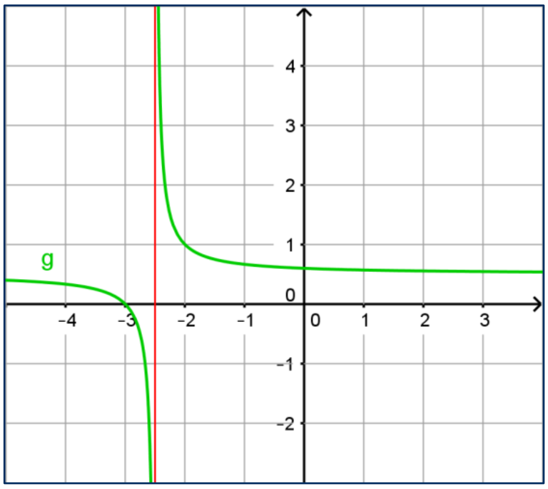
Comparons les fonctions f et g :

- pour tout réel x différent de 3 et de $-5/2$, nous avons $f(x) = g(x)$;
- pourtant, et bien que l'expression de g résulte de la simplification de celle de f , ces fonctions ne sont pas égales ; en effet, elles n'ont pas le même domaine de définition : la fonction f n'est pas définie en 3 tandis que la fonction g est bien définie en 3 ;

La fonction g est appelée prolongée de la fonction f en $x = 3$.
Comme g est continue en $x = 3$, elle est une prolongée continue de f en $x = 3$.

Voici les graphiques de f et de g .

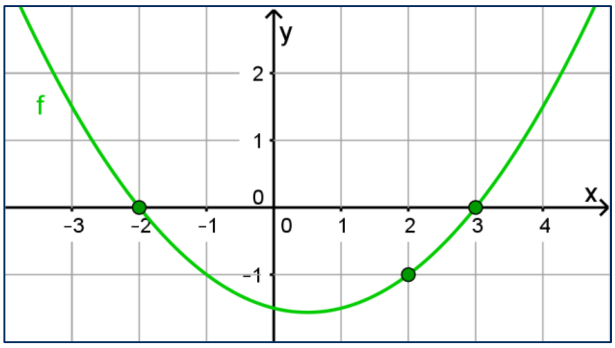




Le graphique de f est « troué » au point $A\left(3, \dfrac{6}{11}\right)$. Celui de g n'a pas cette lacune.

Exemple 2 : recherche d'une expression analytique.

Déterminez l'expression analytique de la fonction du second degré représentée ci-contre.



Solution

Le graphique nous donne les racines de cette fonction : -2 et 3 .
Dès lors, en utilisant la forme factorisée, nous pouvons écrire : $f(x) = a(x+2)(x-3)$.

Il nous reste à trouver le coefficient a . Or, nous voyons que le graphique de f comprend le point (2,-1) . Donc : $f(2) = -1 \Leftrightarrow a(2+2)(2-3) = -1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$.

Nous en concluons que : $f(x) = \dfrac{1}{4}(x+2)(x-3) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{2}$.

Exercices

1. Pour chacune des fonctions f_i suivantes, déterminez :

   a. le domaine de définition ;
   b. une expression analytique simplifiée (si possible) ;
   c. une fonction g_i prolongée continue de f_i ;
   d. le graphique de f_i parmi les six graphiques proposés.

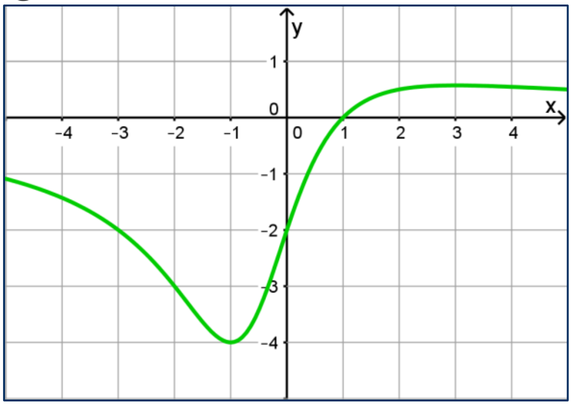
$$f_1(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-1}$$

$$f_2(x)=\frac{x-3}{2x^2-5x-3}$$

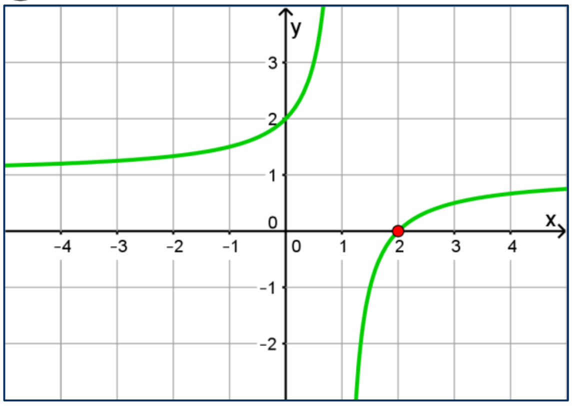
$$f_3(x)=\frac{x^2-4x+4}{-x^2+3x-2}$$

$$f_4(x)=\frac{4(x-1)}{x^2+x+2}$$

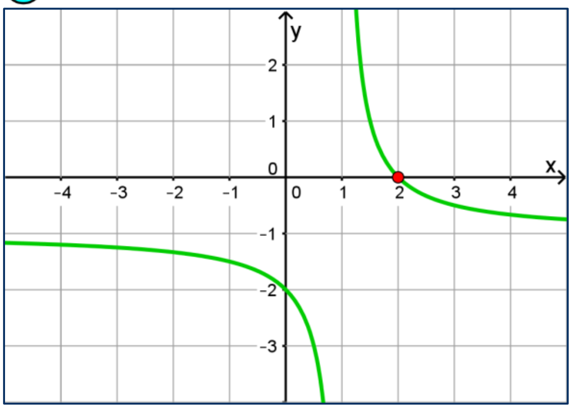
A



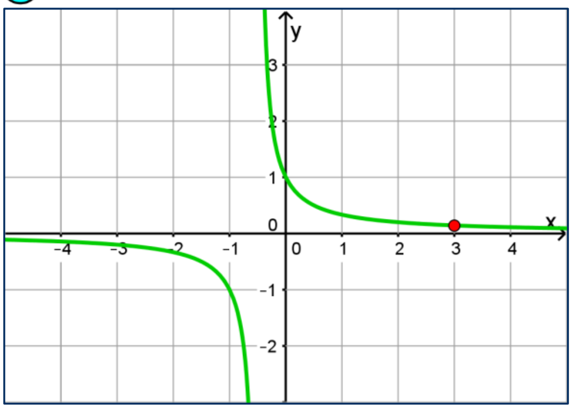
B



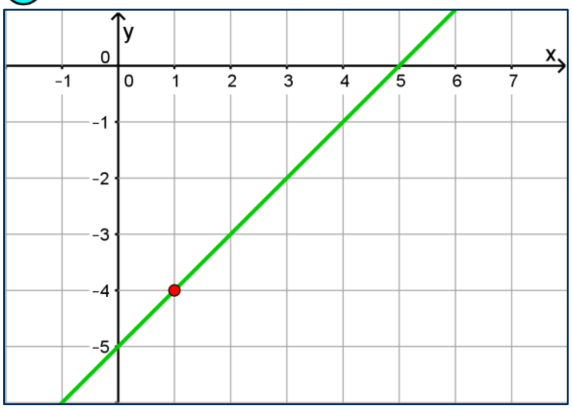
C



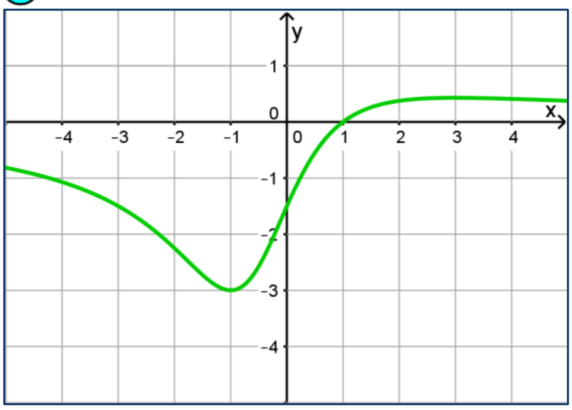
D



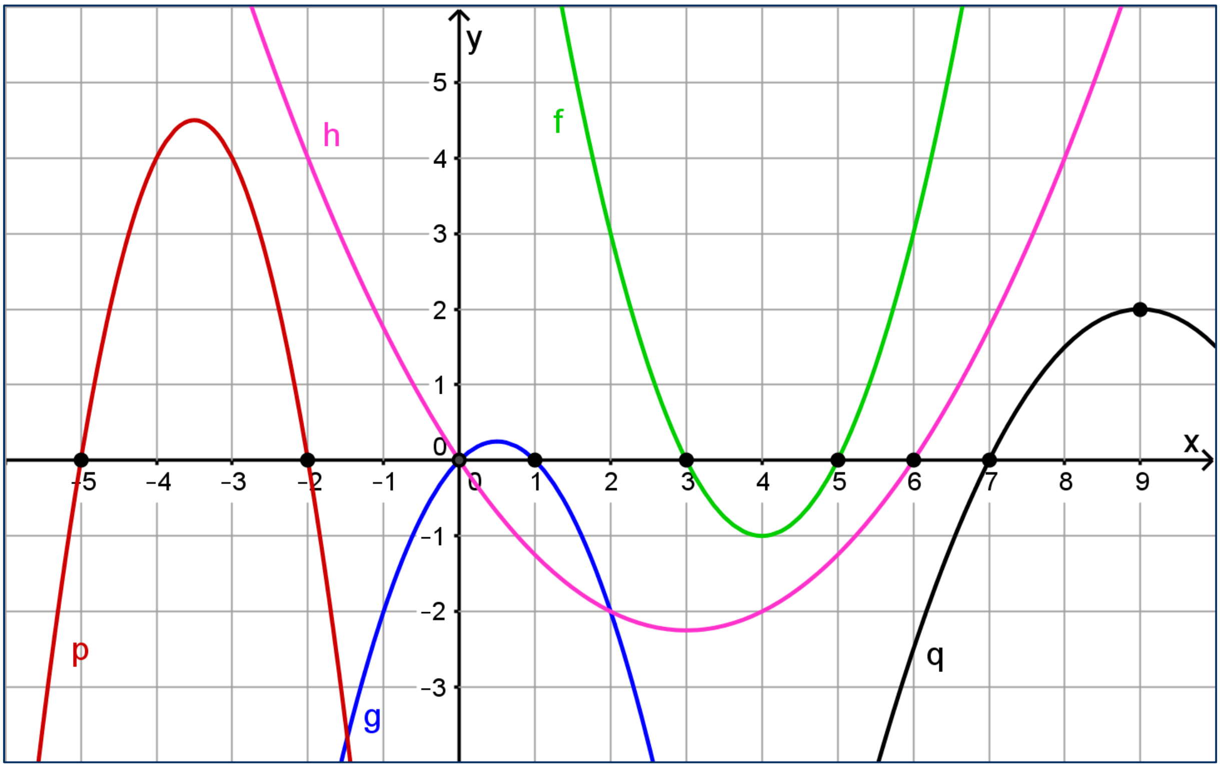
E



F



2. Déterminez une expression analytique de chacune des fonctions représentées ci-dessous.



GROUPEMENTS

Il s'agit de grouper convenablement des termes de façon à permettre une mise en évidence ou l'utilisation d'une identité remarquable.

Exemple 1 : factoriser l'expression $ax+by+ay+bx$.

Solution : $\underline{ax}+by+\underline{ay}+bx=\underline{ax}+\underline{ay}+by+bx=a(x+y)+b(y+x)=(x+y)(a+b)$

Exemple 2 : factoriser l'expression x^3-2x^2+3x-6 .

Solution : $\underline{x^3}\underline{-2x^2}+3x-6=x^2(x-2)+3(x-2)=(x-2)(x^2+3)$.

Exemple 3 : factoriser l'expression $a^2-c^2+b^2-2ab$.

Solution : $\underline{a^2}-c^2+\underline{b^2}\underline{-2ab}=\underline{a^2}\underline{-2ab}+\underline{b^2}-c^2=(a-b)^2-c^2=(a-b-c)(a-b+c)$.

Exercices

1. Factorisez les expressions suivantes en utilisant des groupements.

   a) $x^2+5xy+5y^2+xy$

   b) $2xy+4x+y^2+2$

   c) x^3-7x^2+x-7

   d) $2x^3+6x^2+x+3$

   e) $x^4-x^3+x^2-x$

   f) $3x^2+6x+x^3+8$

   g) $2x^3+3x^2-3x-2$

   h) $x^4-x^2+4x^2-4$

   i) x^4+6x^2+5

   j) x^4-3x^2+2

2. Factorisez les expressions suivantes en utilisant des groupements.

   a) $x^2-2x+1-a^2$

   b) $a^2+c^2+2ac-b^2$

   c) $x^4+4x^2+4-y^2$

   d) $6x^4+13x^3-13x-6$

   e) $a^9-a^6-a^3+8$

POLYNÔMES

GÉNÉRALITÉS

Définition : une fonction polynôme de degré n et à coefficients réels est une fonction de la forme

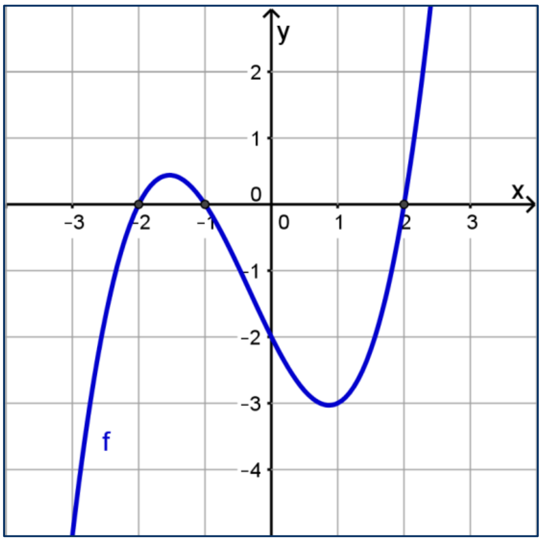
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , … , a_2 , a_1 et a_0 sont des nombres réels.

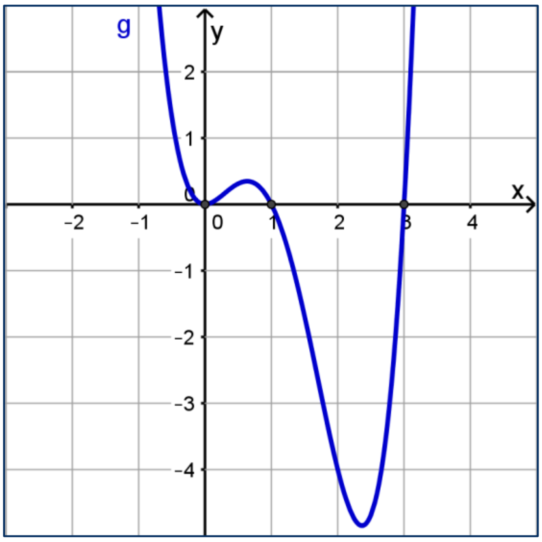
Nous connaissons déjà très bien les fonctions polynômes du premier degré (représentées par des droites) et celles du second degré (représentées par des paraboles).

Voici exemples de polynômes de degrés supérieurs à 2 .

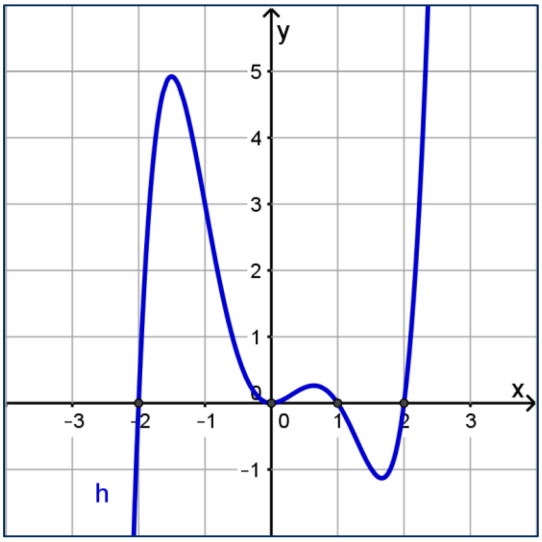
① $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 2$



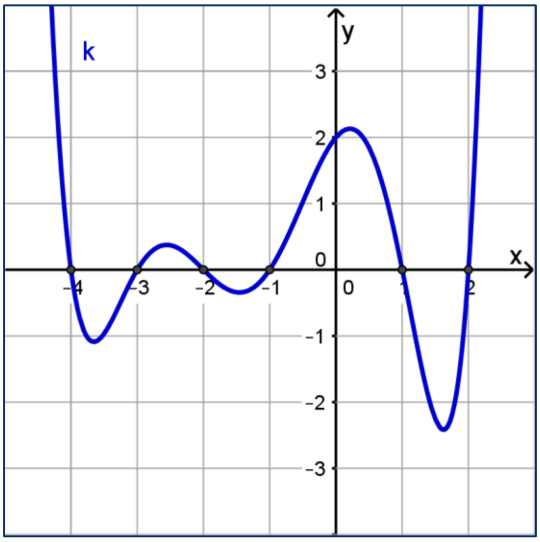
② $h(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$



③ $h(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2$



④ $k(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 7x + 12)$



Exercice

Déterminez algébriquement les racines des quatre polynômes de la page 10. Pensez aux méthodes de factorisation du paragraphe précédent.

Valeur numérique d'un polynôme

Exemple : quelle est la valeur numérique du polynôme $4x^3-5x^2+8x-3$ pour $x=-2$?

Il s'agit de l'image de - 2 par la fonction $f(x)=4x^3-5x^2+8x-3$ associée au polynôme :

$$f(-2)=4(-2)^3-5(-2)^2+8(-2)-3=-32-20-16-3=-71\ .$$

Voici maintenant une méthode astucieuse pour calculer une valeur numérique d'un polynôme.

Écriture de HORNER d'un polynôme

Reprenons le polynôme précédent et observons les transformations successives :

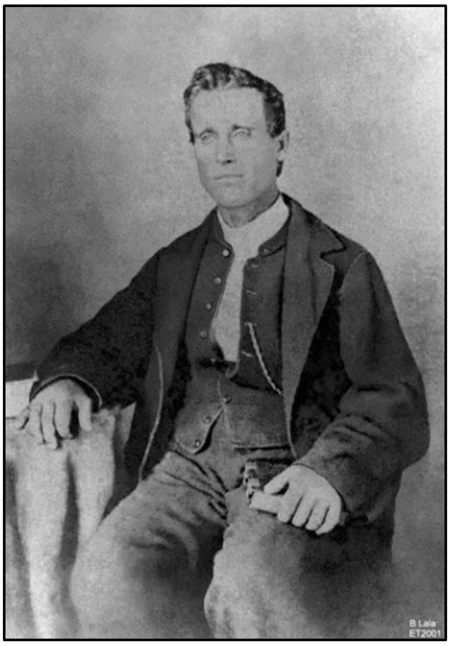
$$f(x) = 4x^3-5x^2+8x-3 = (4x^2-5x+8)x-3$$
$$= ((4x-5)x+8)x-3$$

La dernière expression est l'écriture de HORNER.

Elle s'applique bien au calcul mental d'une valeur numérique.
Par exemple : $f(-2)=((-13)(-2)+8)(-2)-3=34(-2)-3=-71$.

Cette écriture est appréciée en informatique. En effet, si l'on souhaite programmer le calcul d'une valeur numérique, cette méthode nécessite moins d'opérations et est donc plus économique en temps de calcul.

William George HORNER (1786-1837)



Mathématicien britannique d'origine irlandaise.
Étudiant à la Kingswood School de Bristol, il devient assistant professeur à l'âge de quatorze ans et professeur principal quatre ans plus tard !

La méthode de calcul de la valeur numérique d'un polynôme porte son nom, bien qu'elle fut déjà décrite par ZHŪ SHÌJIÉ (朱世杰 , 1270-1330) et utilisée par NEWTON (1643-1727).
C'est du même HORNER qu'il s'agit lorsqu'on évoque la disposition pratique pour diviser un polynôme par un binôme $(x-a)$.
Il est encore connu pour l'invention du zootrope, appareil donnant l'illusion du mouvement et ancêtre du cinéma.

Il est à noter que la photo ci-dessus, glanée sur Internet, n'est authentifiée nulle part. Certains auteurs de sites rognent d'ailleurs cette photo pour ne plus montrer ce qui pourrait être une Bible. Alors, William HORNER ou un pasteur anonyme ? Comme toujours sur Internet, esprit critique et vérifications des sources s'imposent !

Multiplicité d'une racine d'un polynôme

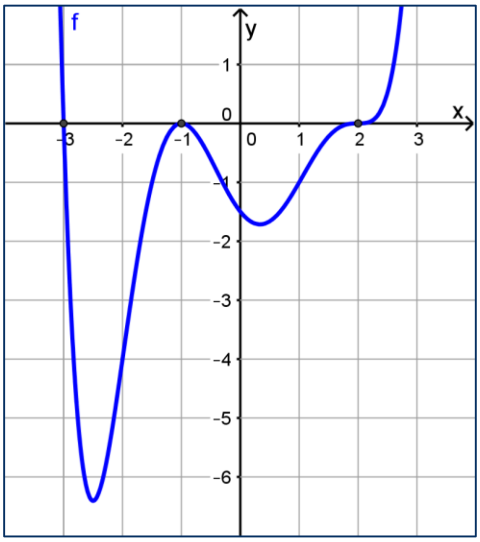
Exemple : soit la fonction $f(x)=(x-2)^3(x+1)^2(x+3)$.

Nous pouvons bien sûr l'écrire sous la forme $f(x)=(x-2)(x-2)(x-2)(x+1)(x+1)(x+3)$.

Ce polynôme admet comme racines 2 , -1 et -3 , et nous dirons que :

- le réel 2 est une racine de multiplicité 3 car le facteur $(x-2)$ apparaît trois fois ;
- le réel -1 est une racine de multiplicité 2 car le facteur $(x+1)$ apparaît deux fois ;
- le réel -3 est une racine de multiplicité 1 car le facteur $(x+3)$ n'apparaît qu'une fois.

Observons maintenant le graphique de f ci-contre.



La courbe traverse l'axe x en l'abscisse -3 .
La raison en est que le facteur $(x+3)$ est affecté d'un exposant impair et qu'il change de signe lorsque x croît au-delà de -3 .
La même observation peut se faire en l'abscisse 2 avec la même explication.

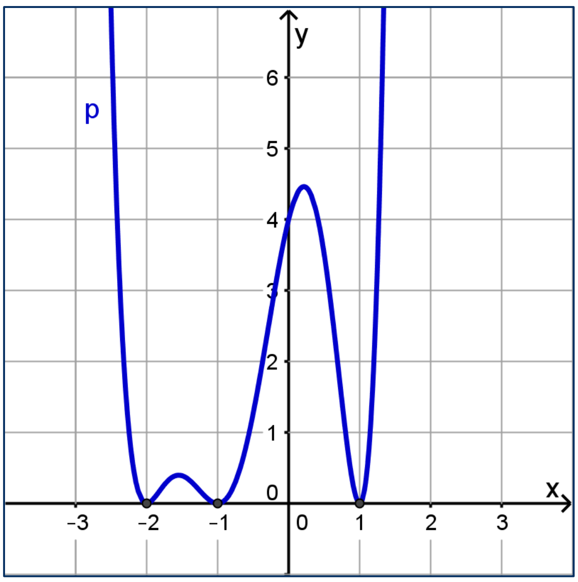
Par contre, le graphique de f ne traverse pas l'axe x en l'abscisse -1 car le facteur $(x+1)$ étant affecté d'un exposant pair, il ne change pas de signe lorsque x croît au-delà de -1 ..

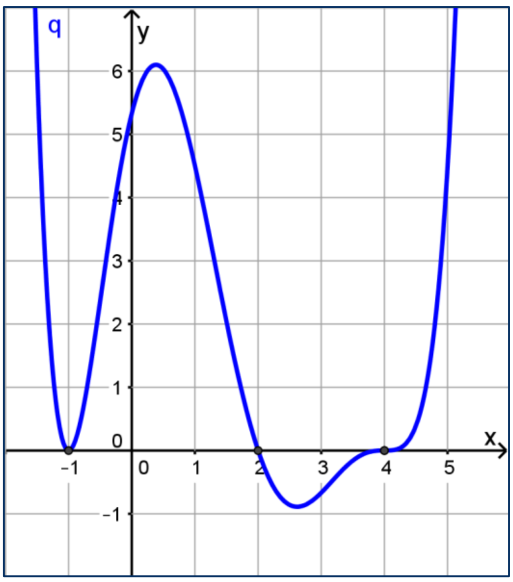
Exercice

En vous basant sur l'exemple ci-dessus, expliquez l'allure de chacun de graphiques suivants.

① $p(x)=(x+2)^2(x+1)^2(x-1)^2$

② $q(x)=\dfrac{1}{24}(x+1)^2(x-2)(x-4)^3$





Souvenir de 4*^e^ *: pourquoi « solution double » ?

Lorsque le discriminant d'une équation du second degré est égal à 0 *, votre professeur de 4*^e^ *vous a dit que l'équation admet une « solution double ».*
Par exemple, l'équation $2x^2+12x+18=0$ *, pour laquelle* $\Delta=0$ *admet comme solution* $x=-\dfrac{b}{2a}=-3$ *. Nous avons donc* $2x^2+12x+18=2(x+3)^2$.
L'expression « solution double » vient du fait que -3 *est une solution de multiplicité* 2 *.*

Exercices

1. Donnez l'écriture de HORNER de chacune des fonctions polynômes suivantes. Calculez ensuite la valeur numérique demandée.

   a) $f(x)=3x^3-5x^2+2x+5$ et $f(-2)=?$

   b) $g(x)=x^4+x^3-x^2-x+1$ et $g(-3)=?$

   c) $h(x)=4x^5-5x^3+6x$ et $h(3)=?$

   d) $p(x)=16x^5-32x^4+8x^2+1$ et $p(2)=?$

---

2. Déterminez une fonction polynôme du troisième degré qui a les racines indiquées et qui vérifie la condition donnée.

   a) -5 , 2 et 4 ; condition : $f(3)=24$

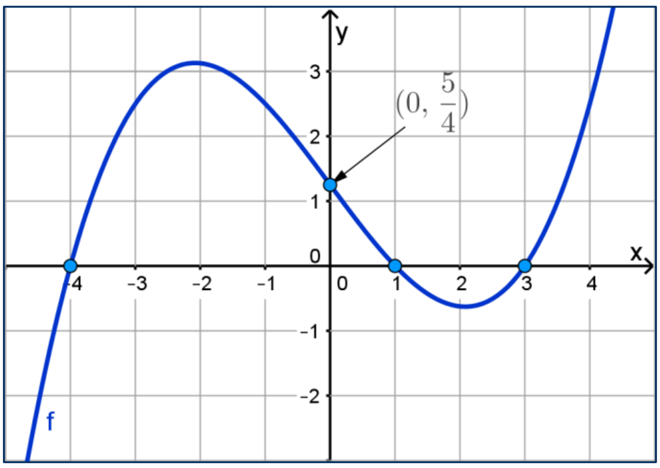
   b) -3 , -2 et 0 ; condition : $f(-4)=16$

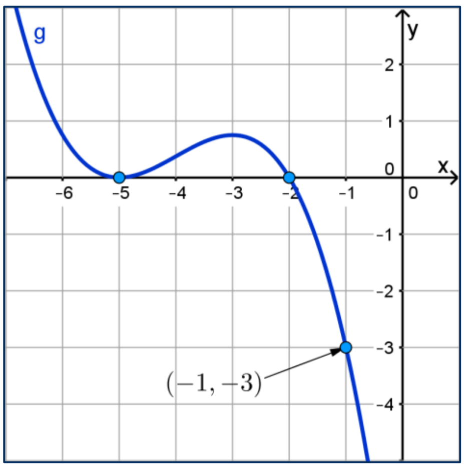
---

3. Déterminez une fonction polynôme f du quatrième degré et de coefficient dominant 1 , qui admet -5 et 2 comme racines de multiplicité 2 . Tracez l'allure générale du graphique de f .

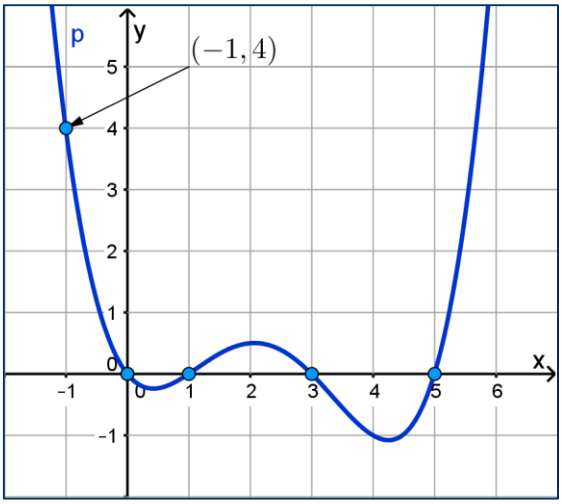
---

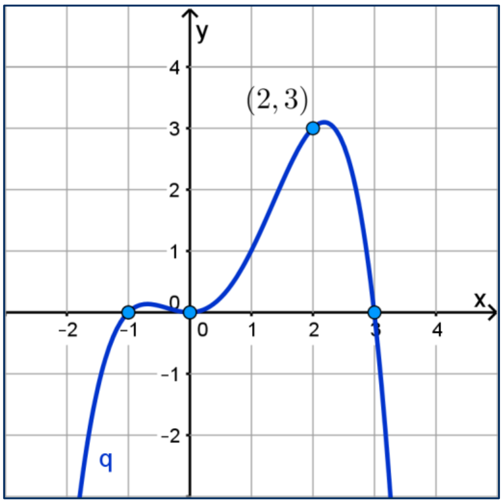
4. Déterminez une expression analytique de chacune des fonctions polynômes du troisième degré représentées ci-dessous.





5. Déterminez une expression analytique de chacune des fonctions polynômes du quatrième degré représentées ci-dessous.





DIVISION DE POLYNÔMES

Division euclidienne

Exemple : diviser le polynôme $D(x)=2x^3-5x^2-x-3$ par le polynôme $d(x)=x^2-3x+1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^3 & -5x^2 & -x & -3 & x^2-3x+1 \\ \cline{6-6}
-(& 2x^3 & -6x^2 & +2x) & & 2x+1 \\ \cline{1-4}
 & & x^2 & -3x & -3 & \\
 & -(& x^2 & -3x & +1\ ) & \\ \cline{2-5}
 & & & & -4 &
\end{array}
$$

Le polynôme $D(x)$ est appelé *dividende*, tandis que $d(x)$ est le *diviseur*. L'algorithme se termine lorsque nous arrivons à un polynôme (le reste $r(x)$) dont le degré est strictement inférieur à celui du diviseur $d(x)$. Le *quotient* $q(x)$ est alors déterminé.
Dans l'exemple ci-dessous, le quotient est $q(x)=2x+1$ et le reste est $r(x)=-4$.

Théorème de la division euclidienne des polynômes

Si $D(x)$ et $d(x)$ sont des polynômes et si $d(x)\neq 0$, alors il existe deux polynômes uniques $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$D(x)=q(x)\cdot d(x)+r(x)$$

avec soit $r(x)=0$, soit le degré de $r(x)$ strictement inférieur à celui de $d(x)$.
Le polynôme $q(x)$ est le quotient et $r(x)$ est le reste de la division de $D(x)$ par $d(x)$.

Pour notre exemple, ce théorème nous permet d'écrire :

$$2x^3-5x^2-x-3=(2x+1)(x^2-3x+1)-4\ .$$

Division d'un polynôme par un binôme du type $(x-a)$

Théorème du reste

Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par un binôme $(x-a)$ est égal à $p(a)$.

Exemple : soit le polynôme $p(x)=5x^3-3x^2+2x-7$.

Le reste de la division de $p(x)$ par $(x-2)$ est égal à $p(2)=25$ (vérifiez).
Le reste de la division de $p(x)$ par $(x+3)$ est égal à $p(-3)=-175$ (vérifiez).

Voici une conséquence directe du théorème du reste.

Critère de divisibilité d'un polynôme par $(x-a)$

Un polynôme $p(x)$ est divisible par $(x-a)$ si et seulement si $p(a)=0$.

Méthode de HORNER

Il s'agit d'une disposition pratique pour effectuer la division d'un polynôme par $(x-a)$.

Exemple : diviser le polynôme $p(x)=5x^3-3x^2+2x-7$ par $(x+3)$.

Dans ce cas, nous avons a = - 3 .

D'abord, écrivons les coefficients de $p(x)$ dans l'ordre des puissances décroissantes de x (ligne jaune). Si une puissance n'apparaît pas, le coefficient 0 doit être indiqué.
Ensuite, indiquons la valeur de a (case bleue). Le premier coefficient de $p(x)$ est recopié dans la ligne du bas, et il est multiplié par a . Le résultat (-15) est reporté en-dessous du deuxième coefficient de $p(x)$ et ajouté à celui-ci. Le résultat (-18) est noté dans la ligne du bas, multiplié par a , et ainsi de suite.

	5	-3	2	-7
		+	+	+
- 3	↓	-15	54	-168
	5	-18	56	-175

Les nombres de la ligne verte sont les coefficients du polynôme quotient, dans l'ordre des puissances décroissantes de x bien sûr. Le nombre dans la case rose est le reste de la division.
Le polynôme quotient est donc $q(x)=5x^2-18x+56$ et le reste $r=-175$.

Nous pouvons enfin en déduire que : $p(x)=(5x^2-18x+56)(x+3)-175$.

Exercices

1. Effectuez les divisions suivantes où $D(x)$ est le dividende et $d(x)$ le diviseur. Précisez le quotient et le reste.

   a) $D(x)=2x^4-x^3-3x^2+7x-12$ et $d(x)=x^2-3$

   b) $D(x)=6x^3+2x-4$ et $d(x)=2x^2+1$

   c) $D(x)=9x+4$ et $d(x)=3x-1$

   d) $D(x)=7x^2+3x-10$ et $d(x)=x^2-x-10$

---

2. Utilisez la méthode de HORNER pour effectuer la division du premier polynôme par le second, du type $(x-a)$.

   a) $2x^3-3x^2+4x-5$ et $x-2$

   b) $3x^3-4x^2-x+8$ et $x+4$

   c) $3x^5+6x^2+7$ et $x+2$

   d) $4x^4-5x^2+1$ et $x-\frac{1}{2}$

---

3. Soit le polynôme $p(x)=7x^3-9x^2+5x-20$. Utilisez le théorème du reste pour calculer les valeurs numériques $p(3)$ et $p(-5)$.

---

4. Déterminez les valeurs du paramètre k pour que le polynôme $p(x)=k^2x^3+x^2-2x-16$ soit divisible par $(x-2)$.

---

5. Déterminez les valeurs du paramètre m pour que le reste de la division du polynôme $f(x)=m^2x^3-mx^2-10x$ par le binôme $(x+3)$ soit égal à -6.

---

6. Dans chacun des cas suivants, déterminez les valeurs des paramètres a et b afin que le polynôme $p(x)$ soit divisible à la fois par $d_1(x)$ et $d_2(x)$.

   a) $p(x)=ax^4+bx^3-8x^2-4x+5$; $d_1(x)=x-1$ et $d_2(x)=x+1$

   b) $p(x)=ax^4+bx^3+ax^2-bx-2$; $d_1(x)=x+1$ et $d_2(x)=x+2$

---

7. Factorisez les polynômes suivants, une des racines étant donnée.

   a) $f(x)=3x^4+8x^3-2x^2-10x+4$; racine : - 2

   b) $f(x)=4x^3-9x^2-8x-3$; racine : 3

   c) $f(x)=4x^3-6x^2+8x-3$; racine : ½

   d) $f(x)=27x^4-9x^3+3x^2+6x+1$; racine : - 1/3 /

8. Factorisez les polynômes suivants.

a) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

b) $p(x) = x^3 - 7x - 6$

c) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

d) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 6$

---

9. Simplifiez les fractions suivantes.

a) $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 4x + 1}$ b) $\dfrac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$

---

10. a) Les restes des divisions d'un certain polynôme $p(x)$ par $(x-1)$ et $(x-2)$ sont respectivement 2 et 6. Calculez le reste de la division de $p(x)$ par $(x-1)(x-2)$.

b) Les restes des divisions d'un certain polynôme $p(x)$ par $(x+1)$ et $(x-1)$ sont respectivement 3 et - 1. Calculez le reste de la division de $p(x)$ par (x^2-1).

c) Généralisation : les restes des divisions d'un certain polynôme $p(x)$ par $(x-\alpha)$ et $(x-\beta)$ sont respectivement r_1 et r_2 .
Calculez le reste de la division de $p(x)$ par $(x-\alpha)(x-\beta)$.

---

1. Quel que soit le réel $x \neq -1$, la fraction $\dfrac{1+x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$ est égale à

(A) $\dfrac{1}{2x(1+x)}$ (B) $\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ (C) $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ (D) $\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$

---

2. Si $\dfrac{(2x+3)^6}{(x+2)^5} = \dfrac{a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_6}{b_0x^5 + b_1x^4 + \ldots + b_5}$ pour tout réel $x \neq -2$,

alors $\dfrac{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6}{-b_0 + b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5}$ est égale à

(A) $\dfrac{6}{5}$ (B) 0 (C) $\dfrac{3^6}{2^5}$ (D) 1

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

GÉNÉRALITÉS

Une équation du premier degré à deux inconnues x et y est une équation de la forme

$$ax+by+c=0$$

où a , b et c sont des coefficients réels.

Exemple

Soit l'équation $x-2y+1=0$.
Pour trouver des solutions de cette équation, il faut donner une valeur à une des inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue.

Par exemple, si $x=0$, alors $y=\frac{1}{2}$, et le couple $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est solution de l'équation.

En procédant de cette façon, on peut trouver une multitude de couples solutions (vérifiez) :

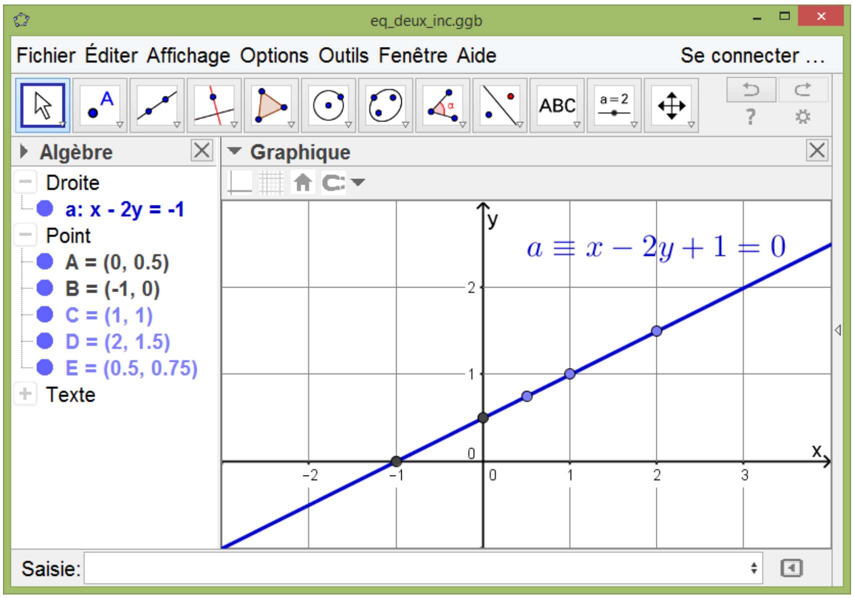
$$(-1,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ \left(2,\frac{3}{2}\right)\ ,\ \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\ \text{, etc.}$$

L'ensemble des solutions de cette équation peut être défini en compréhension :

$$S=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| (x\in R)\wedge\left(y=\frac{x+1}{2}\right)\right\} .$$

Cette écriture signifie que S est l'ensemble des couples de réels, où x est un nombre réel quelconque, et où y est obligatoirement égal à $y=\frac{x+1}{2}$.

Il y a une infinité de couples solutions, et ils correspondent aux coordonnées dans le plan des points de la droite a d'équation $y=\frac{x+1}{2}$ ($a\equiv y=\frac{x+1}{2}$ ou $a\equiv x-2y+1=0$).



Travail dirigé : discussion de l'équation du premier degré à deux inconnues

Reproduisez le tableau ci-dessous sur une feuille A3. Complétez-le en donnant pour chaque cas l'ensemble des solutions et l'interprétation graphique. Illustrez chaque cas par un exemple.

Discussion de l'équation $ax+by+c=0$							
$a\neq 0$				$a=0$			
$b\neq 0$		$b=0$		$b\neq 0$		$b=0$	
$c\neq 0$	$c=0$	$c\neq 0$	$c=0$	$c\neq 0$	$c=0$	$c\neq 0$	$c=0$

Exercices

1. a) Construisez les droites $d_1 \equiv \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ et $d_2 \equiv \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$.
Précisez leurs points d'intersection avec les axes.

b) Généralisez : quels sont les points d'intersection avec les axes d'une droite $d \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (a , b $\in \mathbf{R}_0$).

---

2. Représentez dans le plan $\mathbf{R}^2$ les solutions des équations suivantes.

a) $xy=0$

b) $4x^2-y^2=0$

c) $(y-2)^2=(2x+1)^2$

d) $(x+3y+1)(x-2)=0$

---

3. Construire les droites $d_1 \equiv 3x-2y+1=0$ et $d_2 \equiv x+y-3=0$.

a) Calculer les coordonnées du point I commun à d_1 et d_2 .

b) Démontrez que l'équation $3x-2y+1+k(x+y-3)=0$ est celle d'une droite qui comprend le point I .

c) Déterminez une équation de la droite qui comprend I et le point $A(3,-1)$.

---

4. Représentez dans le plan $\mathbf{R}^2$ les solutions des équations suivantes.

a) $|x|-|y|=0$

b) $|x+y|=1$

c) $|x|+|y|=2$

d) $x\cdot|y|=1$

Exemple 1

Résoudre le système $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$.

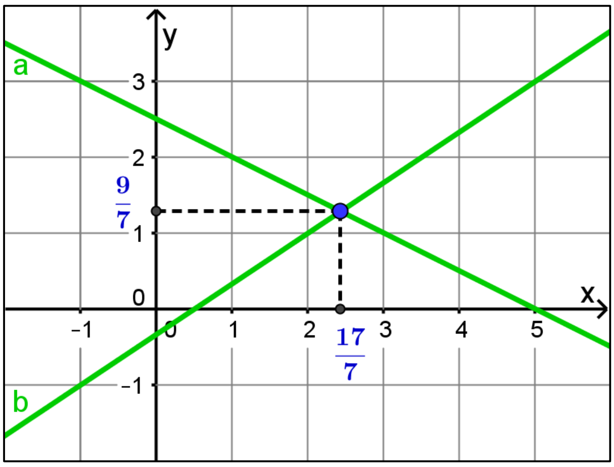
Il s'agit de trouver un couple de réels qui soit simultanément solution des deux équations du système. Les méthodes de substitution ou d'addition vous étant bien connues, vous vérifierez aisément que l'ensemble des solutions du système est constitué du seul couple $\left(\frac{17}{7},\frac{9}{7}\right)$.

Nous pouvons écrire

$$S=\left\{\left(\frac{17}{7},\frac{9}{7}\right)\right\}\approx\{(2.43,1.29)\}.$$

Un système à solution unique est aussi appelé *système de* C*RAMER*.

Le couple solution correspond aux coordonnées du point d'intersection des droites $a\equiv x+2y=5$ et $b\equiv 2x-3y=1$.



Exemple 2

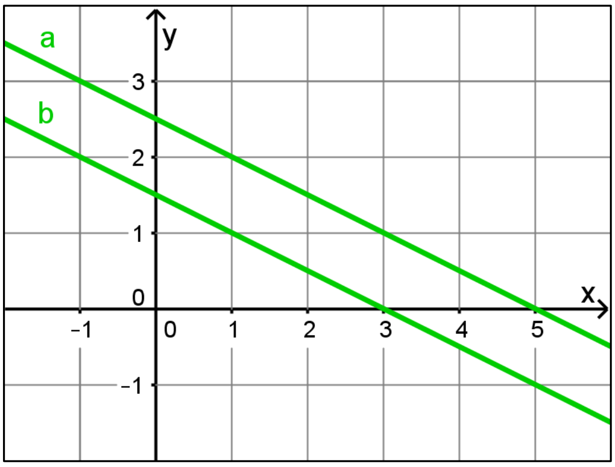
Résoudre le système $\begin{cases} x+2y=5 & (1) \\ 2x+4y=6 & (2) \end{cases}$.

Nous observons que les coefficients de x et de y dans l'équation (1) sont proportionnels aux coefficients de x et de y dans l'équation (2), mais que ce n'est pas le cas des termes indépendants. Ces équations sont donc *incompatibles*.
Une autre façon de s'en rendre compte est de remplacer l'équation (1) par l'équation équivalente $2x+4y=10$, qui contredit évidemment l'équation (2).

Il n'existe aucun couple (x,y) satisfaisant simultanément aux deux équations.
Le système est *impossible*. Il n'a pas de solution. $S=\varnothing$.

D'un point de vue graphique, cela signifie que les droites $a\equiv x+2y=5$ et $b\equiv 2x+4y=6$ n'ont aucun point commun.

Elles sont en effet parallèles (de pente - ½) et disjointes, ainsi que le montre le graphique ci-contre.



Exemple 3

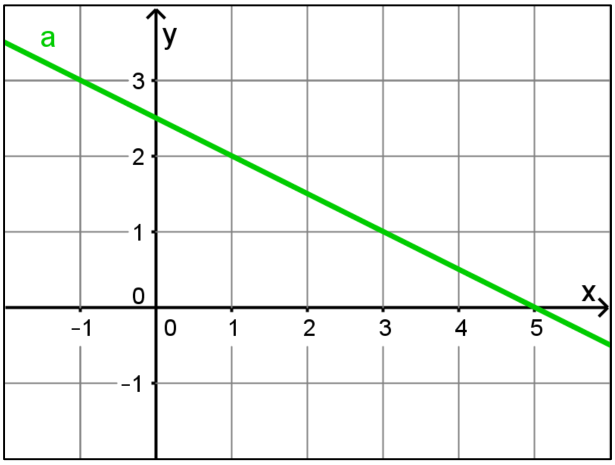
Résoudre le système $\begin{cases} x+2y=5 & (1) \\ 3x+6y=15 & (2) \end{cases}$.

Cette fois, les équations (1) et (2) sont équivalentes. Le système est donc lui-même équivalent à la seule équation $x+2y=5$.

Le système est *indéterminé*. Il possède une infinité de solutions.
Pour trouver des couples solutions, on donne des valeurs à x et on calcule les valeurs correspondantes de y (ou inversement).

L'ensemble des solutions est celui de l'équation $x+2y=5$:

$$S=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| (x\in R)\wedge\left(y=\frac{5-x}{2}\right)\right\}.$$



Exercices

1. Résolvez les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 7x-3y=54 \\ -3x+5y=-38 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x-6y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+\frac{1}{2}y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+2y=1 \\ x+6y=3 \end{cases}$

---

2. Résolvez le système $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-2 \\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y}=1 \end{cases}$. <u>Indication</u> : posez $u=\frac{1}{x}$ et $v=\frac{1}{y}$.

---

3. Soit le système $\begin{cases} 2\lambda x+\mu y=5 \\ x+\lambda y=\mu \end{cases}$ d'inconnues x et y (λ et μ sont des paramètres réels).
Déterminez les valeurs de λ et μ pour que le système admette comme solution unique le couple $(-3{,}1)$.

---

4. Déterminez la valeur du paramètre k pour que le système $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+ky=2 \end{cases}$, d'inconnues x et y soit impossible.

5. Déterminez la valeur du paramètre m pour que le système $\begin{cases} 2x + y = m \\ -x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ d'inconnues x et y soit indéterminé.

---

6. Résolvez les systèmes suivants algébriquement et graphiquement.

a) $\begin{cases} xy = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 = y \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 4 \end{cases}$

---

7. Le prix d'entrée pour un spectacle dans une école était de 3 euros pour les élèves et de 4,5 euros pour les autres personnes. Si 450 billets ont été vendus pour une recette de 1555,50 euros, combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

---

8. Un chimiste dispose de deux grandes bouteilles d'acide chlorhydrique (HCl) , l'une contenant une solution à 50% et l'autre une solution à 80% . Quelle quantité doit-il prélever dans chaque bouteille pour obtenir 100 millilitres d'une solution à 68% ?

---

9. Un fermier prépare un mélange d'avoine et de blé pour le bétail. Il sait que 30 grammes d'avoine apportent 4 grammes de protéines et 18 grammes d'hydrates de carbone, et que 30 grammes de blé fournissent 3 grammes de protéines et 24 grammes d'hydrates de carbone. Quelle quantité (en grammes) de chaque céréale faudrait-il employer pour satisfaire à des besoins nutritionnels de 200 grammes de protéines et 1320 grammes d'hydrates de carbone pour chaque ration ?

---

10. Un avion, volant avec un vent arrière, parcourt 1920 kilomètres en 2 heures. Le trajet de retour, effectué contre le vent, prend $2\frac{1}{2}$ heures. Calculez la vitesse de croisière de l'avion et la vitesse du vent, ces deux vitesses étant supposées constantes.

Méthode de CRAMER

Considérons le système $\begin{cases} ax+by=k & (1) \\ cx+dy=l & (2) \end{cases}$.

Il admet comme solution $\begin{cases} x=\dfrac{kd-lb}{ad-cb} & (3) \\ \\ y=\dfrac{al-ck}{ad-cb} & (4) \end{cases}$, pour autant que $ad-cb\neq 0$ (exercice).

Une manière bien pratique d'écrire cette solution est d'utiliser des *déterminants*.
Pour le moment, contentons-nous de définir un déterminant d'ordre 2 : il s'agit d'un nombre réel noté $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ et dont la valeur est $ps-rq$.

Par exemple : $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=7\cdot 5-(-3)\cdot 2=35+6=41$.

Avec des déterminants, les formules (3) et (4) s'écrivent

$$x=\frac{\begin{vmatrix} k & b \\ l & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & k \\ c & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad (ad-cb\neq 0)$$

Sous cette forme, elles sont très faciles à retenir.
En effet, au dénominateur, nous avons le *déterminant du système*, c'est-à-dire le déterminant formé par les coefficients des inconnues x et y (respectez l'ordre).
Ensuite, au numérateur de la formule donnant x, nous avons le déterminant du système dans lequel les coefficients de x ont été remplacés par les termes indépendants k et l.
D'une manière analogue, pour trouver y, il faut remplacer les coefficients de y par les termes indépendants.

Cette méthode de résolution utilisant des déterminants est appelée *méthode de CRAMER*.

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 3x-y=23 & (1) \\ 2x+3y=-3 & (2) \end{cases}$ par la méthode de CRAMER.

Calculons d'abord le déterminant du système et ensuite ceux spécifiques à x et à y :

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=9+2=11 \quad , \quad D_x=\begin{vmatrix} 23 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=69-3=66 \quad \text{et} \quad D_y=\begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-9-46=-55.$$

Nous trouvons ainsi : $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{66}{11}=6$ et $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-55}{11}=-5$.

Le système admet comme solution unique le couple $(6,-5)$.

Remarque

- Si le déterminant du système est non nul, alors le système admet une solution unique.
- Si le déterminant du système est nul, alors le système est impossible ou indéterminé.

Exercice

Résolvez les systèmes suivants à l'aide de la méthode de CRAMER.
Si le déterminant du système est nul, précisez si le système est impossible ou indéterminé (dans ce dernier cas, définissez en compréhension l'ensemble des solutions).

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x-y=0 \\ 4x+y=-10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-2y=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y=5 \\ -2x+3y=-8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+2y=1 \\ -x-6y=-3 \end{cases}$

Gabriel CRAMER (1704-1752)

Mathématicien suisse. CRAMER enseigna à Genève, où il partagea avec CALANDRINI la chaire de mathématiques, arrangement qui lui permit de voyager et de rencontrer les mathématiciens contemporains (les BERNOULLI, HALLEY, STIRLING, EULER, D'ALEMBERT) avec qui il entretint une importante correspondance.

Il apporta une grande innovation en enseignant en français et non pas, comme il était de tradition à l'époque, en latin.

Ses travaux portent sur les courbes algébriques et les probabilités.
Son principal ouvrage est *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750).
On y trouve la méthode de résolution des systèmes linéaires qui a rendu son nom célèbre chez les étudiants. On y trouve également la démonstration du théorème suivant : toute courbe algébrique de degré n est déterminée par $n(n+3)/2$ points au plus.

Source : http://publimath.irem.univ-mrs.fr/glossaire/CR002.htm

Exemple 1 : dans le plan, représentez l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'inéquation

$$x+2y-4\geq 0 \quad (1).$$

Solution

Il s'agit de trouver tous les couples (x,y) qui satisfont à cette inégalité.
Pour trouver des couples solutions, on peut donner une valeur à x et ensuite donner une valeur à y telle que $y\geq -\frac{1}{2}x+2$ (inéquation équivalente à (1)).
Par exemple, si nous fixons $x=2$, alors le couple $(2{,}1)$ est solution, le couple $(2{,}3)$ également, mais les couples $(2{,}0)$ et $(2{,}-2)$ ne le sont pas.

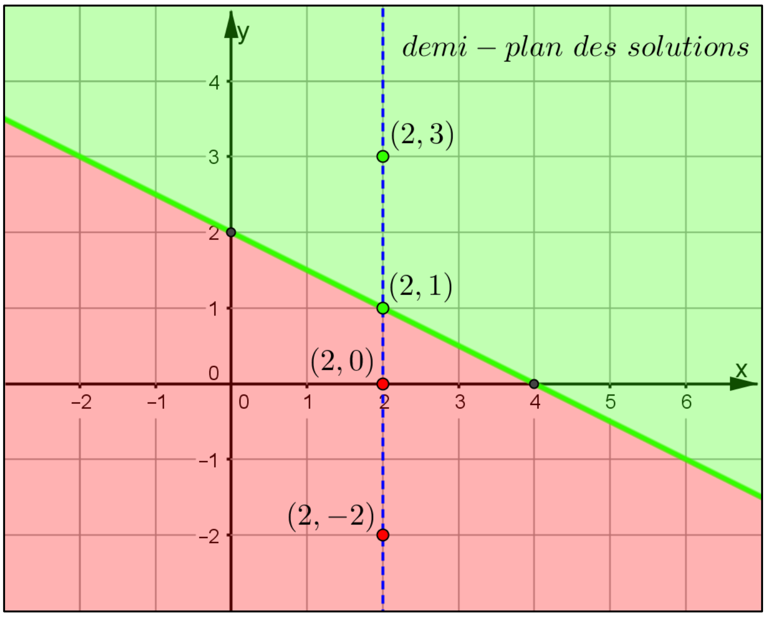
L'ensemble des solutions de (1) est donc : $S=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| (x\in R)\wedge\left(y\geq -\frac{1}{2}x+2\right)\right\}$.

La représentation graphique des solutions est la partie du plan dont les points ont des coordonnées qui satisfont à l'inéquation.

Il s'agit d'un demi-plan bordé par la droite d'équation

$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

et incluant celle-ci.



Exemple 2 : dans le plan, représentez l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'inéquation

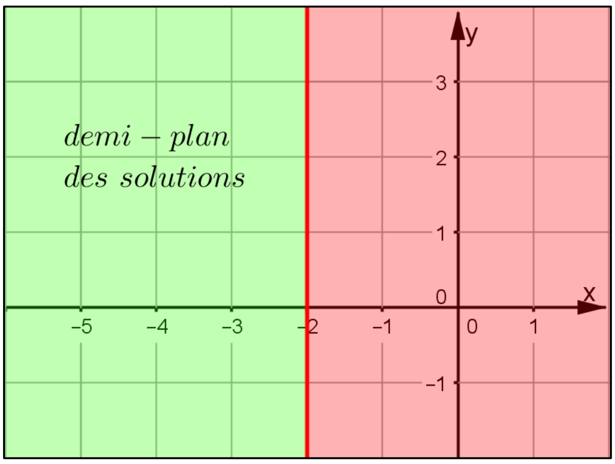
$$3x+6<0 \quad (2).$$

Solution

L'inéquation est équivalente à $x<-2$.

Graphiquement, l'ensemble des solutions de (2) est le demi-plan comprenant tous les points dont l'abscisse est strictement inférieure à 2 .

Ce demi-plan est bordé par la droite $x=-2$ mais ne la contient pas.



Méthode pratique

Pour représenter dans le plan les solutions d'une inéquation du premier degré à deux inconnues, par exemple $ax+by+c<0$:

1. représentez la droite d'équation $ax+by+c=0$ (en rouge si l'inégalité est stricte, en vert sinon) ;
2. choisissez un « point test » ailleurs que sur la droite (le meilleur choix est l'origine si elle ne se trouve pas sur la droite) et remplacez ses coordonnées dans l'inéquation ;
3. si les coordonnées du point test sont solution de l'inéquation, alors le demi-plan des solutions est celui qui contient le point test ; sinon, c'est l'autre demi-plan qui est l'ensemble des solutions.

Exercice

Dans le plan, représentez l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient les inéquations suivantes.

a) $2x-y-3<0$

b) $3x-4y-12\geq 0$

c) $2x+3y\leq 6$

d) $x-2y>0$

e) $2x-5\geq 0$

f) $y-3<0$

g) $-2\leq x\leq 1$

h) $1<y\leq 3$

i) $(x-1)(y+3)<0$

j) $(2x+1)(x+y)\geq 0$

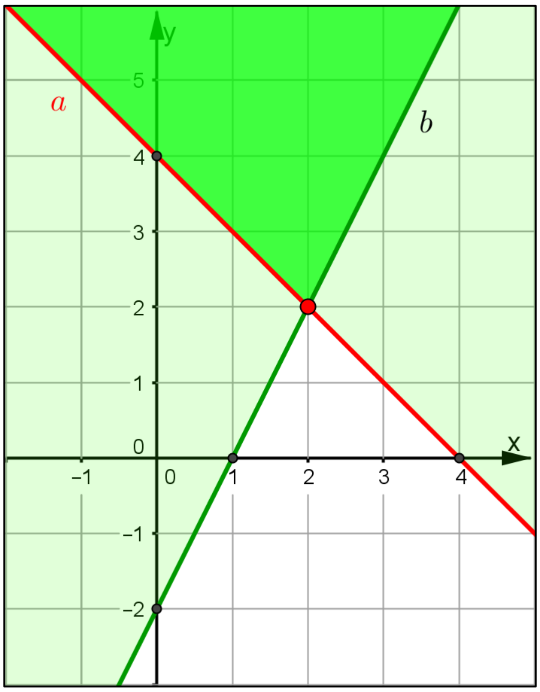
SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Exemple : résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} x+y-4>0 & (1) \\ 2x-y-2\leq 0 & (2) \end{cases}.$$

Il suffit de résoudre graphiquement chacune des deux inéquations. L'intersection des deux-demi plans ainsi obtenus est l'ensemble des solutions du système (région en vert intense sur le graphique ci-contre).

Notons que le point d'intersection des droites a et b doit être exclu. En effet, ses coordonnées ne sont pas solution de (2).



Exercices

1. Résolvez graphiquement les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x-y+1>0 \\ y-3\leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y-5\leq 0 \\ y-2x+3\geq 0 \end{cases}$

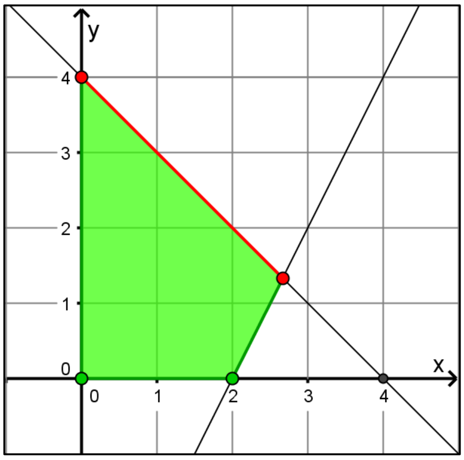
c) $\begin{cases} 2x+y-4\geq 0 \\ 3y<2(x+2) \\ y+4\geq 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy<0 \\ x-1\leq 0 \end{cases}$

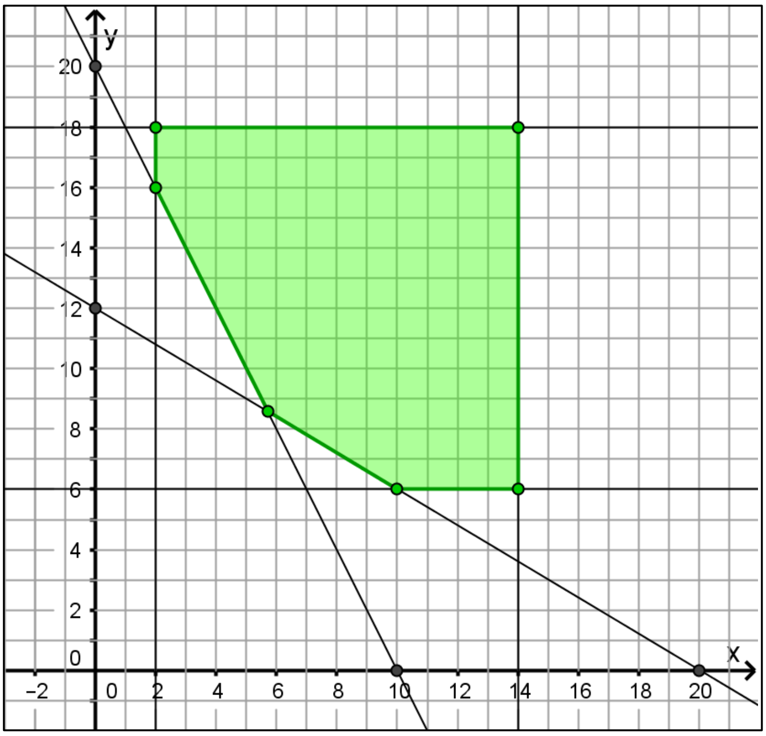
e) $\begin{cases} xy\geq 0 \\ 2x-3y+6>0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+3y\leq 18 \\ 0\leq x<6 \\ 0\leq y<4 \end{cases}$

2. Écrivez un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est le polygone vert représenté ci-contre, dont un côté et deux sommets sont exclus (en rouge),



3. Écrivez un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est le polygone vert, côtés inclus, représenté ci-contre.



Problèmes menant à la résolution d'un système d'inéquations

1. **Achat de matériel sportif**

   L'entraîneur d'une équipe de base-ball aimerait acheter des battes et des balles coûtant respectivement 24 euros et 6 euros chacune. Au moins cinq battes et dix balles sont nécessaires, et le coût total ne doit pas dépasser 360 euros. Etablir un système d'inéquations qui décrive toutes les possibilités et le résoudre graphiquement.

---

2. **Gestion de stocks (1)**

   Un magasin vend deux marques de téléviseurs. La demande de la clientèle indique qu'il est nécessaire de stocker au moins deux fois plus de téléviseurs de la marque A que de la marque B. Il faut également avoir à disposition au moins dix téléviseurs de la marque B. Il y a de la place pour cent téléviseurs au maximum dans le magasin. Etablir un système d'inéquations qui décrive toutes les possibilités de stockage des deux marques et le résoudre graphiquement.

---

3. **Gestion de stocks (2)**

   Le responsable d'une papeterie stocke deux types de blocs-notes, le premier au prix de 85 eurocents et le second au prix de 55 eurocents. Le montant maximum pouvant être dépensé est de 600 euros et il désire disposer d'un stock d'au moins 300 blocs-notes à 85 eurocents et 400 blocs-notes à 55 eurocents. Etablir un système d'inéquations qui décrive toutes les possibilités de stocker les deux types de blocs-notes et le résoudre graphiquement.

---

4. **Prix de billets**

   Un auditorium contient 600 places assises. Pour une prochaine manifestation, les billets seront vendus à 16 euros pour certains sièges et à 10 euros pour d'autres. Il faudra vendre au moins 225 billets à 10 euros et on veut que les ventes rapportent au moins 6000 euros en tout. Etablir un système d'inéquations qui décrive toutes les possibilités des nombres de billets de chaque sorte qu'il faut vendre et le résoudre graphiquement.

---

5. **Stratégie d'investissement**

   Une personne ayant 15000 euros à investir décide de placer au moins 2000 euros dans un investissement à haut risque et à rendement élevé et au moins trois fois cette somme dans un investissement à faible risque et à bas rendement. Etablir un système d'inéquations qui décrive toutes les possibilités de placement de la somme dans ces deux investissements et le résoudre graphiquement.

PROGRAMMATION LINÉAIRE

Dans de nombreuses situations concrètes, la description de la réalité par un modèle mathématique nécessite souvent l'emploi simultané de plusieurs variables, *soumises à un ensemble de conditions appelées* contraintes.
Nous allons être confrontés à cela au travers de problèmes de programmation linéaire.
En gros, il s'agit de problèmes correspondant à des situations où l'on cherche le maximum ou le minimum d'une fonction linéaire de plusieurs variables (la fonction objectif*), les variables étant soumises à des contraintes sous forme d'inéquations linéaires.*

Dans la réalité politique, industrielle ou économique, les problèmes de programmation linéaire sont courants et impliquent parfois des milliers de variables et de contraintes.
Le développement à grande échelle de cette technique de gestion n'est devenu possible qu'avec la croissance rapide des performances des ordinateurs.

Exemple

Un diététicien dispose de deux aliments X et Y qu'il peut mélanger.
Il sait que 100 grammes d'aliment X apporte 7 doses de vitamine A, 2 doses de vitamine B et 8 doses de vitamine C. Il sait aussi que pour 100 grammes d'aliment Y, l'apport est de 2 doses de vitamine A, 1 dose de vitamine B et 12 doses de vitamine C.
Le diététicien veut composer un mélange des aliments X et Y pour que le consommateur absorbe au moins 14 doses de vitamine A, 6 de vitamine B et 36 de vitamine C.
Si les prix pour 100 grammes des aliments X et Y sont respectivement de 30 euros et de 10 euros, déterminez les proportions du mélange pour que le prix de revient soit minimum.

Solution

Définissons d'abord les variables du problème :

soit x le nombre de portions de 100 grammes d'aliment X ;
soit y le nombre de portions de 100 grammes d'aliment Y.

Il est évident que x et y sont des nombres réels positifs, mais il faut en tenir compte car ce sont les premières contraintes sur les variables.

Intéressons-nous maintenant aux apports en vitamines. Si le mélange contient

x portions d'aliment X, celles-ci apporteront $7x$ doses de vitamine A ;
y portions d'aliment Y, celles-ci apporteront $2y$ doses de vitamine A ;

L'apport en vitamines A sera donc de $7x + 2y$. Comme le mélange doit contenir au moins 14 doses de vitamine A, une des contraintes du problème se traduit par l'inéquation

$$7x + 2y \geq 14 \ .$$

En raisonnant de la même façon pour les vitamines B et C, nous aboutissons à deux nouvelles inéquations : $2x + y \geq 6$ et $8x + 12y \geq 36$ (vérifiez).

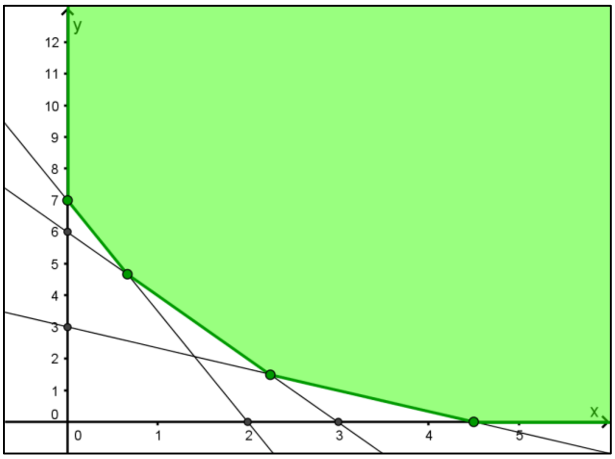
Rassemblant toutes les contraintes sur les variables, nous obtenons le système d'inéquations suivant (la dernière inéquation a été simplifiée) :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 7x + 2y \geq 14 \\ 2x + y \geq 6 \\ 2x + 3y \geq 9 \end{cases}$$

Nous avons appris à résoudre ce genre de système.

Dans le cas présent, l'ensemble des solutions correspond à la région du plan coloriée en vert dans le graphique ci-contre (vérifiez).

Les échelles ont été adaptées pour une meilleure lisibilité.



Voyons maintenant la *fonction objectif* : il s'agit de la fonction des deux variables x et y, qui représente le coût total du mélange. Notons-la $C(x,y)$.
Si le mélange contient x portions de X et y portions de Y, aux prix par portion respectifs de 30 et 10 euros, le coût total sera :

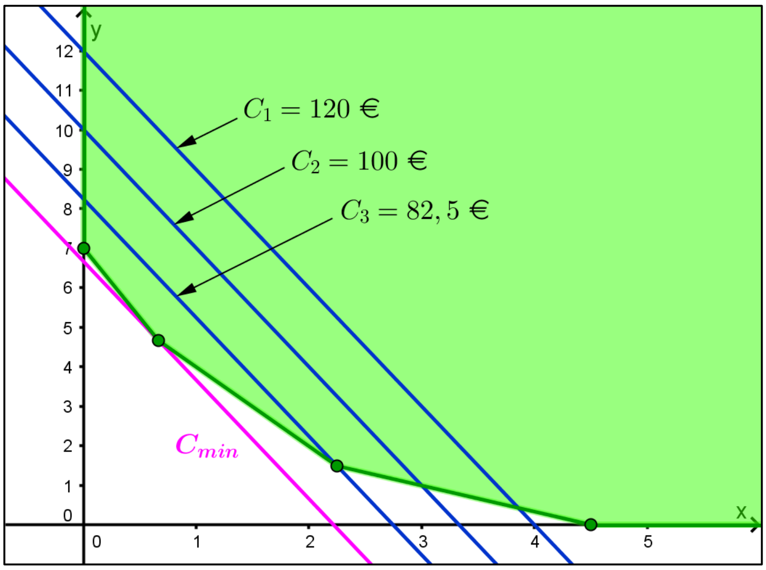
$$C(x,y) = 30x + 10y \quad (1).$$

C'est ce coût total qu'il faut minimiser. Soit C un coût total quelconque.
Résolvons l'équation (1) par rapport à y, en remplaçant $C(x,y)$ par C :

$$C = 30x + 10y \Leftrightarrow y = \frac{-30x + C}{10} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{C}{10} \; .$$

L'ensemble des couples (x,y) qui donneront un mélange coûtant C euros, est donc une droite de pente -3 , et d'ordonnée à l'origine $C/10$. Parmi toutes les droites de pente - 3 , celle qui nous donnera la solution est celle qui a au moins un point commun avec la région des solutions du système (voir ci-dessus), et qui a l'ordonnée à l'origine la plus petite (car C doit avoir la plus petite valeur possible).

Nous avons représenté ci-contre quelques droites d'*isocoûts*.
La première comprend les couples (x,y) qui occasionneront un coût de 120 euros, la deuxième ceux qui occasionneront un coût de 100 euros, etc.
Plus le coût diminue, plus la droite est translatée vers le bas.
La droite qui correspond au coût le plus faible est celle qui n'a plus qu'un seul point commun avec la région des solutions du système des contraintes. Elle a été représentée en rose. Elle a effectivement l'ordonnée à l'origine la plus petite. Le couple solution de notre problème est à l'intersection des droites $7x + 2y = 14$ et $2x + y = 6$ et a pour coordonnées $(2/3, 14/3) \approx (0.67, 4.67)$ (vérifiez).



Conclusion : un mélange apportant au moindre coût les doses de vitamines souhaitées, comportera environ 67 grammes d'aliment X pour 467 grammes d'aliment Y .
D'après la formule (1) , le coût minimal sera de 66,5 euros.

Remarques

- Si nous devions déterminer le maximum d'une fonction objectif C, nous chercherions, parmi les droites $C = constante$ qui coupent la région des contraintes*, celle qui a l'ordonnée à l'origine la plus grande.
- On peut démontrer que la fonction objectif C d'un problème de programmation linéaire atteint son maximum ou son minimum en un sommet de la région des contraintes.

Ceci nous permet de créer une procédure …

Marche à suivre pour résoudre un problème de programmation linéaire

1. Représenter graphiquement la région R du plan déterminée par le système des contraintes.
2. Déterminer les sommets de R.
3. Calculer la valeur prise par la fonction objectif C en chacun des sommets de R.
4. Sélectionner la (les) valeur(s) maximale(s) ou minimale(s) de C et conclure.

Quelques problèmes de programmation linéaire

1. Bénéfice maximum

Une compagnie fabrique deux produits X et Y. Pour chaque produit, il faut utiliser trois machines différentes A, B et C.
Pour fabriquer une unité du produit X, la machine A doit être utilisée pendant 3 heures, la machine B pendant 1 heure et la machine C pendant 1 heure. La fabrication d'une unité du produit Y nécessite 2 heures sur la machine A, 2 heures sur B et 1 heure sur C.
Le bénéfice réalisé sur le produit X est de 500 F l'unité, et le bénéfice sur le produit Y est de 300 F l'unité.
La machine A est disponible pendant 24 heures par jour ; toutefois, B ne peut être utilisée que pendant 16 heures et C pendant 9 heures.
En supposant que les machines sont disponibles quand on en a besoin (sous réserve des restrictions quant au nombre total d'heures), trouver le nombre d'unités de chaque produit qui devrait être fabriqué chaque jour pour obtenir un bénéfice maximum.

2. Coût minimum

Un distributeur de lecteurs de CD a deux entrepôts E_1 et E_2. Il y a 80 unités entreposées à E_1 et 70 unités à E_2.
Deux clients, A et B, commandent respectivement 35 et 60 unités.
Les coûts de transport à partir de chaque entrepôt jusque chez A et B sont déterminés en fonction du tableau ci-dessous. Comment passer la commande pour que le coût total de transport soit minimum ?

Entrepôt	Client	Coût de transport par unité
E_1	A	8 euros
E_1	B	12 euros
E_2	A	10 euros
E_2	B	13 euros

* C'est-à-dire la région du plan contenant les points dont les coordonnées sont solutions du système d'inéquations représentant les contraintes.

3. Planification de production

Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 15 euros sur chaque grande raquette et de 8 euros sur chaque raquette ordinaire. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80 , et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30 . Pour maintenir une bonne qualité, le nombre total de raquettes produites ne devrait pas dépasser 80 par jour. Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

4. Planning diététique

Le diététicien d'un hôpital aimerait préparer un plat végétarien à base de maïs et de courge qui fournira au moins 3 grammes de protéines et ne coûtera pas plus de 72 cents par portion. Un bol de purée de maïs fournit ½ gramme de protéine et coûte 8 cents. Un bol de courge fournit ¼ de gramme de protéines et coûte 6 cents. Pour avoir bon goût, il faut qu'il y ait au moins 2 bols de maïs et au moins autant de concentré de courge que de maïs. Il est important de maintenir le nombre total de bols par portion aussi bas que possible. Trouver le mélange de maïs et de courge qui minimisera la quantité d'ingrédients utilisés par portion.

5. Régime d'un élan

Un élan se nourrit principalement de feuilles d'arbres et de plantes aquatiques, et ne peut digérer plus de 33 kilos de ces aliments par jour. Bien que les plantes aquatiques aient un contenu énergétique plus faible, l'animal doit en manger au moins 17 kilos pour satisfaire à ses besoins en sodium. Un kilo de feuilles fournit quatre fois plus d'énergie qu'un kilo de plantes aquatiques. Trouver la combinaison d'aliments pour que l'apport énergétique soit maximal.

6. Transport de café

La compagnie « World Coffee » a acheté 100 000 sacs de café en Colombie et 300 000 au Brésil. Elle assume les frais de transport et veut acheminer les sacs dans ses différents entrepôts de la façon suivante : 70 000 sacs à Londres, 150 000 à New York et 180 000 à Tokyo. Les coûts du transport, en dollars par milliers de sacs, sont indiqués dans le tableau suivant.

		Destination		
		Londres	New York	Tokyo
Provenance	Colombie	550	420	600
	Brésil	470	360	510

Le responsable du transport veut déterminer la répartition de la marchandise permettant de minimiser les frais de transport. Autrement dit, pour chacune des villes, combien de sacs colombiens et combien de sacs brésiliens faut-il prévoir ? Aidez-le !

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS À COEFFICIENTS PARAMÉTRIQUES

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DU PREMIER DEGRÉ

Exemple 1

Considérons une barre rectiligne d'un matériau homogène. Sa longueur est fonction de la température (phénomène de dilatation).
En physique, on rencontre une formule exprimant la dilatation linéaire des solides :

$$L = L_0 + L_0 \lambda T \quad (1) .$$

La température en degrés Celsius y est représentée par T, tandis que L_0 et L représentent les longueurs de la barre, respectivement à 0 (°C) et à la température T.
Le réel λ est le *coefficient de dilatation linéaire* ; il s'agit d'un nombre positif, généralement très petit, qui dépend de la nature du solide.

Voici quelques valeurs de λ (unité (1/°C)) :

Aluminium	$2,38 \cdot 10^{-5}$	Fer	$1,28 \cdot 10^{-5}$
Cuivre	$1,68 \cdot 10^{-5}$	Verre Pyrex	$0,33 \cdot 10^{-5}$

Question 1 : une barre d'aluminium mesure 2 mètres à 0 (°C).
Quelle sera sa longueur à 100 (°C) ? Et à - 100 (°C) ?

Question 2 : à quelle température cette barre d'aluminium mesurera-t-elle 2,01 mètres ?

Question 3 : pour généraliser la question 2, supposons une barre rectiligne d'un matériau inconnu, mesurant 2 mètres à 0 (°C) ; établir une formule pour calculer la température à laquelle cette barre mesurera 2,01 mètres.

Exemple 2

Résoudre et discuter l'équation

$$2,01 = 2 + 2mx \quad (1)$$

où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

Le paramètre m peut a priori prendre n'importe quelle valeur réelle, et la solution x de l'équation dépendra de m.
Résoudre une telle équation paramétrique revient à trouver une formule générale pour la solution x en fonction de m.
Discuter l'équation revient à distinguer pour quelles valeurs du paramètre m l'équation admet effectivement une solution, et aussi pour quelles valeurs du paramètres l'équation est impossible ou indéterminée.

Solution

L'équation (1) est équivalente à $2mx = 0,01$.

Premier cas : si $m \neq 0$, alors l'équation admet la solution unique $x = \dfrac{0,005}{m}$.

Second cas : si $m = 0$, alors l'équation s'écrit $0x = 0,01$ et elle est impossible.
L'équation paramétrique (1) est ainsi discutée et résolue.

Exemple 3

Résoudre et discuter l'équation

$$m^2x - 4mx - m + 4 = 0 \qquad (2)$$

où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

Solution

Transformons d'abord l'équation en une équation équivalente, après avoir regroupé les termes en x. Elle sera plus simple à discuter.

$$m^2x - 4mx - m + 4 = 0 \iff (m^2 - 4m)x = m - 4$$

$$\iff m(m-4)x = m - 4$$

Discussion

Premier cas : si $m(m-4) \neq 0$ c'est-à-dire si $m \neq 0$ **et** $m \neq 4$.

Alors $x = \dfrac{m-4}{m(m-4)}$ et l'équation admet la solution unique $x = \dfrac{1}{m}$.

Deuxième cas : si $m(m-4) = 0$ c'est-à-dire si $m = 0$ **ou** $m = 4$.

a) si $m = 0$: l'équation (2) s'écrit $0x + 4 = 0$. Elle est impossible.

b) si $m = 4$: l'équation (2) s'écrit $0x + 0 = 0$. Elle est indéterminée.

En résumé :

Valeurs de m	Ensemble des solutions de (2)
$m \neq 0$ et $m \neq 4$	$S = \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$
$m = 0$	$S = \varnothing$
$m = 4$	$S = \boldsymbol{R}$

Exercices

1. Résoudre et discuter les équations suivantes où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

a) $3mx + 2 = 6x + m$

b) $m - 2x = mx - 1$

c) $(2m-3)x + m = (3m-1)x + 2$

d) $m(m-1)x + 1 = m^2$

e) $m^2 + 3x = (m^2 - 1)x - 2m$

f) $m^2(x-1) = m(x-2)$

g) $(m^2 - 4)x = m^2 + 2m$

h) $m(m-4)x + m(2x-5) = 0$

2. Résolvez et discutez les équations suivantes où x est l'inconnue et k un paramètre réel.

a) $\frac{1-k}{2}x+k=(k-2)x-k$

b) $(2-3k)x+1=m^2(1-x)$

---

3. Déterminez m pour que l'équation suivante d'inconnue x n'admette pas de solution :

$$\frac{x-m}{4}-\frac{mx-1}{3}=1 \ .$$

---

4. Déterminez a pour que l'équation suivante d'inconnue x n'admette pas une solution unique :

$$(a-3)x+2=3-2x \ .$$

---

5. Déterminez les réels a et b pour que l'équation suivante d'inconnue x

$$ax+2=3x+b \ .$$

a) n'admette pas de solution ;

b) admette tout réel comme solution.

---

6. Résolvez et discutez les inéquations suivantes d'inconnue x où m est un paramètre réel.

a) $m(x-2)<x+3$

b) $2(x+3)\geq m(x+4)$

c) $(m+1)x+2>0$

d) $(m-1)x-m+1<0$

e) $mx+2\geq x+3m$

f) $2m+3x\leq(m+1)(x+2)$

---

7. Résolvez et discutez les équations et inéquations suivantes où x est l'inconnue et a et b sont des paramètres réels.

a) $a^2x-1=ax+2b$

b) $a(ax-1)=4x-b+3$

c) $ax<x+b-1$

d) $a^2x>3-x$

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DU SECOND DEGRÉ

Pour discuter une équation du second degré dont les coefficients dépendent d'un paramètre, il faut étudier les signes du discriminant Δ, ainsi que les signes de S et de P, représentant respectivement la somme et le produit des racines de l'équation.
L'objectif est de pouvoir déterminer, en fonction du paramètre, le nombre de solutions de l'équation et leurs signes.

Exemple

Discuter le nombre et le signe des racines de l'équation

$$\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + 1 = 0$$

où x est l'inconnue et λ un paramètre réel.

Solution

a) Coefficient de x^2 : l'équation est du second degré si $\lambda \neq 0$.

b) Discriminant : $\Delta = (\lambda - 3)^2 - 4\lambda = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\lambda = \lambda^2 - 10\lambda + 9$.

Signe de Δ en fonction de λ

Les racines de Δ étant 1 et 9 (vérifiez), nous avons le tableau de signes suivant

λ		1		9	
Δ	+	0	–	0	+

c) Produit des racines : $P = \dfrac{1}{\lambda}$ (non défini si $\lambda = 0$)

Signe de P en fonction de λ

λ		0	
P	–	|	+

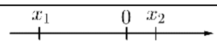
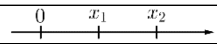
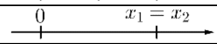
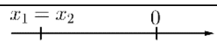
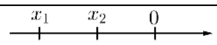
d) Somme des racines : $S = \dfrac{3-\lambda}{\lambda}$ (non définie si $\lambda = 0$)

Signe de S en fonction de λ

λ		0		3	
$3 - \lambda$	+	+	+	0	-
λ	-	0	+	+	+
S	-	|	+	0	-

Il nous reste maintenant à rassembler tous ces résultats dans un tableau, en tenant compte des valeurs remarquables de λ : 0, 1, 3 et 9.
Nous allons ainsi tirer des conclusions sur le nombre et les signes des racines de l'équation en fonction des valeurs de λ.

e) <u>Tableau récapitulatif</u>

λ	a	Δ	P	S	Conclusions
		+	–	–	deux racines distinctes ; $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$; $\mid x_1 \mid > \mid x_2 \mid$; 
0	0	+			$a = 0$: équation du premier degré ; solution : $x = 1/3$ (*)
		+	+	+	deux racines distinctes ; $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$; 
1		0	+	+	une racine double positive ; $x_1 = x_2 = 1$ (**) 
		–	+	+	
3		–	+	0	$\left.\right\}$ pas de racine
		–	+	–	
9		0	+	–	une racine double négative ; $x_1 = x_2 = - 1/3$ (***) 
		+	+	–	deux racines distinctes ; $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$; 

<u>Notes</u>

(*) Si $\lambda = 0$, l'équation $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + 1 = 0$ devient $-3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

(**) Si $\Delta = 0$, la solution de l'équation est $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\lambda - 3}{2\lambda}$; or, $\lambda = 1$, donc $x = 1$.

(***) Même remarque que (**) avec $\lambda = 9$, donc $x = -\dfrac{1}{3}$.

Prenons deux cas particuliers pour vérifier …

- Si $\lambda = -1$, l'équation devient $-x^2 - 4x + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 20$ ce qui donne deux solutions distinctes $x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = -2 \mp \sqrt{5}$.
  La solution négative $x_1 \approx -4{,}24$ est supérieure en valeur absolue à la solution positive $x_2 \approx 0{,}24$, conformément à la première ligne des conclusions du tableau.
- Si $\lambda = 4$, l'équation devient $4x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = -15$, et l'équation n'a pas de racine réelle comme prévu dans le tableau des conclusions.

Exercices

1. Résoudre l'équation $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + 1 = 0$, d'inconnue x , pour les valeurs suivantes du paramètre λ : ½ , 2 et 10 . Vérifiez si vos résultats correspondent aux conclusions du tableau récapitulatif de l'exemple ci-dessus.

---

2. Discuter le nombre et le signe des racines des équations suivantes, où x est l'inconnue et λ un paramètre réel.

a) $x^2 - (2\lambda - 4)x + \lambda = 0$

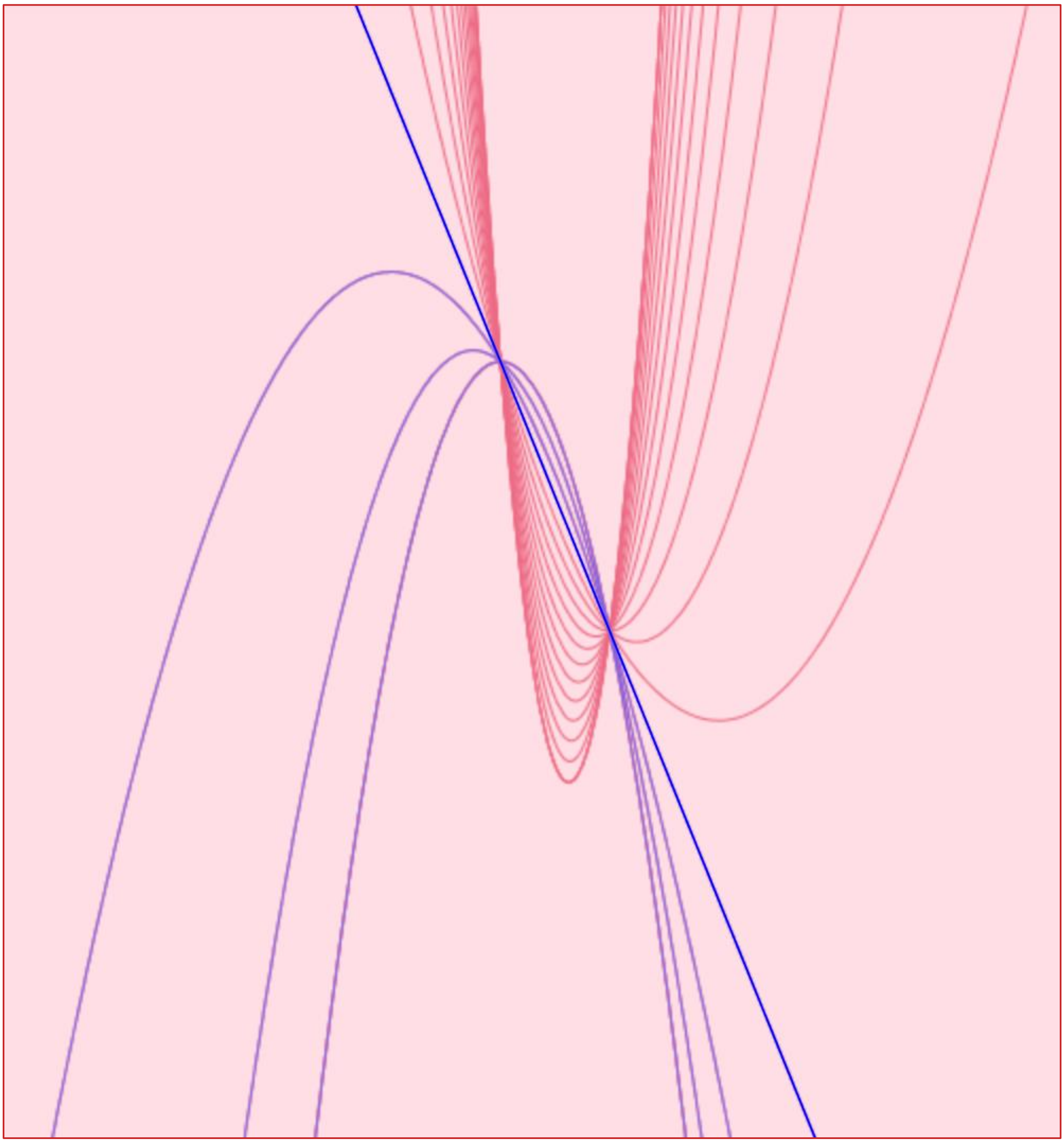
b) $\lambda x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda = 0$

c) $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda = 0$

d) $3x^2 - 2(\lambda - 2)x + \lambda = 0$

e) $(\lambda + 1)x^2 - (2\lambda + 3)x + 2 = 0$

f) $-\lambda x^2 + 4x + 2 - \lambda = 0$



Famille de paraboles d'équations $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + 1 = 0$
(représentées avec GEOGEBRA pour λ *variant de - 3 à 12 par pas de 1).*

Exemple

Résoudre et discuter le système $\begin{cases} m^2x+y=1 & (1) \\ x+m^2y=m & (2) \end{cases}$,

où x et y sont les inconnues et m un paramètre réel.

Solution

Les méthodes de substitution ou d'addition permettent bien sûr de réaliser le travail demandé. Nous utiliserons toutefois la méthode de CRAMER (voir page 24) qui s'avère souvent bien pratique quand il s'agit d'un système à coefficients paramétriques.

Calculons le déterminant du système et ensuite ceux spécifiques à x et à y :

$$D = \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = m^4 - 1 = (m^2-1)(m^2+1) \quad ,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m^2 \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1) \quad ,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 1 = (m-1)(m^2+m+1).$$

<u>Discussion</u>

<u>Premier cas</u> : $D \neq 0 \Leftrightarrow (m \neq -1) \wedge (m \neq 1)$

Dans ce cas, nous pouvons appliquer les formules de Monsieur CRAMER :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{m(m-1)}{(m^2-1)(m^2+1)} = \frac{m}{(m+1)(m^2+1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{(m-1)(m^2+m+1)}{(m^2-1)(m^2+1)} = \frac{m^2+m+1}{(m+1)(m^2+1)} \; .$$

Le système admet comme solution unique le couple $\left(\frac{m}{(m+1)(m^2+1)}, \frac{m^2+m+1}{(m+1)(m^2+1)} \right)$ (*).

<u>Second cas</u> : $D = 0 \Leftrightarrow (m = -1) \vee (m = 1)$

1°/ Si $m = -1$, alors le système s'écrit $\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ x+y=-1 & (2) \end{cases}$.

Les équations (1) et (2) sont clairement incompatibles et le système n'a pas de solution.

2°/ Si $m = 1$, alors le système s'écrit $\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ x+y=1 & (2) \end{cases}$.

Les équations (1) et (2) sont équivalentes et le système est indéterminé.
Son ensemble de solutions est : $S = \{(x,y) \in R^2 \,|\, (x \in R) \wedge (y = 1-x)\}$.

La discussion terminée, il est intéressant de vérifier les résultats sur quelques cas particuliers.

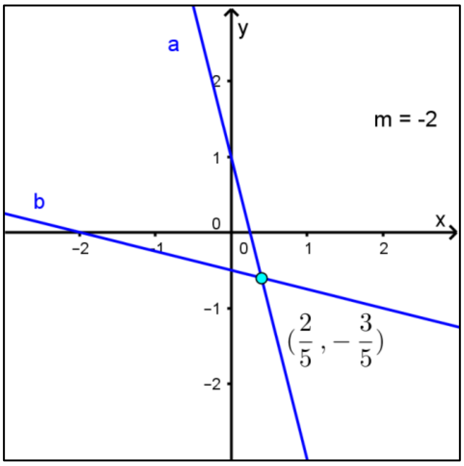
Voici d'abord des exemples pour des valeurs de m différentes de -1 et de 1.
Dans chacun des cas, nous réécrivons le système initial, nous trouvons sa solution grâce à (*) , et nous vérifions graphiquement.

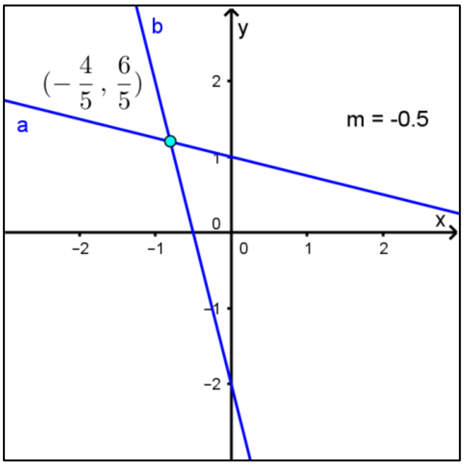
- Si $m = -2$, le système $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$ admet la solution unique $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

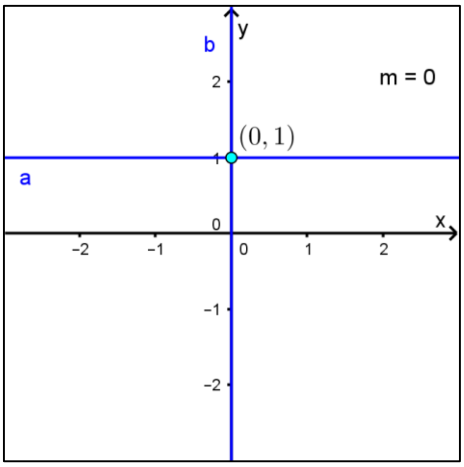
- Si $m = -½$, le système $\begin{cases} \frac{1}{4}x + y = 1 \\ x + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ admet la solution unique $\left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

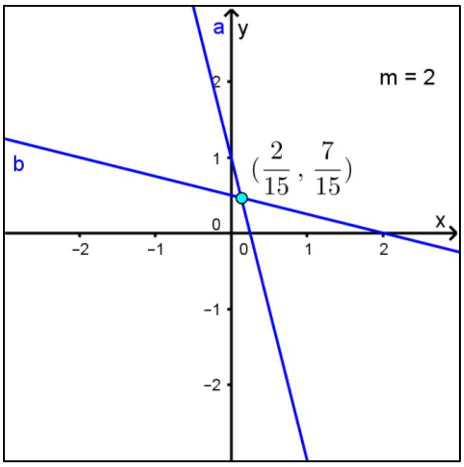
- Si $m = 0$, le système $\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ admet la solution unique $(0,1)$.

- Si $m = 2$, le système $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$ admet la solution unique $\left(\frac{2}{15}, \frac{7}{15}\right)$.



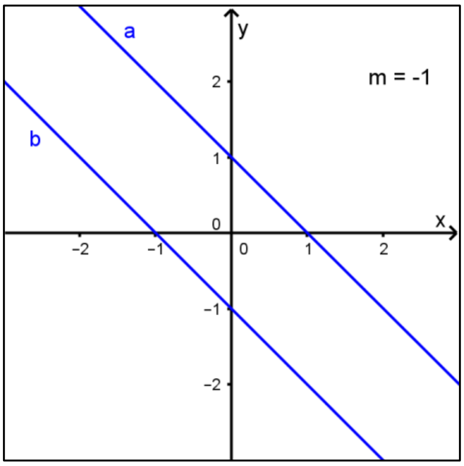


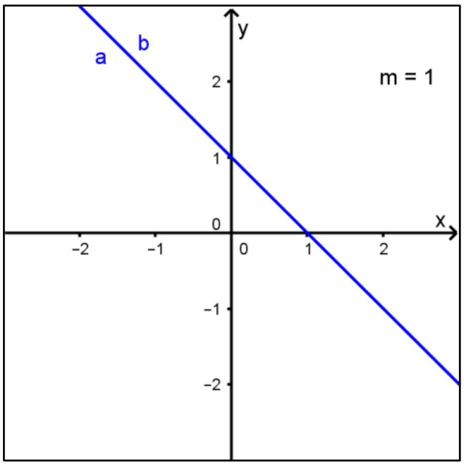




Voyons maintenant les cas où le déterminant du système est nul.

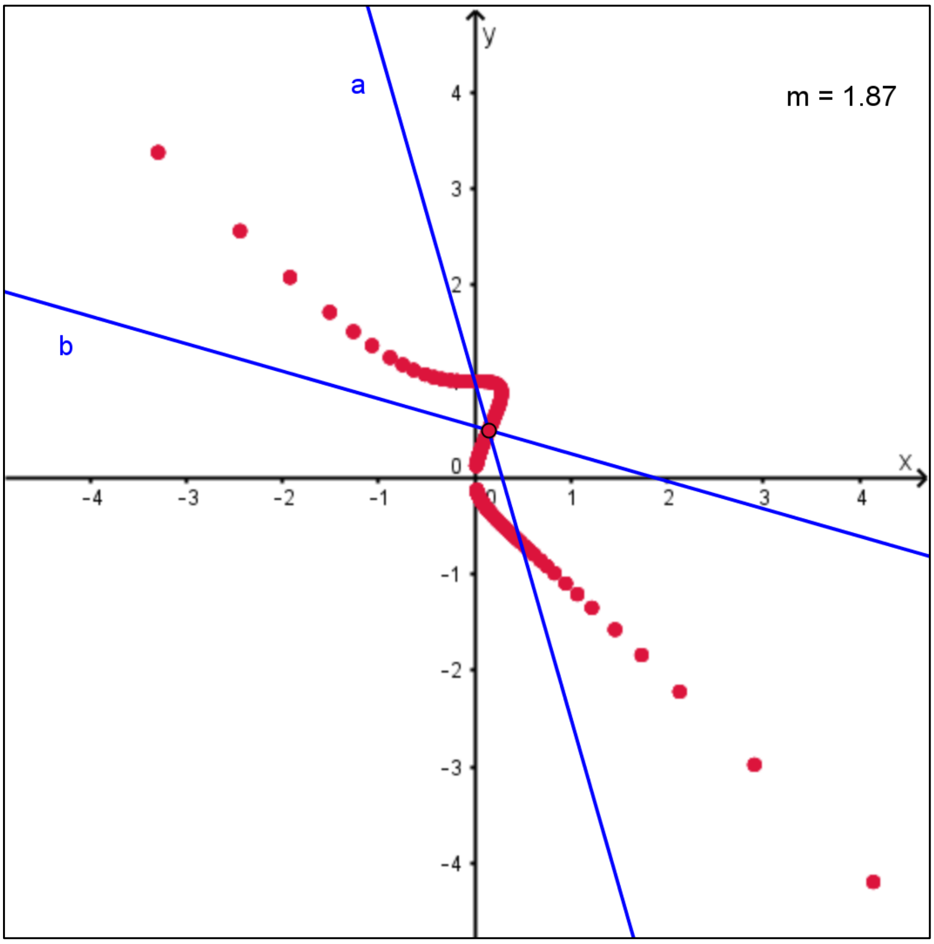
- Si $m = -1$, le système est impossible, ce qui se traduit graphiquement par des droites parallèles et disjointes.
- Si $m = 1$, le système est indéterminé et les droites a et b sont confondues.





Prolongements possibles …

L'étude des systèmes d'équations paramétriques peut déboucher sur celle des lieux géométriques et autres trajectoires.
Voici, pour notre exemple, les points d'intersection des droites a et b lorsque m varie dans $[-8{,}8]$ par pas de $0{,}01$ (avec un « instantané » pour $m = 1{,}87$). Une trajectoire se dessine …



Exercices

1. Résolvez et discutez les systèmes suivants, où x et y sont les inconnues, et m un paramètre réel.

a) $\begin{cases}(m-1)x+2y=m+1\\ x+(m-2)y=m-1\end{cases}$

b) $\begin{cases}mx-y=4-m\\ 2mx+(m-3)y+3(m+1)=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}(m-1)x+(m+1)y=m\\ (m+1)x+my=m-1\end{cases}$

d) $\begin{cases}(m-3)x+y=5\\ 2(m-3)x+(m-5)y=m\end{cases}$

e) $\begin{cases}mx+y=2\\ x+my=m+1\end{cases}$

f) $\begin{cases}(2m-5)x-(m-1)y=3m-5\\ 5x-(2m+1)y=5\end{cases}$

g) $\begin{cases}mx+m(m-1)y=m^2+1\\ x+my=m\end{cases}$

h) $\begin{cases}mx+y+m=0\\ (m^2-m)x+my=0\end{cases}$

i) $\begin{cases}(m-1)x+(m+1)y=0\\ x-y=0\end{cases}$

j) $\begin{cases}(m-1)x-4y=0\\ 2x-(m+1)y=0\end{cases}$

---

2. Pour chacun des systèmes suivants d'inconnues x et y, déterminez les valeurs des paramètres a et b pour que le système soit …

1° de CRAMER (avec solution unique) ; 2° impossible ; 3° indéterminé.

a) $\begin{cases}3x-2y=12\\ ax+4y=b\end{cases}$

b) $\begin{cases}ax+3y=b\\ 3x+ay=a\end{cases}$

c) $\begin{cases}(a-1)x+2y=4\\ (3a-3)x+ay=b\end{cases}$

---

3. Résolvez et discutez le système suivant, où x et y sont les inconnues, et a et b des paramètres réels.

$$\begin{cases}ax+by=a^2+b^2\\ x+ay=2ab\end{cases}$$

---

4. Trouvez les points communs d'une droite non verticale passant par le point $(1,2)$ et d'une droite parallèle à la droite $d \equiv y+3x=0$.

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ

ÉQUATIONS BICARRÉES

Une équation bicarrée en x est une équation du second degré en x^2 .

<u>Exemple</u> : résoudre l'équation $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$.

Posons $y = x^2$. L'équation s'écrit alors : $3y^2 - 2y - 1 = 0$.

Calculons les solutions y : $\Delta = 16$ et $y = \dfrac{2 \pm 4}{6}$, ce qui donne $y = 1$ ou $y = -\dfrac{1}{3}$

Les solutions de l'équation bicarrée sont donc -1 et 1 (ce sont les racines carrées algébriques de $y = 1$, tandis que $-\dfrac{1}{3}$ n'a pas de racine carrée réelle). $S = \{-1{,}1\}$.

Exercices

1. Résoudre les équations bicarrées suivantes.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 = 0$

d) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

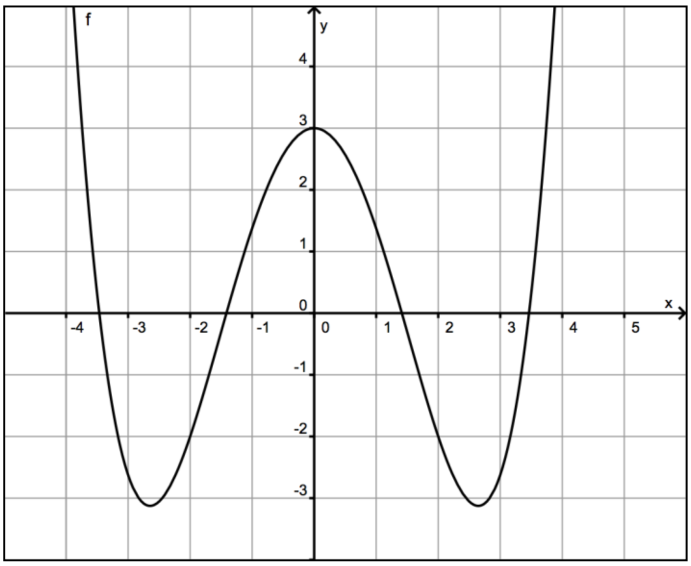
e) $x^4 + x^2 + 6 = 0$

f) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

g) $6x^4 - x^2 - 2 = 0$

h) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$

2. Déterminer les racines de la fonction $f(x) = \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{7x^2}{4} + 3$ représentée ci-dessous..



ÉQUATIONS IRRATIONNELLES SIMPLES

Ce sont des équations où l'inconnue figure sous un radical.

<u>Exemple</u> : résoudre l'équation $\sqrt{3x+1}=1-x$.

Posons d'abord les conditions :

1°/ $3x+1\geq 0 \rightarrow x\geq -\frac{1}{3}$

2°/ $1-x\geq 0\rightarrow x\leq 1$ (car le radical du premier membre désigne une quantité positive)

Finalement : $-\frac{1}{3}\leq x\leq 1$.

Pour résoudre, le radical étant isolé, nous pouvons élever au carré :

$$3x+1=(1-x)^2 \Leftrightarrow 3x+1=1-2x+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x=0$$
$$\Leftrightarrow x\cdot(x-5)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=5$$

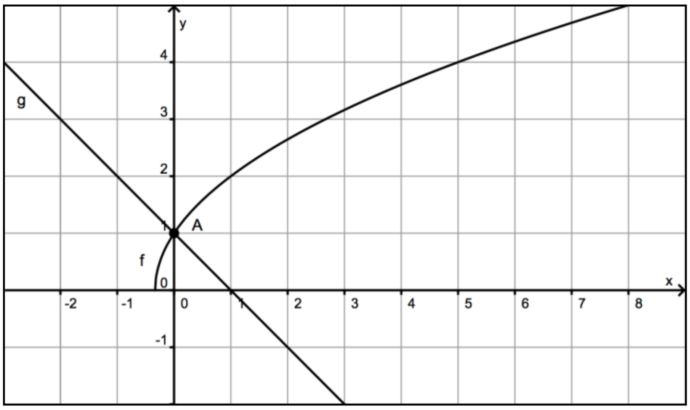
Tenant compte des conditions, nous devons exclure $x=5$. Finalement : $S=\{0\}$.

<u>Illustration graphique</u>

La solution $x=0$ est l'abscisse du seul point d'intersection entre les graphiques des fonctions

$f(x)=\sqrt{3x+1}$ et $g(x)=1-x$.

Ce point est A(0,1) .



Exercices

1. Résoudre les équations suivantes après avoir posé les conditions.
   Vérifier graphiquement avec GEOGEBRA.

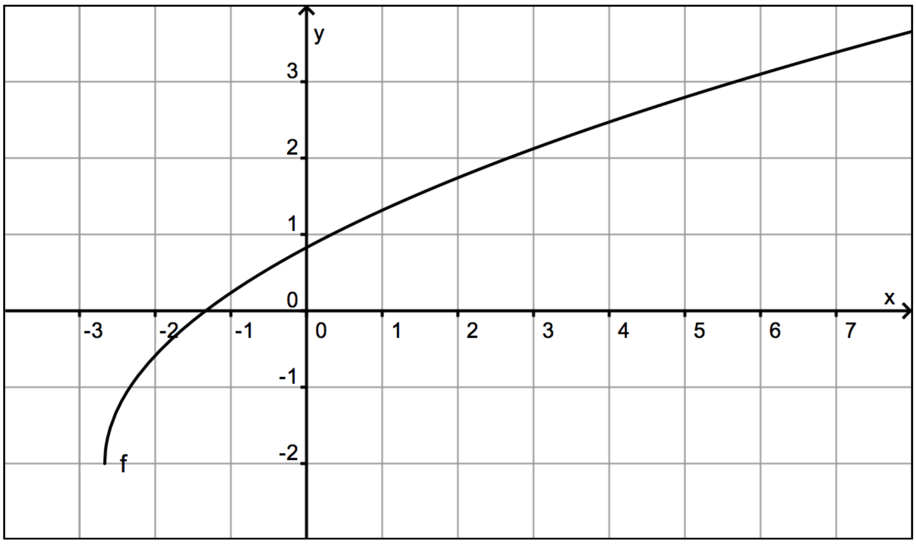
a) $\sqrt{x+1}=2$

b) $\sqrt{2x-5}=x-10$

c) $\sqrt{x+3}=x-3$

d) $\sqrt{x+2}+2=2x$

2. Voici le graphique de la fonction $f(x)=\sqrt{3x+8}-2$.



a) Déterminer son domaine de définition.

b) Calculer sa racine (arrondir ensuite le résultat à 0,01 près)[1].

c) Calculer son ordonnée à l'origine.

d) Calculer l'abscisse du point d'ordonnée 3 de son graphique.

e) Calculer les coordonnées des points d'intersection de son graphique avec celui de la fonction $g(x)=\dfrac{x}{2}$ (vérifier).

---

3. Soit la fonction $f(x)=\sqrt{5-x}-1$.

a) Déterminer son domaine de définition.

b) Tracer son graphique avec précision.

c) Calculer sa racine et son ordonnée à l'origine.

d) Donner les coordonnées des points d'intersection du graphique de f avec les axes du repère.

---

4. Résoudre les équations suivantes après avoir posé toutes les conditions.

a) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$

b) $\sqrt{-2x}+1=\sqrt{3-3x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+8}$

d) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x-1}$

[1] Cette consigne est valable pour tous les autres résultats numériques demandés.

ÉQUATIONS FRACTIONNAIRES

Nous envisagerons des équations où l'inconnue figure au dénominateur.

Exemple : résoudre l'équation $\frac{1}{x-3}+2=2x-1$.

Condition : $x \neq 3$.

$$\frac{1}{x-3}+2=2x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-3}=2x-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 1=(2x-3)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2-9x+8=0$$

La résolution de cette équation du second degré donne les solutions : $x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{4}$.

Elles sont toutes deux acceptables car différentes de 3 .
Les valeurs approximatives sont : $x_1=3{,}28$ et $x_2=1{,}22$.

Illustration graphique

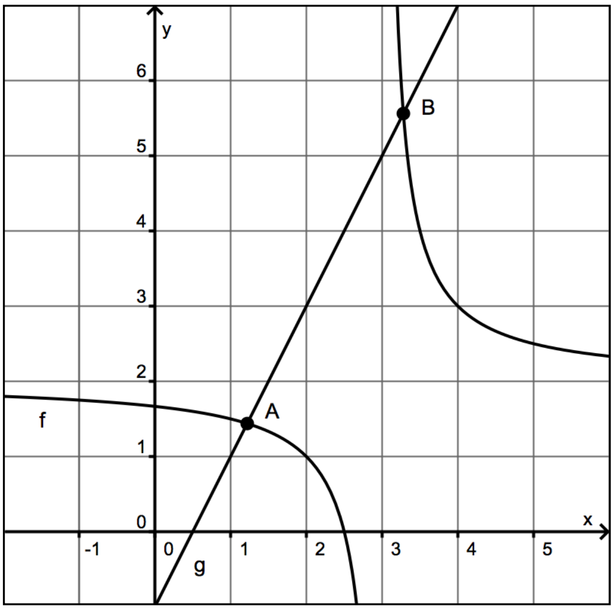
Revenant à l'équation initiale, nous pouvons voir les solutions comme étant les abscisses des points d'intersection entre les graphiques de deux fonctions :

$f(x)=\frac{1}{x-3}+2$ (hyperbole) et

$g(x)=2x-1$ (droite).

Les ordonnées s'obtiennent en calculant l'image de chacune des abscisses par une des deux fonctions (choisir la plus simple) :

$A(1.22, 1.44)$ et $B(3.28, 5.56)$.



Exercices

1. Résoudre les équations suivantes après avoir posé les conditions.
Vérifier graphiquement avec GEOGEBRA.

a) $\frac{1}{x-2}+1=x+3$

b) $\frac{1}{x+4}-1=2x+5$

c) $\frac{1}{2-x}=\frac{x}{2}+1$

d) $-\frac{1}{x}+2=\frac{x}{3}+1$

2. Résoudre les équations suivantes après avoir posé les conditions.

a) $x+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{10x}{3(x-1)}$

b) $\dfrac{4}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{x+2}{x}$

c) $\dfrac{x(x+1)}{9-4x^2}+\dfrac{4x-1}{2x-3}+\dfrac{5-2x}{2x+3}=2$

d) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}=1$

---

3. Résoudre et discuter dans **R** les équations d'inconnue x (a et b sont des paramètres réels).

a) $\dfrac{2a}{x-a}=\dfrac{x-a}{2a}$

b) $\dfrac{x-a}{x-b}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{b-x}{x-a}$

---

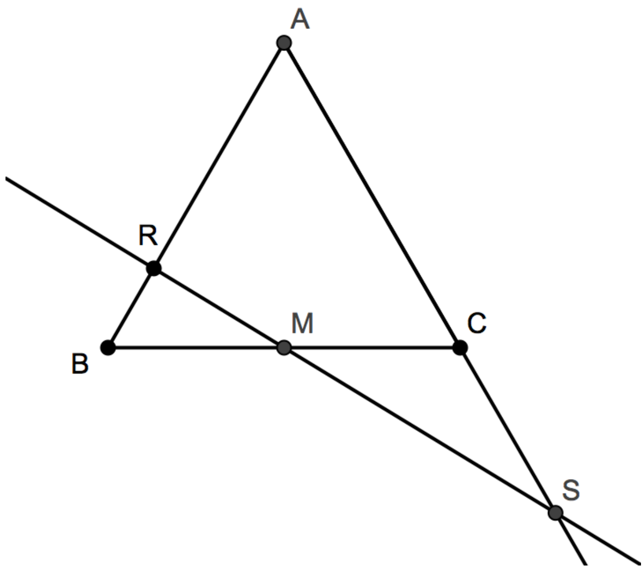
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des hyperboles $H_1 \equiv y=\dfrac{1}{x-1}$ et $H_2 \equiv y=\dfrac{1}{x+2}+1$. Vérifier avec GEOGEBRA.

---

5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle de rayon 2 et centré à l'origine, avec l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$. Vérifier avec GEOGEBRA.

---

6. On donne un triangle équilatéral ABC de côté a .
Par le milieu M de $[BC]$, on trace une droite qui rencontre $[AB]$ en R et $[AC$ (demi-droite d'origine A) en S .
Où faut-il placer le point R pour que la somme des aires des triangles MRB et MSC égale l'aire du triangle ABC ? Prendre comme inconnue $x=|AR|$.



LE NOMBRE D'OR

Voici trois points alignés A, B et C. Nous allons nous intéresser aux rapports entre les distances séparant ces points.

Commençons par définir ce qu'est la *section dorée* : trois points A, B et C forment une section dorée « s'il y a de la petite partie à la grande le même rapport que de la grande au tout » (d'après VITRUVE, architecte Romain du 1er siècle avant Jésus-Christ).

1. Écrire cette définition en langage symbolique, c'est-à-dire écrire une égalité entre deux rapports de distances.

2. Si nous supposons que la petite partie $[AB]$ mesure 1, que doit mesurer la grande partie $[BC]$ pour que les points A, B et C forment une section dorée ?
   La réponse à cette question passe par la résolution d'une équation du second degré.
   Une des solutions de cette équation est le fameux *nombre d'or*.

La façade du Parthénon d'Athènes s'inscrit presque exactement dans un rectangle d'or, c'est-à-dire un rectangle dont le rapport entre la base et la hauteur est égal au nombre d'or.
Toutefois, au Vème siècle avant Jésus-Christ, les constructeurs de ce temple consacré à la déesse Athéna n'avaient sans doute qu'une perception intuitive du nombre d'or.

Le Parthénon sur l'Acropole

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ : EXERCICES VARIÉS

1. Déterminer la valeur du paramètre k pour que l'équation suivante admette le réel 7 comme solution. Calculer ensuite l'autre solution.

$$2x^2 + kx - 7 = 0$$

---

2. Déterminer la valeur du paramètre k pour que le nombre indiqué soit solution de l'équation donnée. Calculer ensuite l'autre solution.

   a) 2 ; $2x^2 + kx + 2k - 3 = 0$.

   b) -3 ; $(k+1)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$.

---

3. Quelle(s) valeur(s) faut-il donner au paramètre m pour que l'équation suivante admette une racine double (en d'autres mots, une seule solution). Résoudre cette équation pour la (les) valeur(s) de m trouvée(s).

$$(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m + 3 = 0$$

---

4. Résoudre l'équation suivante sachant qu'elle admet le réel 2 comme solution (utiliser la méthode de HORNER).

$$3x^3 - 20x^2 + 23x + 10 = 0$$

---

5. Déterminer deux nombres réels dont la somme vaut S et dont le produit vaut P .

   a) $S = \frac{5}{6}$ et $P = \frac{1}{6}$;

   b) $S = -\frac{1}{4}$ et $P = -\frac{1}{8}$.

---

6. Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'équation vérifie les conditions indiquées. En déduire ces solutions.

   a) l'équation $x^2 + mx - 9 = 0$ a des solutions opposées ;

   b) l'équation $2x^2 + 5x + m = 0$ a des solutions inverses ;

   c) l'équation $x^2 + mx + m - 4 = 0$ a des solutions x_1 et x_2 telles que $2x_1x_2 = 3(x_1 + x_2)$.

---

7. Sans résoudre l'équation $x^2 + 0{,}25x - 0{,}125 = 0$, calculer $x_1^2 + x_2^2$, x_1 et x_2 étant les solutions de cette équation.

8. Sans résoudre l'équation $x^2 + 1{,}384x - 0{,}375 = 0$, calculer $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, x_1 et x_2 étant les solutions de cette équation.

---

9. <u>Question à choix multiples (OMB)</u>

L'équation $\left(3+2\sqrt{2}\right)x^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)x - 2 = 0$ possède deux racines réelles x_1 et x_2 , avec $x_1 < x_2$. Que vaut $x_2 - x_1$?

$\boxed{\text{A}}$ $3\sqrt{2} - 3$ $\boxed{\text{B}}$ $2 + 3\sqrt{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $2 + 2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $1 - \sqrt{2}$ $\boxed{\text{E}}$ $-1 + 2\sqrt{2}$

---

10. Résoudre l'équation suivante sachant qu'elle admet le réel 1 comme solution (utiliser la méthode de HORNER).

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

---

11. L'aire d'un terrain rectangulaire est de 210 (m^2). Si l'on diminue la longueur du terrain de 2 (m) et si l'on augmente sa largeur de 3 (m) , l'aire augmente de 11 (m^2).
Quelles étaient les dimensions initiales du terrain ?

---

12. Soit l'équation $2x^2 + (a+1)x + a^2 - 1 = 0$ d'inconnue x (a est un paramètre réel).

a) Pour quelles valeurs de a cette équation admet-elle deux solutions distinctes ?

b) Dans le cas où il y a deux solutions distinctes, soient x_1 et x_2 ces solutions.
Calculer $x_1^2 + x_2^2$ en fonction de a .

c) Pour quelle valeur de a l'expression $x_1^2 + x_2^2$ est-elle maximale (ou minimale) ?

---

13. Soit l'équation $x^2 + px + q = 0$ d'inconnue x (p et q sont des paramètres réels).
Pour quelles valeurs de p et de q a-t-on deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = 2x_2$ et $x_1^2 + x_2^2 = 45$?

---

14. Soit l'équation $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$ d'inconnue x (a , b et c sont des paramètres réels).
Montrer que, quelles que soient les valeurs de a , b et c , cette équation admet toujours au moins une solution réelle.

---

15. Soit l'équation $mx^4 - 2(m+1)x^2 + m - 1 = 0$ d'inconnue x (m est un paramètre réel). Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle quatre solutions distinctes ?

---

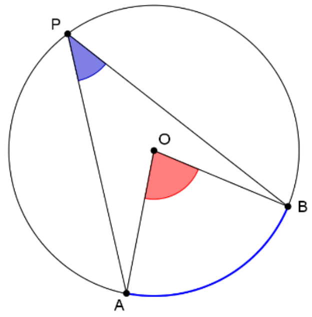
16. Résoudre la double inéquation suivante d'inconnue x : $-\frac{100}{x} < 6 - 9x + \frac{20}{x} < \frac{17}{x}$.

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

ANGLES ET SECTEURS

ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

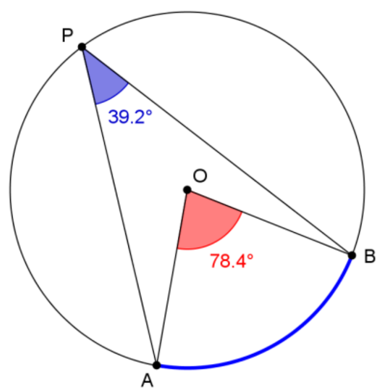
Voici un cercle de centre O, un angle $A\hat{P}B$ inscrit dans ce cercle[2], et un angle $A\hat{O}B$ au centre[3] de celui-ci, et interceptant le même arc que $A\hat{P}B$.



Rappelons quelques propriétés importantes.

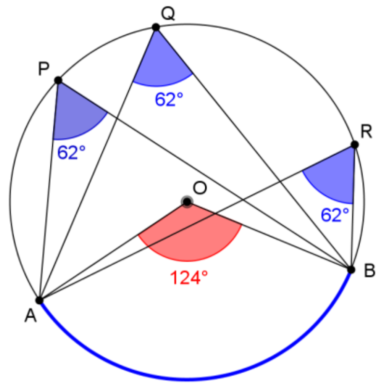
Propriété 1

Un angle inscrit est la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.



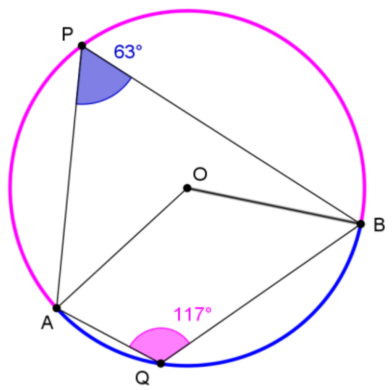
Propriété 2

Deux angles inscrits dans un même cercle et y interceptant le même arc ont la même amplitude.



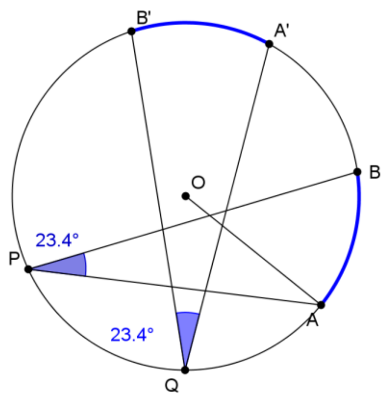
Propriété 3

Deux angles inscrits dans un même cercle et y interceptant deux arcs différents ayant les mêmes extrémités sont supplémentaires.



Propriété 4

Deux angles inscrits dans un même cercle et y interceptant des arcs isométriques ont la même amplitude.



[2] Un angle *inscrit* a pour sommet un point du cercle, et ses côtés contiennent des cordes de ce cercle.
[3] Un angle *au centre* a pour sommet le centre du cercle.

Exercices

1. Démontrez les propriétés 1 à 4 énoncées à la page précédente.

---

2. Un angle inscrit dans un cercle intercepte un arc dont la longueur est le sixième de la circonférence du cercle. Quelle est l'amplitude de cet angle ?

---

3. Un angle de 35° est inscrit dans un cercle de 7 (cm) de rayon.
Calculez la longueur de l'arc intercepté.

---

4. Un angle inscrit dans un cercle de 11 (cm) de rayon intercepte un arc de 15(cm).
Calculez l'amplitude de cet angle.

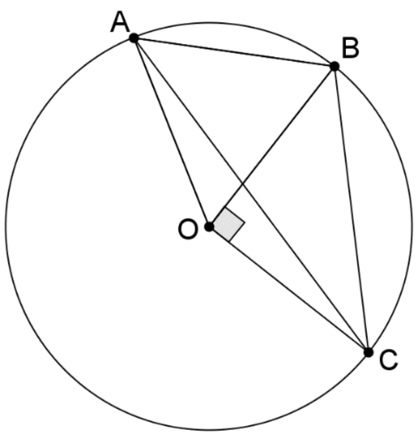
---

5. Soit un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de centre O, et soit P un point du petit arc AB.
Calculez les amplitudes des angles suivants : $A\hat{O}B$, $B\hat{P}C$, $A\hat{P}C$ et $A\hat{P}B$.

---

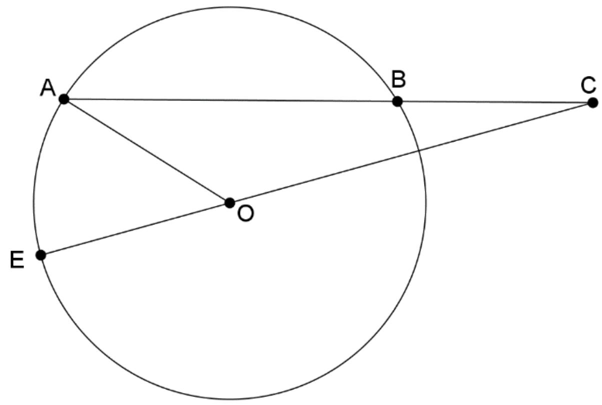
6. Dans la figure ci-contre, nous avons un cercle de centre O, un triangle équilatéral OAB et un triangle OBC, rectangle en O.

Calculez les angles du triangle ABC.

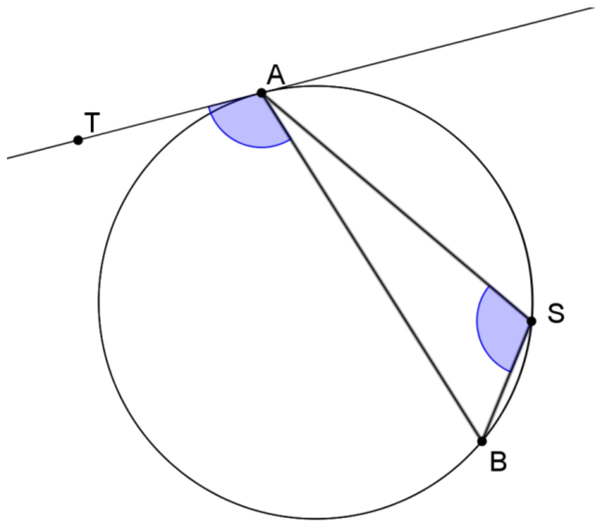


---

7. Dans la figure ci-dessous, on a prolongé la corde $[AB]$ par un segment dont la longueur est celle du rayon du cercle.
Exprimez l'angle $A\hat{O}E$ en fonction de l'angle $A\hat{C}E$.



8. Dans la figure ci-dessous, les points A, B et S appartiennent au cercle, et AT est la tangente à ce cercle en A. Démontrez que $A\hat{S}B = B\hat{A}T$.

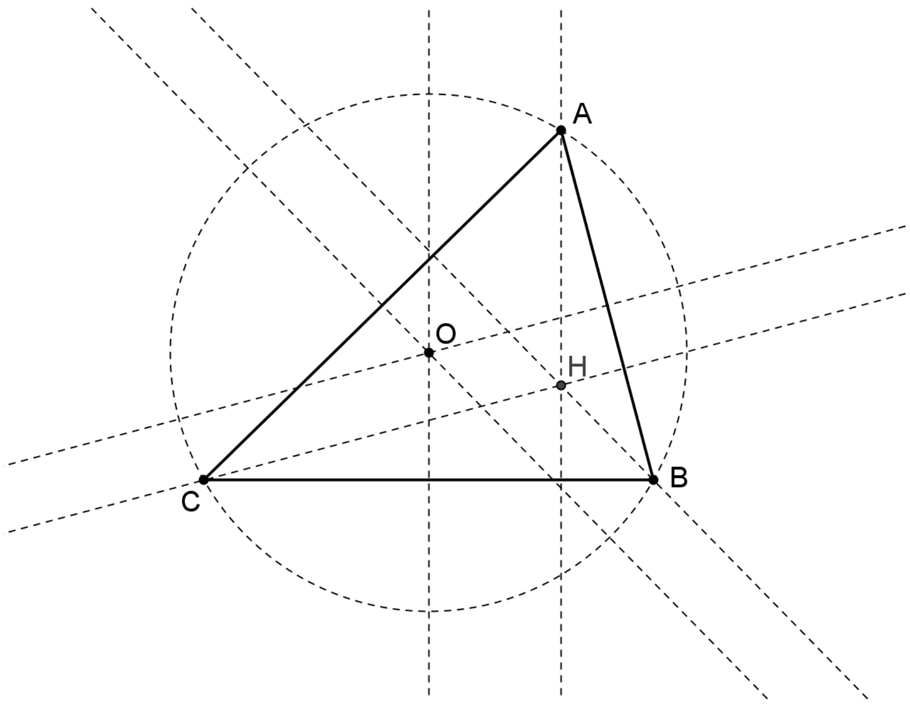


---

9. Démontrez que, dans un triangle, la médiatrice d'un côté et la bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle au sommet opposé se coupent en un point du cercle circonscrit au triangle.

---

10. Considérons un triangle ABC. Soit H l'orthocentre du triangle, et soit O le centre de son cercle circonscrit.

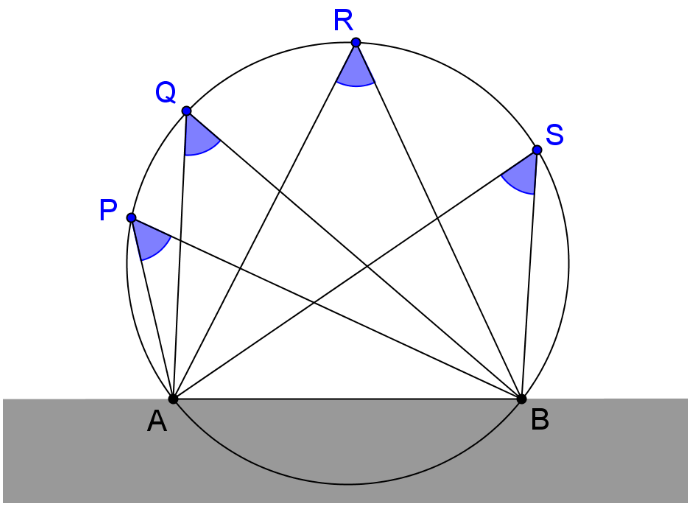


a) Démontrez que $B\hat{A}H = C\hat{A}O$.

b) Déduisez-en l'axe de chacune des symétries qui appliquent AH sur AO.

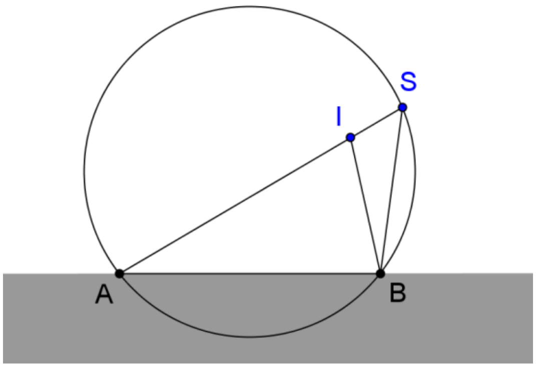
ARC CAPABLE DES ANGLES DONT L'AMPLITUDE EST DONNÉE

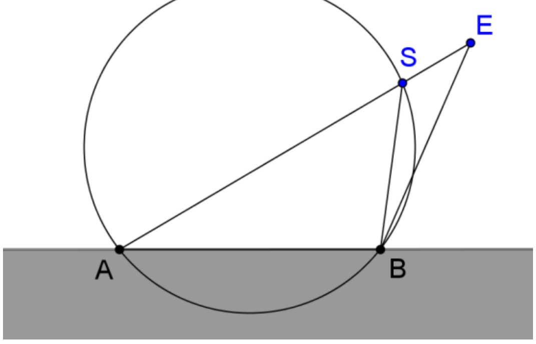
Voici un cercle $\mathcal{C}$ avec une de ses cordes $[AB]$. Soient P, Q, R et S des points de $\mathcal{C}$ situés du même côté de $[AB]$.
Nous savons que $A\hat{P}B = A\hat{Q}B = A\hat{R}B = A\hat{S}B$ (propriété 2 page 52).



Dans le demi-plan non grisé, les *seuls* points d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous l'angle $A\hat{P}B$, sont ceux du grand arc de cercle interceptant $[AB]$ mais ne comprenant ni A ni B.

En effet, si nous prenons un point qui n'est pas sur l'arc de cercle (voir figures ci-dessous), soit intérieur au disque (comme le point I), ou extérieur au disque (comme le point E), nous verrons le segment $[AB]$ sous un angle différent de $A\hat{S}B$.





Exercice

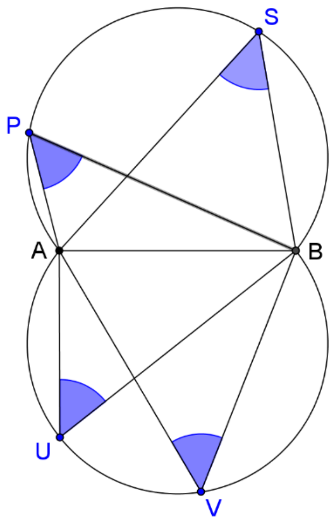
En vous basant sur les figures ci-dessus, démontrez que $A\hat{I}B > A\hat{S}B$ et que $A\hat{E}B < A\hat{S}B$.

<u>Conclusion</u> : le lieu géométrique des points d'un demi-plan bordé par la droite AB, d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle d'une amplitude θ donnée, est un arc de cercle ne comprenant ni A ni B, et dont le segment $[AB]$ est la corde.
Cet arc de cercle est appelé *arc capable de l'angle* θ *tracé sur* $[AB]$ *comme corde*.

<u>Conséquence</u> : le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle d'une amplitude θ donnée est la réunion des deux arcs capables de l'angle θ tracés sur $[AB]$ comme corde. Ces deux arcs symétriques par rapport à la droite AB.

Exemple

Réalisé avec GEOGEBRA, voici le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle de $52°$.



Ce lieu est la réunion des deux arcs de cercle symétriques par rapport à AB .

Nous avons $A\hat{P}B = A\hat{S}B = A\hat{U}B = A\hat{V}B = 52°$.

Exercices

1. Tracez un segment $[AB]$ de 5 (cm) de long.

   a) Construisez le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle de $60°$.

   b) Déduisez-en le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit $[AB]$sous un angle de $120°$.

   c) Réalisez ces constructions avec GEOGEBRA.

---

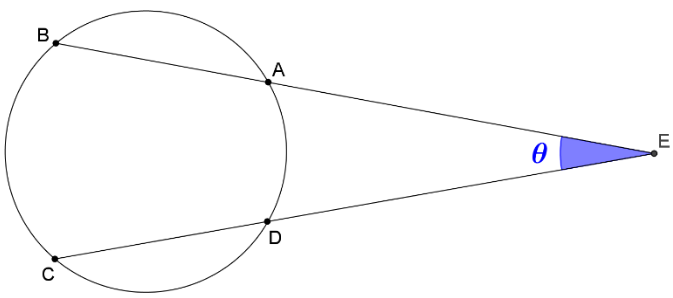
2. Quel est le lieu géométrique des points du plan d'où l'on voit un segment $[AB]$ sous un angle de $90°$?

---

3. Vrai ou faux ? Si $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres quelconques d'un même cercle, alors les angles $A\hat{C}D$ et $A\hat{B}D$ ont la même amplitude. Justifiez.

OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE

Dans la figure ci-contre, les points A , B , C et D sont cocycliques et les arcs de cercle AB , BC et CD sont de même longueur.

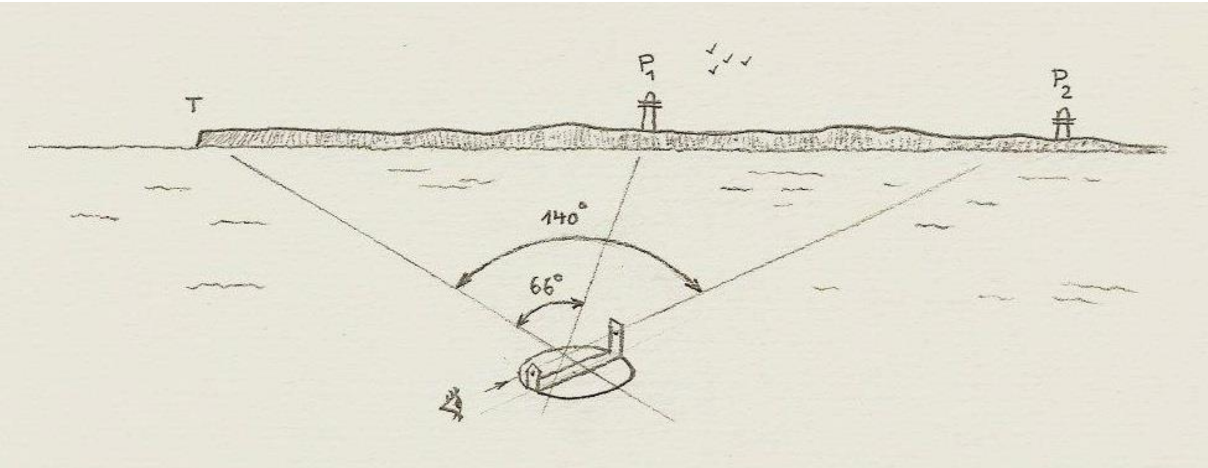


La mesure de l'angle $A\hat{C}D$ est égale à

(A) $45° - \frac{3\theta}{4}$ (B) $\frac{2\theta}{3}$ (C) $90° - 2\theta$ (D) $45° - \frac{\theta}{4}$

NAVIGATION MARITIME

Autrefois, afin de déterminer la position exacte de son navire, le capitaine mesurait la « distance angulaire » de points fixes repérés sur la côte. Pour cela, il se servait du compas sur lequel était placée une alidade mobile.

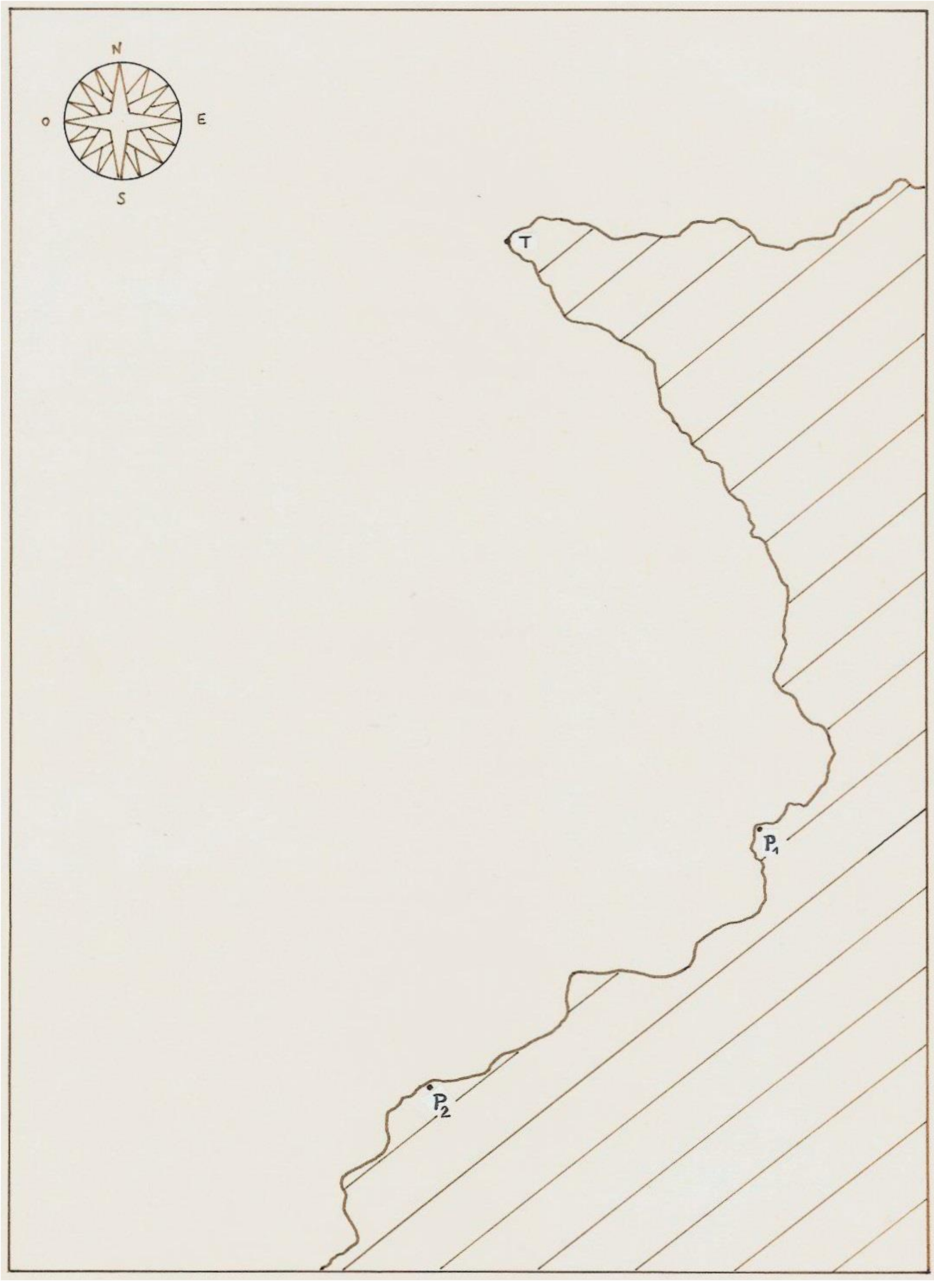


Retrouvez la position du bateau …

Observez le dessin ci-dessus : un navigateur vise les points T (tombée de la falaise), P_1 (premier phare) et P_2 (second phare). Il mesure ainsi une distance angulaire de 66° entre les points T et P1 , et de 140° entre les points T et P2 .
Les positions sur la carte de ces trois points de repère côtiers (des « amers » en langage maritime) sont connues.
A l'aide de ces données, déterminez avec précision la position du bateau sur la carte de la page suivante.

Phare de PORT-TUDY sur l'île de GROIX en BRETAGNE.

Carte maritime



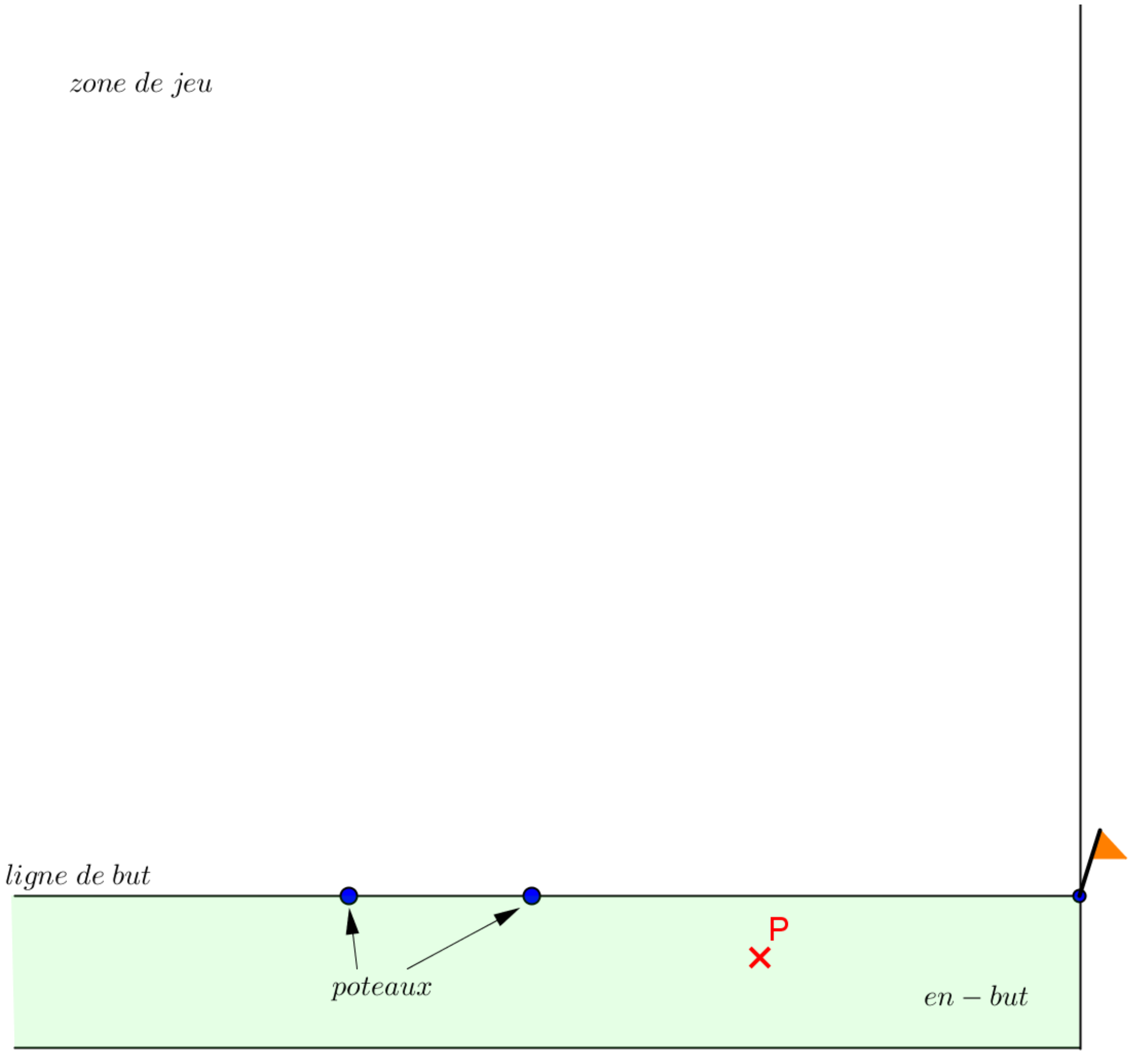
ESSAI TRANSFORMÉ ?

Au rugby, lorsqu'une équipe vient de marquer un *essai*, elle gagne le droit de tenter un *coup de pied de transformation*.

Pour cela, un joueur doit se placer dans la zone de jeu et expédier le fameux ballon ovale entre les poteaux et au-dessus de la barre transversale.

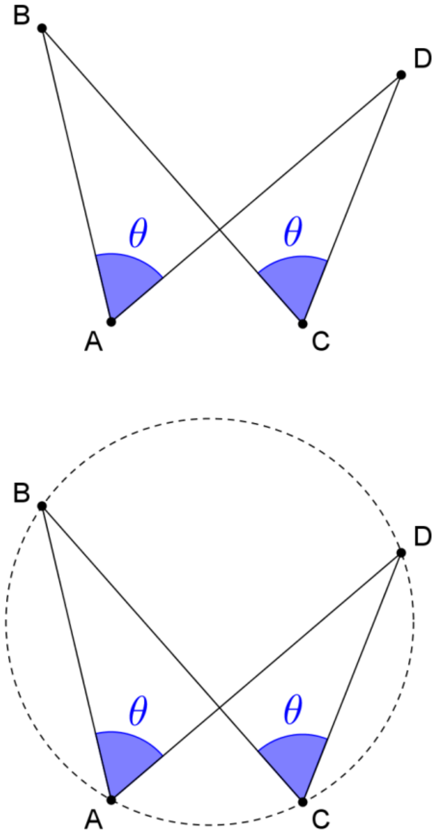
Selon les règles du rugby, le ballon doit être botté d'un point situé sur une droite d perpendiculaire à la *ligne de but* et passant par le point P où le ballon a été déposé dans *l'en-but* lors de l'essai.

1. En quel point de la droite d le joueur doit-il placer le ballon pour que l'angle de tir soit maximal (c'est-à-dire pour qu'il voie les poteaux sous le plus grand angle possible ?). Construisez ce point ci-dessous.
2. Où est-il le plus (le moins) avantageux d'aller marquer un essai ?



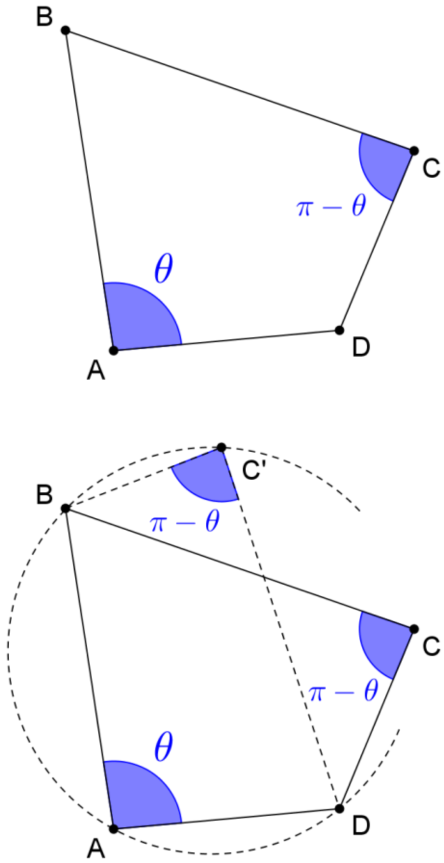
CONDITION POUR QUE QUATRE POINTS SOIENT COCYCLIQUES

Cas du quadrilatère croisé



Pour qu'un quadrilatère croisé *ABCD* soit inscriptible, il suffit que deux de ses angles opposés aient la même amplitude.

Cas du quadrilatère convexe



Pour qu'un quadrilatère convexe *ABCD* soit inscriptible, il suffit que deux de ses angles opposés soient supplémentaires.

Exercice

Démontrez les propriétés énoncées ci-dessus.

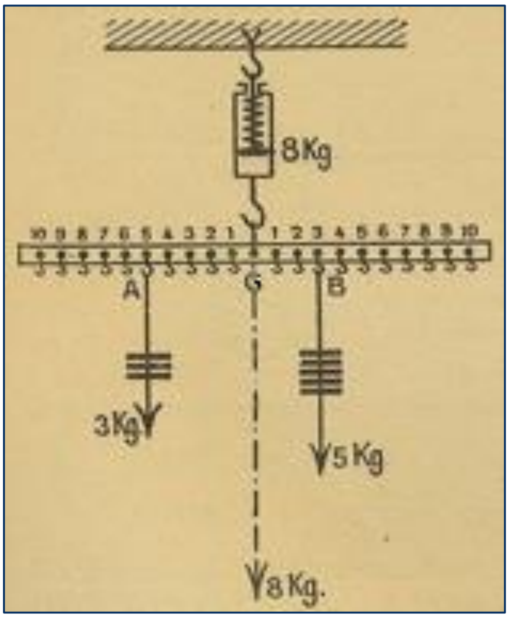
BARYCENTRES

LA LOI DES LEVIERS

L'illustration ci-contre, extraite d'un ancien manuel de mécanique, illustre la *loi des leviers*.

Une tige rigide, qui peut pivoter autour du point G, est équipée à intervalles réguliers de petits crochets destinés à recevoir des masses.
Dans la situation représentée, la tige est en équilibre horizontal car la masse de $3(kg)$, accrochée à 5 graduations de G, est équilibrée par la masse de $5(kg)$ accrochée à 3 graduations de G, de l'autre côté.

La loi des leviers peut s'exprimer par la formule $m_1 \cdot l_1 = m_2 \cdot l_2$ où m_1 et m_2 représentent les masses et où l_1 et l_2 représentent les longueurs des « bras de leviers » ($l_1 = |AG|$ et $l_2 = |GB|$).



Nous pouvons traduire vectoriellement le lien entre les positions des points A, B et G :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 3 \cdot \overrightarrow{AG} = 5 \cdot \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 3 \cdot \overrightarrow{GA} + 5 \cdot \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Dans chacune des situations suivantes, on indique les masses, en kilos, que l'on accroche à deux points A et B de la tige.

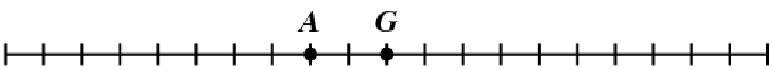
a) Connaissant la position d'un des deux points, déterminer celle de l'autre point pour que la tige conserve son équilibre horizontal.

b) Traduire vectoriellement le lien entre les positions des points A, B et G.

❶ $A : 1(kg)$ et $B : 1(kg)$

❷ $A : 1(kg)$ et $B : 2(kg)$

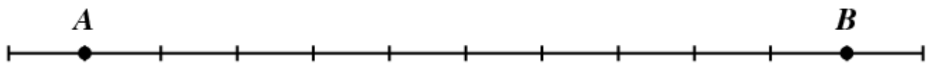
❸ $A : 3(kg)$ et $B : 1(kg)$



❹ $A : 3(kg)$ et $B : 2(kg)$

BARYCENTRE DE DEUX POINTS MASSIQUES

<u>Exemple</u> : sur le segment $[AB]$, construire un point G tel que $7\cdot\overrightarrow{GA}+3\cdot\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.



Voici une méthode pour trouver G :

$$7\cdot\overrightarrow{GA}+3\cdot\overrightarrow{GB}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad 7\cdot\overrightarrow{GA}+3\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \qquad \text{(relation de } \textsc{Chasles}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\quad 7\cdot\overrightarrow{GA}+3\cdot\overrightarrow{GA}+3\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\quad 10\cdot\overrightarrow{GA}+3\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\quad 10\cdot\overrightarrow{GA}=3\cdot\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{GA}=\frac{3}{10}\cdot\overrightarrow{BA}$$

Le point G ainsi construit est le *barycentre du point A de masse 7 et du point B de masse 3* ; on dit aussi *barycentre des points massiques $A(7)$ et $B(3)$* .

<u>Exercice</u> : sur le segment $[AB]$, construire un point G tel que $5\cdot\overrightarrow{GA}-2\cdot\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Le point G ainsi construit sera le *barycentre des points massiques $A(5)$ et $B(-2)$* [4].

Définition : le *barycentre* des points massiques $A(a)$ et $B(b)$ est le point G vérifiant la condition $a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (a et b sont des réels dont la somme n'est pas nulle ; ils sont les *masses* respectives des points A et B).

[4] On peut considérer des masses négatives en imaginant qu'une force appliquée en un point de masse négative est dirigée en sens opposé d'une force appliquée en un point de masse positive.

BARYCENTRE DE TROIS POINTS MASSIQUES

Exemple : dans le plan, construire un point G tel que $\overrightarrow{GA}+2\cdot\overrightarrow{GB}+5\cdot\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (voir feuille de travail n°1).

Méthode

Soit P un point quelconque. Transformons l'expression $\overrightarrow{PA}+2\cdot\overrightarrow{PB}+5\cdot\overrightarrow{PC}$.

Nous avons :

- $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA}$ (1)
- $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GB}\rightarrow 2\cdot\overrightarrow{PB}=2\cdot\overrightarrow{PG}+2\cdot\overrightarrow{GB}$ (2)
- $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC}\rightarrow 5\cdot\overrightarrow{PB}=5\cdot\overrightarrow{PG}+5\cdot\overrightarrow{GC}$ (3)

Additionnant membres à membres les égalités (1) , (2) et (3) , nous obtenons :

$$\overrightarrow{PA}+2\cdot\overrightarrow{PB}+5\cdot\overrightarrow{PC}=8\cdot\overrightarrow{PG}+(\overrightarrow{GA}+2\cdot\overrightarrow{GB}+5\cdot\overrightarrow{GC})$$

Cette égalité permet d'écrire l'équivalence suivante (expliquer) :

$$(\overrightarrow{GA}+2\cdot\overrightarrow{GB}+5\cdot\overrightarrow{GC})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}+2\cdot\overrightarrow{PB}+5\cdot\overrightarrow{PC}=8\cdot\overrightarrow{PG}\qquad(4)$$

Le second membre de cette équivalence permet maintenant de construire le point G , car :

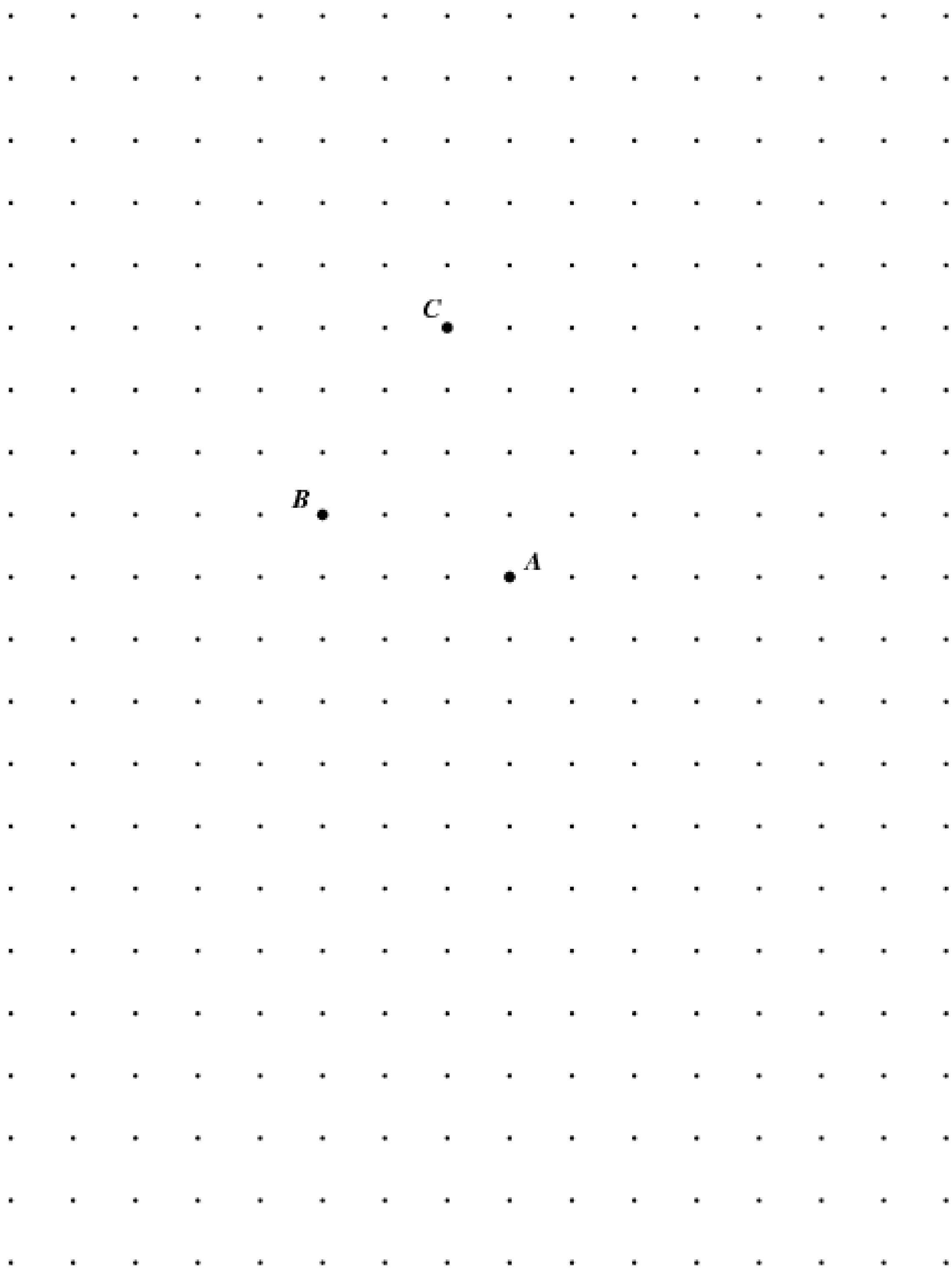
$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\cdot\overrightarrow{PB}+5\cdot\overrightarrow{PC}}{8}$$

Il est important de remarquer que le premier membre de l'équivalence (4) ne concerne pas le point P : le point G est donc indépendant du point P qui a servi à le construire !
Où serait-il astucieux de placer P pour construire G !?

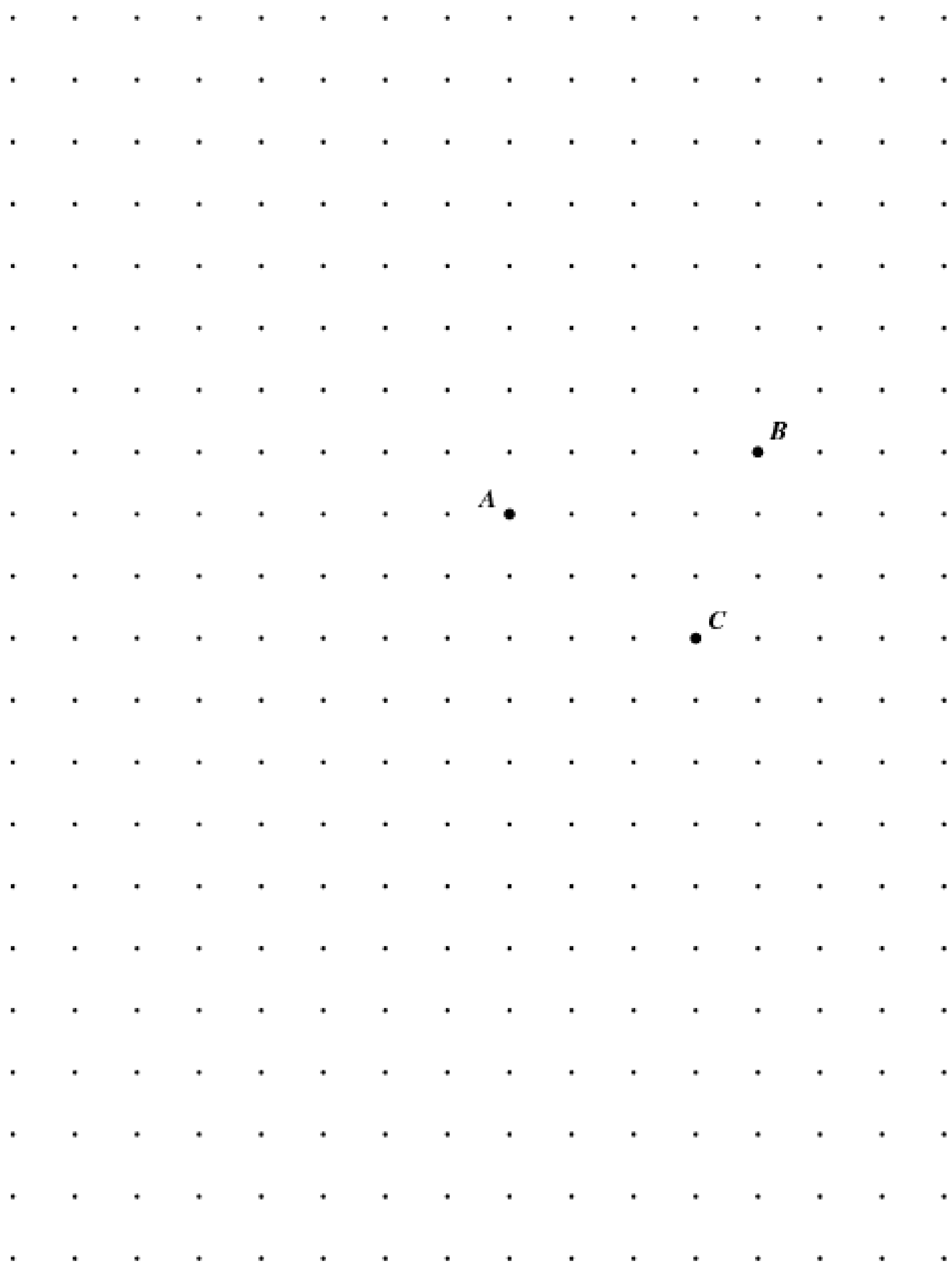
Exercice : dans le plan, construire un point G tel que $5\cdot\overrightarrow{GA}-2\cdot\overrightarrow{GB}+3\cdot\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (voir feuille de travail n°2).

Définition : le *barycentre* des points massiques $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ est le point G vérifiant la condition $a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB}+c\cdot\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (a , b et c sont des réels dont la somme n'est pas nulle ; ils sont les *masses* respectives des points A , B et C).

Feuille de travail n°1 : barycentre des points massiques *A(1)*, *B(2)* et *C(5)*



Feuille de travail n°2 : barycentre des points massiques *A(5)*, *B(-2)* et *C(3)*

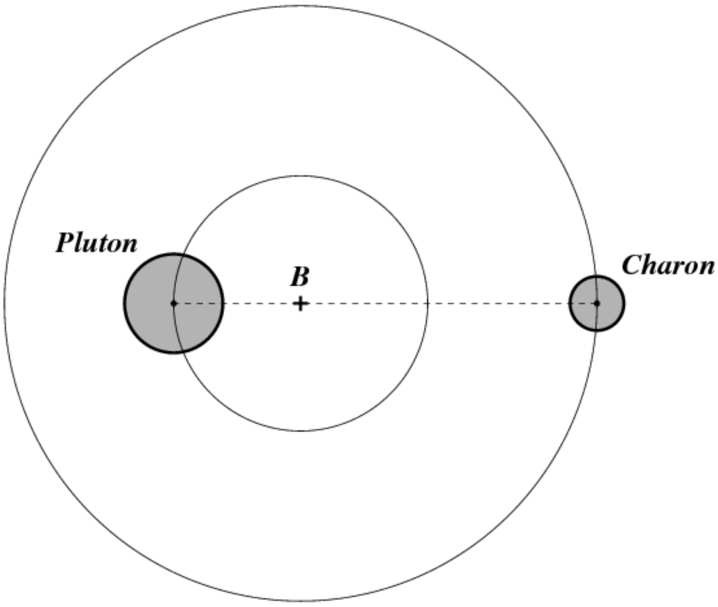


PLUTON ET CHARON

Découverte en 1930 par Clyde TOMBAUGH, un astronome américain de vingt-quatre ans, PLUTON est la planète la plus éloignée du Soleil. Elle est un monde extrêmement froid dont la température superficielle ne dépasse jamais - 223 °C .
En 1978, l'astronome américain James W. CHRISTY lui a découvert un satellite de dimensions considérables par rapport à la planète (1270 km de diamètre contre 3320 km pour PLUTON). Il s'agit donc en réalité d'une planète double !
Le satellite a été baptisé CHARON, du nom du passeur qui, dans la mythologie grecque, convoyait dans sa barque les âmes des défunts aux Enfers, royaume de PLUTON.

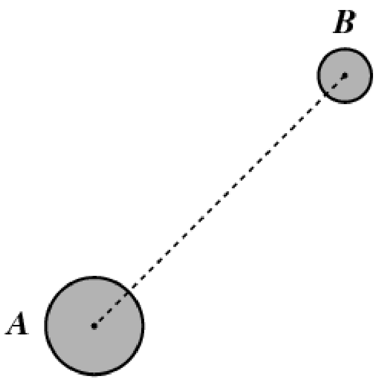
La sonde NEW HORIZONS, lancée par la NASA en janvier 2006, a été la première à atteindre PLUTON et ses satellites en juillet 2015.

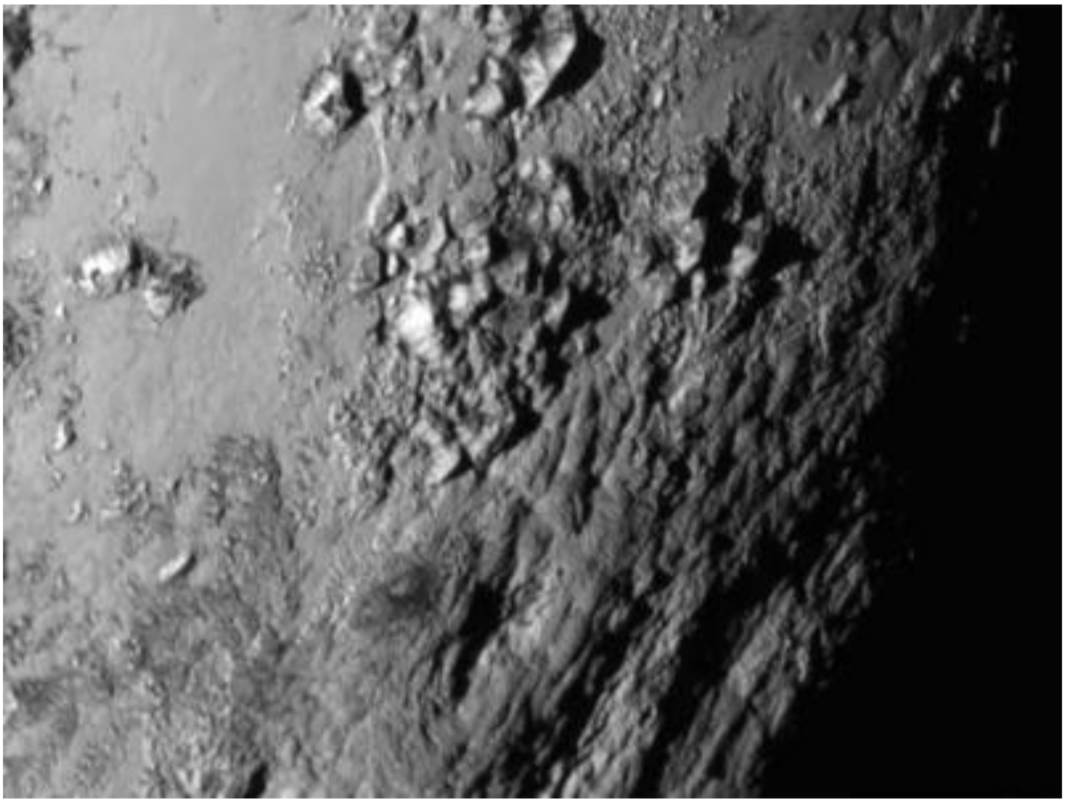
1. PLUTON et CHARON tournent autour de leur barycentre commun (le point B sur la figure ci-dessous). Calculer à quelle distance du centre de PLUTON se trouve le barycentre en se basant sur les données suivantes : la masse de PLUTON est estimée à $1{,}314 \cdot 10^{22}\,(kg)$, celle de CHARON à $1{,}52 \cdot 10^{21}\,(kg)$ et la distance qui les sépare à $19640\,(km)$.



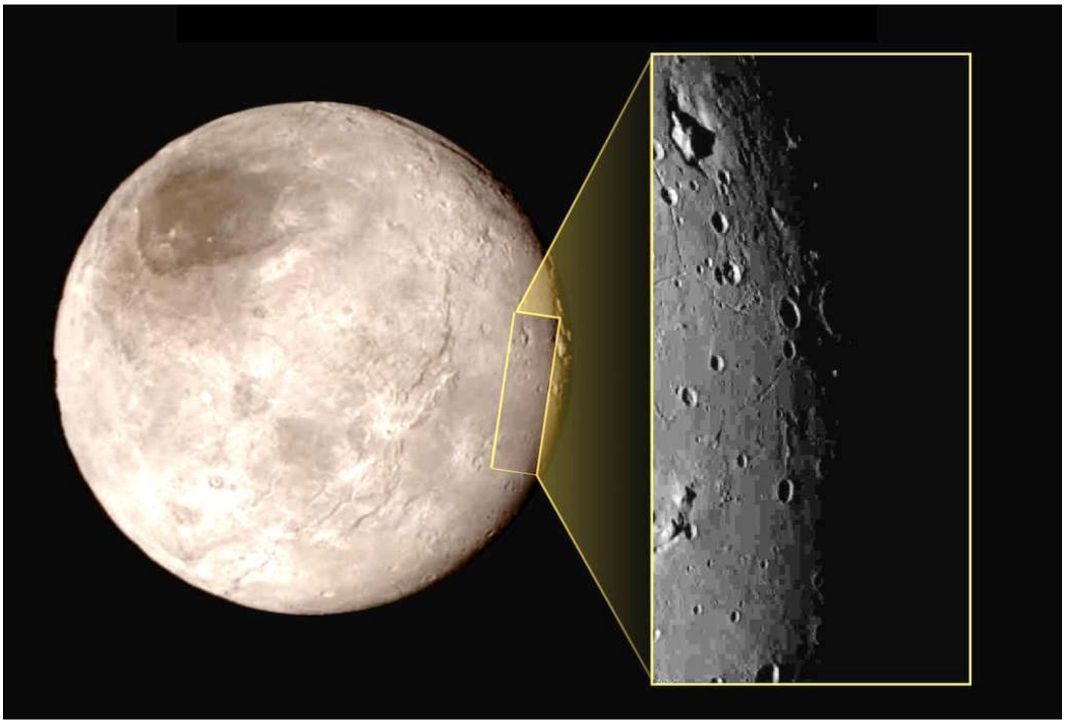
2. Une étoile binaire est constituée de deux étoiles gravitant autour de leur barycentre. Une étoile A dont la masse est égale à 51 fois celle du Soleil, et une étoile B de masse égale à 43 fois celle du Soleil, sont distantes de 75 millions de kilomètres.

   Situer le barycentre par rapport à chacune des deux étoiles.





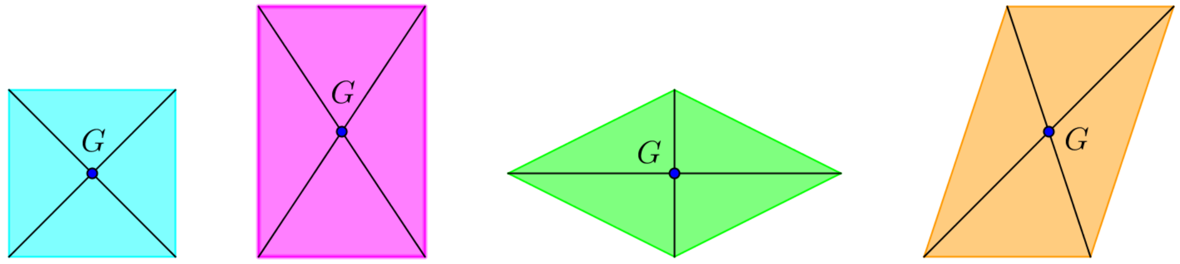
Vue d'une partie de la surface de Pluton, proche de son équateur. La photo, prise le 15 juillet 2015 par la sonde américaine New Horizons, révèle une chaîne de montagnes jeunes dont certaines culminent à 3500 mètres d'altitude (source : www.nasa.gov)



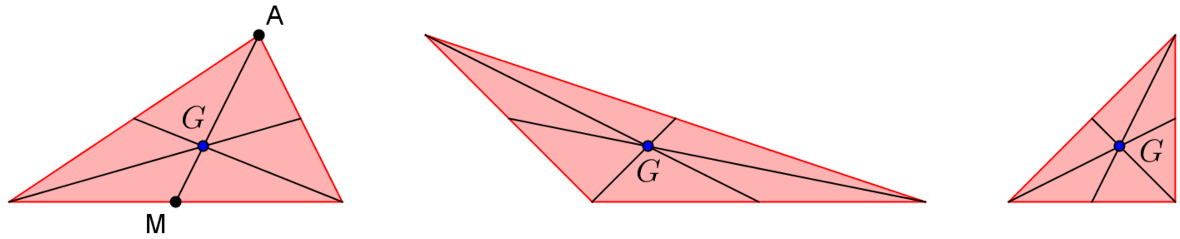
Vue de Charon et agrandissement d'une partie de sa surface. La hauteur du rectangle correspond à environ 390 kilomètres. On y observe des cratères et une montagne curieusement située au cœur d'une dépression (coin supérieur gauche). La photo date du 14 juillet 2015 et a été prise à environ 79000 kilomètres de distance.

Centre de gravité d'une forme usuelle

Pour un parallélogramme, le centre de gravité est le point d'intersection des diagonales. Il en va donc de même pour les parallélogrammes particuliers que sont le carré, le rectangle et le losange.



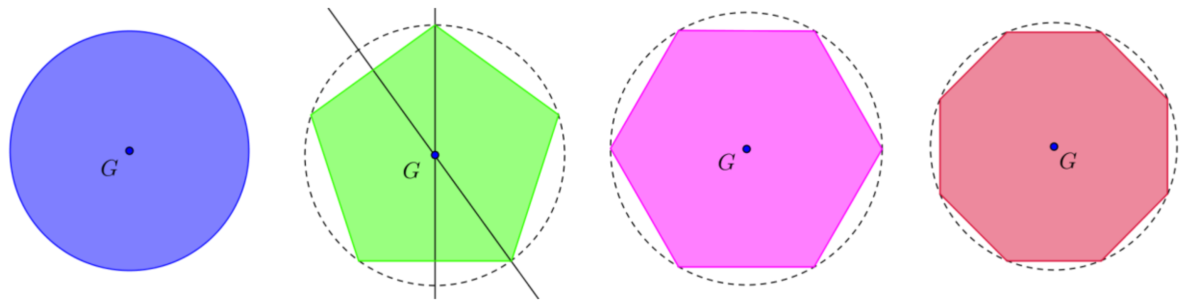
Pour un triangle, le centre de gravité est le point d'intersection de ses médianes.



Rappelons que les médianes d'un triangle se coupent au tiers de leur longueur.
Dans la figure de gauche, cela donne lieu aux égalités suivantes :

$$|MG| = \frac{1}{3}|MA| \qquad |AG| = \frac{2}{3}|AM| \qquad |AG| = 2|AM| \ .$$

Pour un disque, il s'agit du centre du disque. Pour un polygone régulier, le centre de gravité est le centre du cercle circonscrit (que l'on trouvera à l'intersection des médiatrices de deux côtés du polygone).

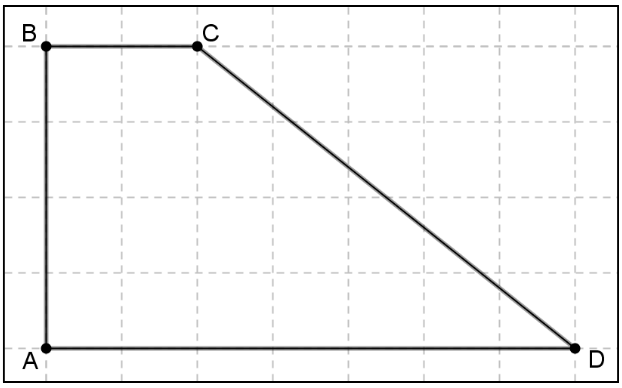


Centre de gravité d'une forme plus complexe

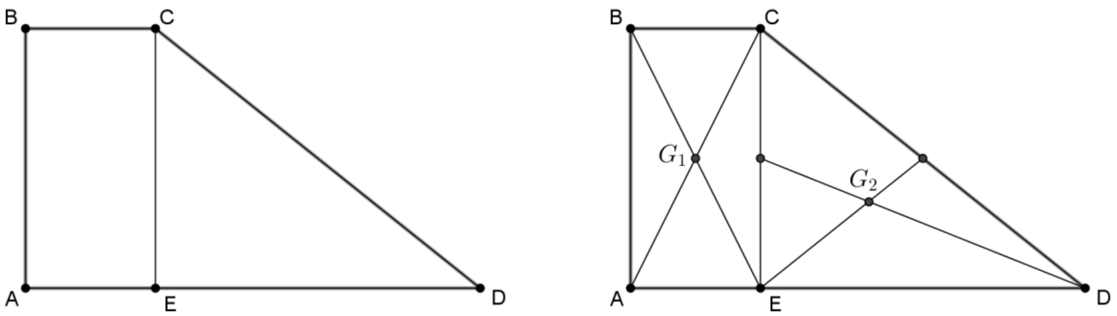
> **Démarche**
>
> 1. Décomposer la forme complexe en formes simples.
> 2. Déterminer le centre de gravité de chacune des formes simples.
> 3. Le centre de gravité de la forme complexe est le barycentre des centres de gravité obtenus, pondérés par les « masses » des figures simples, masses proportionnelles à leurs aires.

Exemple

Déterminer le centre de gravité du trapèze rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous, sachant que $|AB| = 4\,(\text{cm})$, $|BC| = 2\,(\text{cm})$ et $|AD| = 7\,(\text{cm})$.



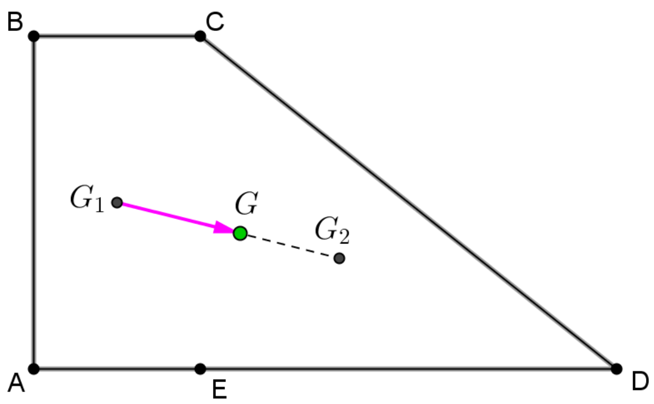
Décomposons le trapèze en un rectangle $ABCE$ et un triangle CDE.
Construisons ensuite les centres de gravité respectifs G_1 et G_2 de ces deux formes.



Étant donné que l'aire du rectangle est de $8(cm^2)$ et que celle du triangle est de $10(cm^2)$, le centre de gravité G du trapèze est le barycentre des points pondérés $G_1(8)$ et $G_2(10)$, ou plus simplement $G_1(4)$ et $G_2(5)$.

D'après la définition du barycentre, il faut donc à construire G tel que $4\cdot\overrightarrow{GG_1} + 5\cdot\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$.

Ce point G vérifie aussi la relation $\overrightarrow{G_1G} = \dfrac{5}{9}\cdot\overrightarrow{G_1G_2}$ (vérifiez).

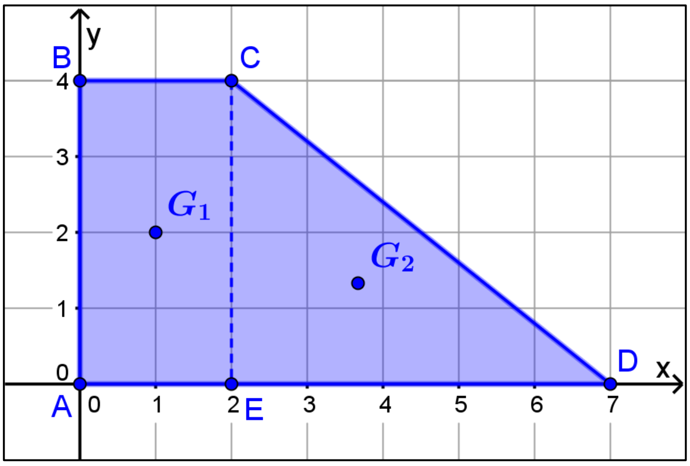


Méthode analytique

La première chose à faire est de définir un repère.

Un choix naturel est de placer l'origine en A, et de choisir les axes pour que les sommets soient $B(0,4)$, $C(2,4)$ et $D(7,0)$.

Nous obtenons ainsi les centres de gravité $G_1(1,2)$ et $G_2(11/3,4/3)$. Pour le rectangle, c'est évident.



Pour le triangle, rappelons que les coordonnées du centre de gravité s'obtiennent en prenant la moyenne arithmétique des abscisses des sommets, et puis celle des ordonnées :

$$G_2 = \left(\frac{x_C + x_D + x_E}{3}, \frac{y_C + y_D + y_E}{3}\right) = \left(\frac{2+7+2}{3}, \frac{4+0+0}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Considérant que le point G a les coordonnées inconnues (x,y), reprenons la relation $4\cdot\overrightarrow{GG_1} + 5\cdot\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$ et remplaçons chaque vecteur par ses composantes :

$$4\cdot\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}\frac{11}{3}-x\\\frac{4}{3}-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}4-4x\\8-4y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{55}{3}-5x\\\frac{20}{3}-5y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}\frac{67}{3}-9x\\\frac{44}{3}-9y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

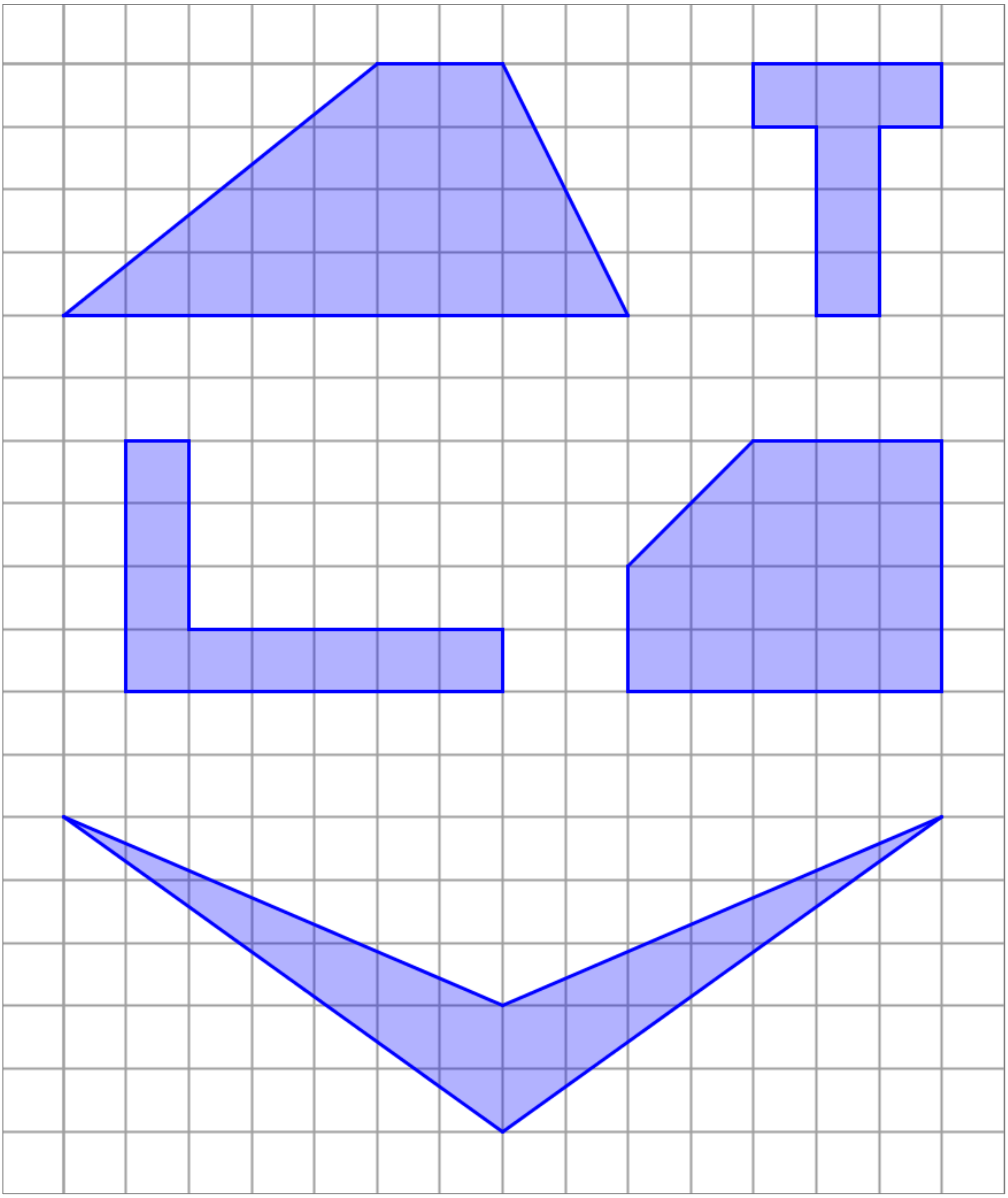
$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\frac{67}{3}-9x=0\\\frac{44}{3}-9y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=\frac{67}{27}\\y=\frac{44}{27}\end{cases}$$

Le centre de gravité du trapèze est donc $G\left(\frac{67}{27}, \frac{44}{27}\right) \approx (2.48, 1.63)$.

Exercices

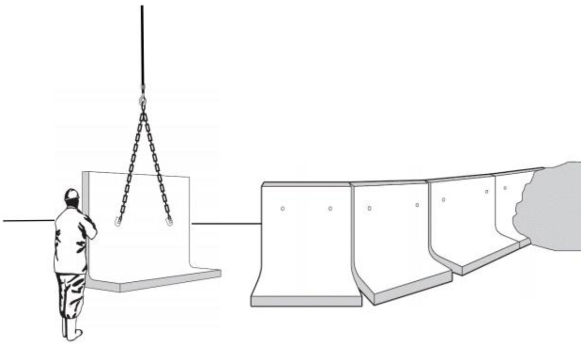
1. Déterminez le centre de gravité de chacune des formes ci-dessous.
   Vérifiez avec GEOGEBRA.



2. <u>Centre de gravité d'un mur de soutènement</u>

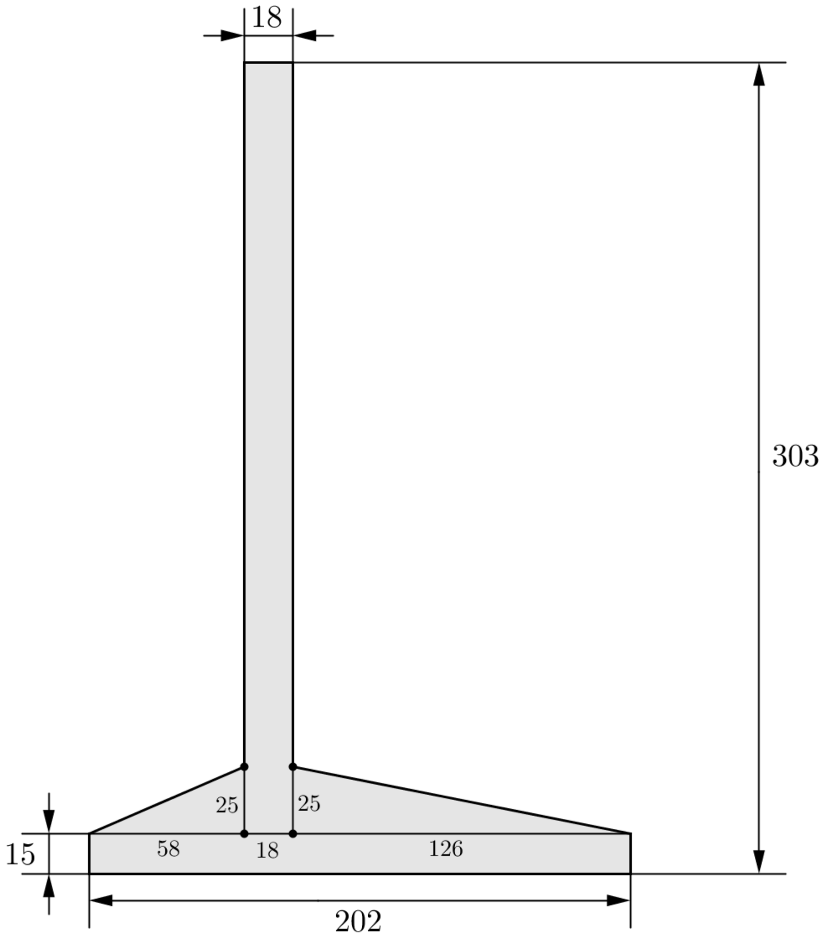
« Un mur de soutènement est un élément préfabriqué mis en place manuellement à l'aide d'une grue et d'élingues, et destiné à soutenir des terres ».

Si l'installation est mal réalisée, la poussée des terres peut provoquer le basculement des murs de soutènement, comme le montre la photo ci-dessous.



Pour éviter ce genre d'accident, les techniciens doivent réaliser le « calcul du basculement », démarche qui inclut le calcul précis du centre de gravité d'un mur de soutènement.

Déterminer le centre de gravité du mur de soutènement dont le profil et toutes les dimensions utiles sont données ci-dessous. Utilisez GEOGEBRA.

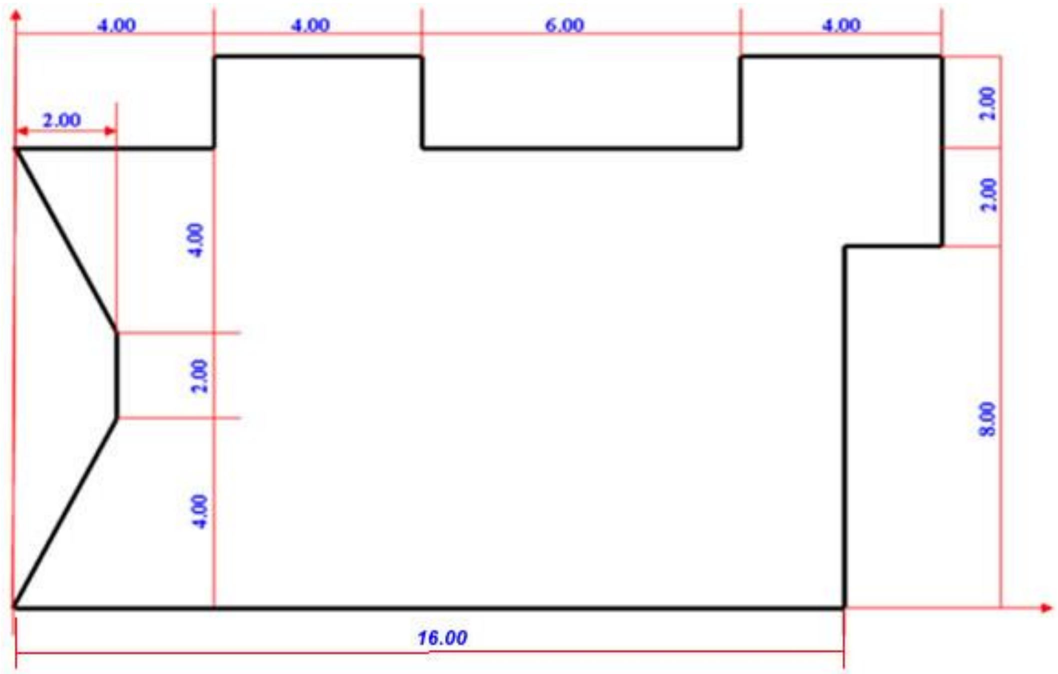


Source : http://www.idropproject.com/uploads/1/5/0/9/15095244/moments_stat001d.pdf .

3. <u>Centre de gravité d'un plancher</u>

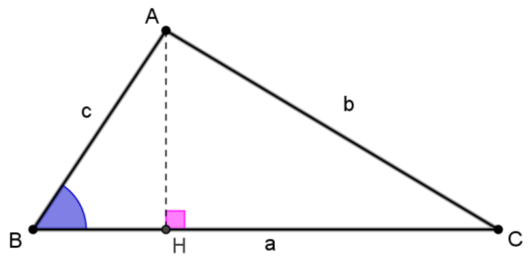
Réaliser des constructions résistant aux tremblements de terre est vital dans certaines régions du globe. Sur le site Internet http://www.structureparasismic.com , on trouve les règles de construction parasismique en vigueur en Algérie et au Maroc, ainsi que des descriptions de techniques de construction. Il apparaît notamment qu'il est important de savoir calculer le centre de gravité d'une forme quelconque, par exemple la forme d'un plancher dans une habitation.

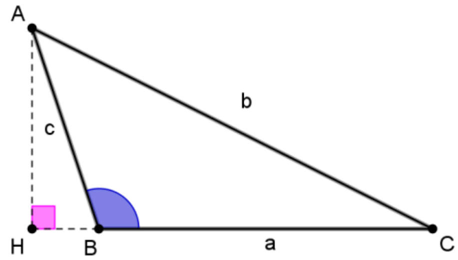
Déterminez le centre de gravité du plancher dont voici la forme (source de l'image : http://www.structureparasismic.com/TrucsAstucesCalculSismique.html).
Vous pouvez utiliser GEOGEBRA !



QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE

RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE





① **Le théorème de PYTHAGORE généralisé**

Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminué du double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces côtés.

Ce théorème donne lieu aux relations suivantes, appelées « relations aux cosinus » ou encore « formules d'AL KASHI ».

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Si un des angles est droit, par exemple $\hat{A}$, alors $\cos \hat{A} = 0$ et nous retrouvons le théorème de PYTHAGORE dans un triangle rectangle.

Application : calcul des hauteurs et de l'aire d'un triangle en fonction des côtés

Désignons par p la moitié périmètre du triangle : $2p = a + b + c$.

Soit $h_a = |AH|$ la hauteur issue du sommet A. On démontre la formule suivante (exercice)[5] :

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Désignant par S l'aire du triangle, il en découle la formule de HÉRON d'Alexandrie (IIe siècle après J.-C.)

Formule de HÉRON

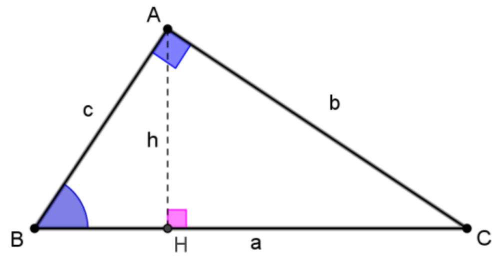
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

[5] Indications pour la démonstration : à l'aide du théorème de PYTHAGORE, exprimer h_a en fonction de b et de $|HC|$; ensuite, écrire la formule des cosinus relativement à c^2 et y faire apparaître $|HC|$; isoler $|HC|$ afin de l'exprimer en fonction des côtés et, finalement, remplacer dans la première égalité donnant h_a.

② Le théorème de la hauteur dans un triangle rectangle

Dans tout triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal au produit des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$$\boxed{h^2 = |BH| \cdot |HC|}$$



③ Le théorème du carré d'un côté de l'angle droit

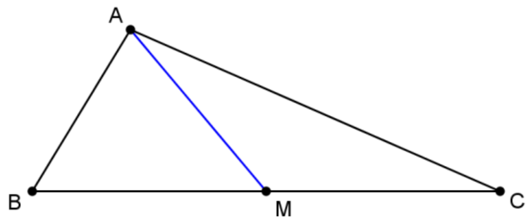
Dans tout triangle rectangle, le carré d'un côté de l'angle droit est égal au produit de sa projection sur l'hypoténuse par l'hypoténuse.

$$\boxed{b^2 = |BC| \cdot |HC| \quad \text{et} \quad c^2 = |BH| \cdot |BC|}$$

④ Premier théorème de la médiane

Dans tout triangle, la somme des carrés de deux côtés est égale à deux fois le carré de la médiane relative au troisième côté plus deux fois le carré de la moitié de ce côté.

$$\boxed{|AB|^2 + |AC|^2 = 2 \cdot |AM|^2 + 2 \cdot |BM|^2}$$

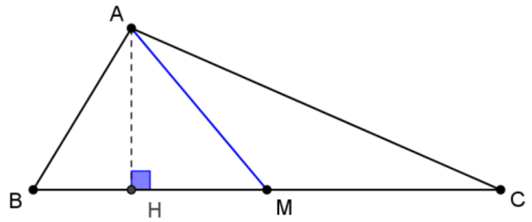


⑤ Second théorème de la médiane

Dans tout triangle, la différence des carrés de deux côtés est égale à deux fois le produit du troisième côté par la projection de la médiane correspondante sur ce côté.

$$\boxed{|AC|^2 - |AB|^2 = 2 \cdot |BC| \cdot |HM|}$$

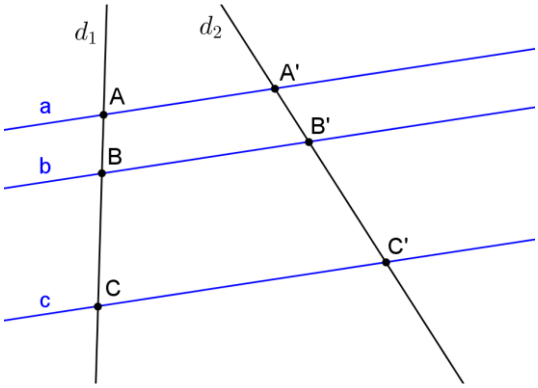
(avec, dans le cas de la figure, $|AC| > |AB|$)



Exercice : démontrez les théorèmes ci-dessus.

LE THÉORÈME DE THALÈS

Voici deux droites d_1 et d_2 coupées par des droites parallèles a, b et c.



Théorème de THALÈS

Un faisceau de droites parallèles découpe sur deux droites des segments dont les longueurs sont proportionnelles.

$$a // b // c \Rightarrow \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

Autres relations découlant de ce théorème

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|} \qquad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \qquad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}$$

Réciproque du théorème de THALÈS

Si un faisceau détermine sur deux droites qu'il coupe des segments homologues proportionnels, et si deux droites du faisceau sont parallèles, alors toutes les droites du faisceau sont parallèles.

Expression vectorielle du théorème de Thalès

Supposons que $\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB}$, ce qui s'exprime en disant que le *rapport de section* du triple de points (A, B, C) est égal à r.
Alors, le rapport de section du triple de points (A', B', C') est égal à r aussi.

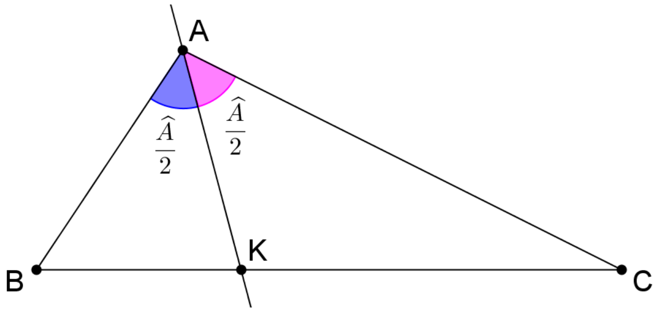
Soient d_1 et d_2 des droites, soient A, B et C des points distincts sur d_1 et A', B' et C' leurs projections sur d_2 parallèlement à une direction donnée (voir figure ci-dessus).

$$\text{Si } \overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ alors } \overrightarrow{A'C'} = r \cdot \overrightarrow{A'B'}.$$

Une projection parallèle conserve le rapport de section.

Une application du théorème de Thalès : le théorème de la bissectrice

La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle partage le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.



Thèse : $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

Preuve : exercice.

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

LOGIQUE DES PROPOSITIONS

DÉMONTRER

LA DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

A B C D E

TABLE DES MATIERES