# NOMBRES COMPLEXES

## L’apport des algébristes italiens de la Renaissance

A l’origine de l’apparition des nombres complexes, se trouvent les recherches menées sur la résolution des équations du troisième degré. Les mathématiciens Arabes avaient déjà obtenus des résultats significatifs dans ce domaine, en particulier Omar KHAYYAM ($XI^e$ siècle) qui donna des méthodes de résolution basées sur l’intersection d’une parabole avec une hyperbole.
Les résultats des Arabes étaient probablement connus des algébristes Italiens de la Renaissance :

*« L’Italie de la fin du $XV^e$ siècle est active dans la production de travaux d’arithmétique pratique. Luca PACIOLI (1450-1510), frère franciscain qui occupa une chaire de mathématiques à Milan, publie le premier livre imprimé contenant véritablement de l’algèbre : Summa de aritmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita (1494). Il y reprend la classification des Arabes pour les types d’équations du second degré. Il semble d’ailleurs que l’ensemble des acquis algébriques de ces derniers soit ici connu et assimilé et serve de point de départ aux travaux des Italiens. »*

*Extrait de « Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédales » , A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, Éd. du Seuil, 1986.*

Il semble bien que la première formule de résolution d’une équation de la forme $x^3 = cx + b$ , fut proposée en 1500, par un professeur de Bologne, Scipione del FERRO (1456-1526).
Malgré tous les progrès réalisés par les Arabes sur les équations cubiques, cette formule constituait une nouveauté. Mais comme c’était l’habitude à l’époque, del FERRO tint sa méthode secrète.

Vers 1535, Niccolo FONTANA de Brescia (1500-1557), dit TARTAGLIA, réussit à résoudre un certain nombre d’équations du troisième degré dans le cadre d’un concours. Pour des raisons encore obscures, il accepte de dévoiler sa formule à Girolamo CARDANO (1501-1576). Celui-ci promet de la garder secrète, mais change d’avis en apprenant que del FERRO serait à l’origine de la découverte. CARDANO publie la formule dans l’*Ars Magna* en 1545, provoquant la rancune de TARTAGLIA pour de longues années.

Voici la formule, connue depuis lors sous le nom de formule de CARDANO :

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} \ .$$

CARDANO l’utilise pour résoudre des équations de la forme $x^3 = cx + b$ avec $c > 0$ et $d > 0$.
Ainsi, pour l’équation $x^3 = 3x + 2$ ( $c = 3$ et $d = 2$ ) une solution est donnée par :

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1-1}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1-1}} = 2 \ .$$

Notons bien que la formule ne fournit pas l’autre solution $x = -1$ que nous pourrions obtenir par la méthode de HORNER.

Dans certains cas, la méthode de CARDANO se révèle infructueuse. Ainsi, pour l'équation $x^3 = 19x + 30$ , la formule mène à une impasse car elle donne un nombre négatif sous la racine carrée. Pourtant, nous pouvons vérifier que cette équation a pour ensemble de solutions $S = \{2,3,5\}$ (le faire).

Dans son *Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*, écrit en italien et paru à Bologne en 1572, Raffaele BOMBELLI trouve une manière originale pour surmonter - partiellement - ce genre de difficulté.
Il étudie l'équation $x^3 = 15x + 4$ ( $c = 15$ et $d = 4$ ) dont il sait qu'elle possède le réel $4$ comme solution.
Il applique d'abord la formule de CARDANO :

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} \qquad (1) .$$

Le problème est de nouveau la présence de la racine carrée d'un négatif, mais BOMBELLI passe outre et accepte de la prendre en considération.
Il décide en outre de lui appliquer une règle algébrique connue en considérant que $\left(\sqrt{-121}\right)^2 = -121$ . Ce faisant, il accepte aussi que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ .

Au cours de ses travaux, il constate encore que

$$\begin{aligned} \left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 \\ &= 8 + 12 \cdot \sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11 \cdot \sqrt{-1} \\ &= 2 + \sqrt{-121} \ . \end{aligned}$$

D'une façon analogue, il trouve que $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}$ (vérifier).

En remplaçant dans l'équation (1) , il obtient

$$x = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 \ !$$

L'audace de BOMBELLI a été de donner un statut à $\sqrt{-1}$ avec la volonté de maintenir la validité de la formule de CARDANO.

*Ce genre de démarche n'est pas sans en rappeler d'autres …*

*Pensons à la règle* $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $(a \neq 0)$ *qui, au début de l'étude des puissances, est d'abord établie pour* $p$ *et* $q$ *naturels avec* $p > q$ .

*Que se passe-t-il si* $p \leq q$ *? Par exemple, si l'on calcule* $\dfrac{a^2}{a^5}$ *?*

*D'une part, on a* $\dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{a^3}$ . *D'autre part, si l'on veut que la règle reste valable, il faut accepter l'existence d'exposants négatifs (car* $\dfrac{a^2}{a^5} = a^{-3}$ *) et leur donner un sens qui soit cohérent avec les règles de calculs antérieures :* $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ .

Revenons à l'objet noté $\sqrt{-1}$ , possédant la propriété $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ . Il ne s'agit pas d'un nombre réel, car tout réel possède un carré positif.

De nos jours, on note $i = \sqrt{-1}$ avec la propriété $i^2 = -1$ . Cet objet jouit du statut de nombre et est appelé *nombre imaginaire*.

Une des conséquences de l'existence de $i$ est que toutes les équations du second degré admettent au moins une solution.

Exemple : résoudre l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ .

Calculons le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 = 16 \cdot i^2$ .

Les solutions sont : $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16 \cdot i^2}}{2} = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$ et $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{16 \cdot i^2}}{2} = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ .

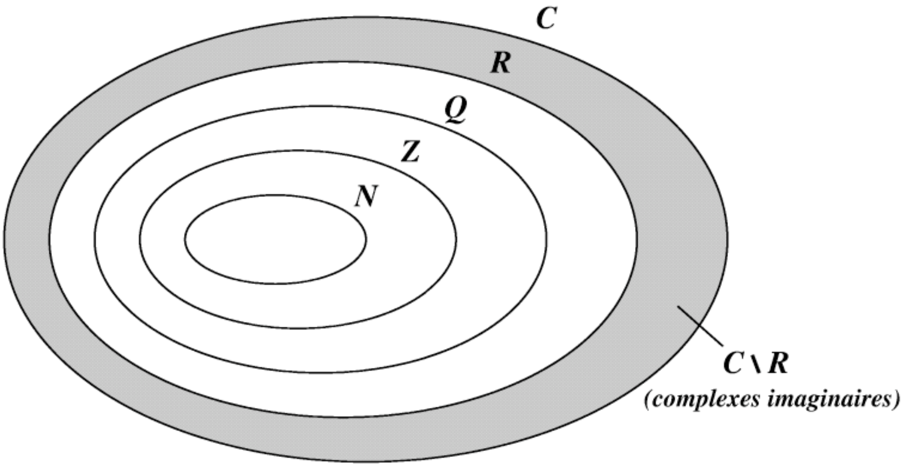
Ces solutions sont des *nombres complexes*, c'est-à-dire qui sont la somme d'un nombre réel et d'un multiple réel de $i$ .

# 1. Définition

Un nombre complexe $z$ est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = a + bi$ , où $a$ et $b$ sont des nombres réels, et $i$ un nombre tel que $i^2 = -1$ .

Le réel $a$ est appelé partie réelle de $z$ et l'on note $\mathrm{Re}(z) = a$ .
Le réel $b$ est appelé partie imaginaire de $z$ et l'on note $\mathrm{Im}(z) = b$ .

L'ensemble des nombres complexes est noté $\boldsymbol{C}$ .
Étant donné que tout réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle (par exemple, $5 = 5 + 0 \cdot i$ ), l'ensemble $\boldsymbol{C}$ contient l'ensemble $\boldsymbol{R}$ des réels.
Nous avons ainsi la chaîne d'inclusion représentée par le diagramme ci-dessous.




La zone grise représente l'ensemble des nombres complexes qui ne sont pas des réels (les *complexes imaginaires*). Par exemple $z = 3 - 2i$ .
On y trouve également les *imaginaires purs*, c'est-à-dire les nombres complexes dont la partie réelle est nulle comme $i$ , $3i$ , $-2i$ , …

# 2. Opérations sur les nombres complexes

Nous admettrons que l'on calcule dans $\boldsymbol{C}$ comme l'on calcule dans $\boldsymbol{R}$, mais en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$.

## 2.1. Addition et soustraction

Prenons par exemple les nombres complexes $z_1 = 3 + 5i$ et $z_2 = 4 - 2i$.

Nous avons : 1° $z_1 + z_2 = (3 + 5i) + (4 - 2i) = 7 + 3i$

2° $z_1 - z_2 = (3 + 5i) - (4 - 2i) = -1 + 7i$

On peut facilement généraliser à la somme et à la différence de deux nombres complexes $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$.

## 2.2. Multiplication

Reprenons $z_1$ et $z_2$ du paragraphe précédent :

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 5i) \cdot (4 - 2i) = 12 - 6i + 20i \underline{-10i^2} = 12 + 14i \underline{+10} = 22 + 14i\,.$$

<u>Cas particulier : produit de deux nombres complexes conjugués</u>

| |
|---|
| <u>Définition</u> : deux nombres complexes sont dits conjugués s'ils ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées.<br>Le conjugué du nombre complexe $z$ se note $\bar{z}$. Si $z = a + bi$, on a $\bar{z} = a - bi$. |

Si $z = a + bi$, on vérifie facilement que $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Par exemple : $(3 + 5i) \cdot (3 - 5i) = 9 - 15i + 15i \underline{-25i^2} = 9 \underline{+25} = 34$.

<u>Puissances successives de $i$</u>

| | | | |
|---|---|---|---|
| $i^0 = 1$ | $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$ | $i^8 = 1$ | |
| $i^1 = i$ | $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ | $i^9 = i$ | |
| $i^2 = -1$ | $i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$ | $i^{10} = -1$ | |
| $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ | $i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ | $i^{11} = -i$ | etc. |

## 2.3. Division

Pour diviser le complexe $z_1$ par le complexe $z_2$, on multiplie chacun d'eux par le conjugué de $z_2$, et on écrit le quotient sous la forme $a + bi$.

<u>Exemple</u> : soient les nombres complexes $z_1 = 6 - i$ et $z_2 = 1 + 3i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6 - i}{1 + 3i} = \frac{(6 - i) \cdot (1 - 3i)}{(1 + 3i) \cdot (1 - 3i)} = \frac{3 - 19i}{1 + 9} = \frac{3}{10} - \frac{19}{10}i$$

## Exercices

1. Déterminer les réels $x$ et $y$ pour que les égalités suivantes soient vraies.
   Pour cela, il faut utiliser le fait que :

   > Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

   a) $(2x+1)+(3y-2)=15+4i$

   b) $(x+y)-(2x-y)=3+6i$

   c) $xi-y-x+3i=0$

---

2. Calculer et donner la réponse sous la forme $a+bi$ .

   a) $(2i+3)+(-5i+1)-(3-2i)$

   b) $2\cdot(3-5i)$

   c) $(3-2i)^2$

   d) $(1-i)^3$

   e) $(8-3i)\cdot(8+3i)$

   f) $\left(-2+\sqrt{3}\cdot i\right)^2$

   g) $\dfrac{1}{1+3i}$

   h) $\dfrac{1+i}{1-2i}$

   i) $\dfrac{1}{i}$

   j) $\dfrac{i}{2+3i}+\dfrac{1}{2-3i}$

   k) $\dfrac{4-i}{2-i}+\dfrac{4+i}{2+i}$

   l) $\dfrac{1}{\cos\theta+i\cdot\sin\theta}$

---

3. Montrer que $\dfrac{a+ib}{a-ib}+\dfrac{a-ib}{a+ib}$ $(a\ ,\ b\in \boldsymbol{R}$ et $a$ ou $b\neq 0)$ est un nombre réel et calculer ce nombre.

(ULB)

---

# 3. Équations du second degré

## 3.1. Équations binômes

### (ou la recherche des racines carrées d'un nombre complexe)

Il s'agit d'équations de la forme $z^2 = a + bi$ .
Les nombres $z$ solutions d'un telle équation sont les *racines carrées* de $a + bi$ . Il est assez facile de montrer que tout nombre complexe admet deux racines carrées opposées.

| Exercice résolu |
|---|
| Résoudre l'équation $z^2 = 3 + 4i$ (c'est-à-dire rechercher les racines carrées de $3 + 4i$ ). |

Solution

Posons $z = x + yi$ , les nombres $x$ et $y$ étant des réels.

Nous avons successivement :

$$(x + yi)^2 = 3 + 4i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2xyi - y^2 = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (2), nous tirons $y = \dfrac{2}{x}$ .

Remplaçant dans (1), nous obtenons : $x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ .

Pour résoudre cette équation bicarrée, nous posons $t = x^2$ de façon à obtenir $t^2 - 3t - 4 = 0$ .

Cette équation du second degré d'inconnue $t$ admet les solutions $t = -1$ et $t = 4$ .

Nous trouvons ainsi
- $x^2 = -1$ (à rejeter car $x$ est un réel) ;
- $x^2 = 4$ et donc $x_1 = -2$ ou $x_2 = 2$ .

Les valeurs correspondantes de $y$ sont : $y_1 = \dfrac{2}{x_1} = -1$ et $y_2 = \dfrac{2}{x_2} = 1$ .

Finalement, les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = -2 - i$ et $z_2 = 2 + i$ .

---

Exercice : résoudre les équations suivantes.

a) $z^2 = 5 + 2i$

b) $z^2 = 1$

c) $z^2 + 4 = 0$

d) $z^2 = i$

e) $z^2 = 5 - 12i$

f) $z^2 = -8 - 6i$

## 3.2. Équations complètes

Un premier exemple de ce type d'équation se trouve à la page 3. Il s'agissait d'une équation du second degré complète à coefficients réels.

Voici un exemple d'équation complète à coefficients complexes.

Exercice résolu

Résoudre l'équation $2x^2 + (2+3i)\cdot x + 2i - 1 = 0$ .

Solution

Calculons le discriminant : $\Delta = (2+3i)^2 - 4\cdot 2\cdot (2i-1) = \underline{4} + 12i + \underline{9i^2} - 16i + \underline{8} = 3 - 4i$ .

Pour calculer les solutions, nous avons besoin des racines carrées de $\Delta$ . Pour les trouver, nous devons donc résoudre l'équation binôme : $z^2 = 3 - 4i$ .
En appliquant la méthode décrite au paragraphe 3.1. , nous obtenons les solutions $2 - i$ et $-2 + i$ .

Les solutions de l'équation initiales sont donc :

$$x = \frac{-(2+3i) \pm (2-i)}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-4i}{4} = -i \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4-2i}{4} = -1 - \frac{1}{2}i \ .$$

---

Exercice : résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 + 9 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $x^2 + (2i+1)\cdot x + 2i = 0$

d) $2ix^2 - (1+2i)\cdot x + i - 1 = 0$

e) $ix^2 + (2+i)\cdot x - (i-1) = 0$

f) $2x^2 + (2+3i)\cdot x + 2i - 1 = 0$

g) $(-3+i)\cdot x^2 + (5i-1)\cdot x + 2 = 0$

h) $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$

i) $ix^4 - (5i+2)\cdot x^2 + 5\cdot (i+1) = 0$

j) $x^4 - 13x^2 - 36 = 0$

---

### 3.3. Le théorème de d'ALEMBERT

La question du nombre de racines d'une équation polynomiale est ancienne. Dès 1629, le mathématicien hollandais, né en France, Albert GIRARD (1595-1632) pensa que toute équation de degré $n$ admettait $n$ racines, ce qui laisse supposer que l'ensemble des nombres complexes est un cadre adéquat à la résolution des équations.

Sur le même thème, l'encyclopédiste français Jean Le Rond d'ALEMBERT (1717-1783) énonça le théorème suivant :

**Tout polynôme à coefficients réels se factorise en un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.**

*Jean d'ALEMBERT*

La conséquence en est que :

**Toute équation polynomiale de degré $n$ à coefficients réels admet $n$ solutions complexes (distinctes ou non).**

En effet, dans la factorisation d'un polynôme de degré $n$, chaque polynôme de degré 1 admet une racine, et chaque polynôme de degré 2 admet deux racines (distinctes ou non).
La preuve apportée par d'ALEMBERT à ce théorème était presque complète. Il fallut attendre Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) pour disposer d'une démonstration rigoureusement exacte.

Voyons quelques exemples :

- le polynôme $x^3-2x^2-5x+6$ se factorise en $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ (on peut le vérifier avec la méthode de HORNER) ;
  l'équation du 3e degré $x^3-2x^2-5x+6=0$ admet donc trois solutions : -2 , 1 et 3 ;
- le polynôme $x^4+5x^2+4$ se factorise en $(x^2+4)\cdot(x^2+1)$ ;
  l'équation du 4e degré $x^4+5x^2+4=0$ admet donc quatre solutions : $-2i$ , $-i$ , $i$ et $2i$ ;
- le polynôme $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$ se factorise en $(x^2+1)^2\cdot(x-1)$ ;
  l'équation du 5e degré $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$ admet donc cinq solutions : la solution double $i$ , la solution double $-i$ et le réel $1$ .

Exercice résolu : résoudre l'équation $x^3=1$ .

<u>Solution</u>

Au-delà de la solution évidente $x=1$ , il faut être conscient du fait que l'équation admet trois racines complexes et donc, aller plus loin.
Écrivons l'équation sous la forme $x^3-1=0$ et utilisons la formule de factorisation $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$ . Nous trouvons $x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2+x+1)=0$ .

L'équation $x^2+x+1=0$ a pour discriminant vaut -3 et admet deux solutions complexes conjuguées.

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est $S=\left\{1,\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2},\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\right\}$ .

## Exercices

1. Résoudre l'équation $z^4 - z^3 + 3z - 3 = 0$ .

---

2. Déterminer le réel $a$ pour que le polynôme $x^3 - 2ax^2 + 7ax - 6$ soit divisible par $(x-2)$ . Pour cette valeur de $a$ , décomposer le polynôme en un produit de trois polynômes à coefficients complexes.

---

3. Déterminer le réel $a$ pour que le polynôme $z^3 - az^2 + 3az + 37$ soit divisible par $(z+1)$ . Pour cette valeur de $a$ , décomposer le polynôme en un produit de trois polynômes à coefficients complexes.

---

4. Montrer que le polynôme $x^3 - 8x^2 + 25x - 26$ est divisible par $(x-2)$ . En déduire ses zéros.

---

5. Montrer que le polynôme $2x^3 - 15x^2 - 5x - 24$ est divisible par $(x-8)$ . En déduire ses zéros.

---

6. Soit le polynôme $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 7$ .

   a) Calculer $p(i)$ .

   b) Mettre $p(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

   c) Calculer les racines de l'équation $p(x) = 0$ .

---

**Faculté Polytechnique de Mons**

7. Soit l'équation en la variable complexe $z$ :

$$z^2 - (\alpha + 3i + 4) \cdot z + 2\alpha \cdot i - 1 = 0 \quad \text{(avec } \alpha \text{ complexe).}$$

   a) Déterminer le paramètre $\alpha$ pour que l'équation admette deux racines complexes conjuguées et calculer ces racines.

   b) Dans un autre cas, si une des racines est $i$ , calculer le paramètre $\alpha$ et l'autre racine.

---

8. La fonction $f(z)$ de la variable complexe $z$ est définie par

$$f(z) = z^3 + 4(1-i) \cdot z^2 - 2(2+7i) \cdot z - 16 + 8i.$$

   Sachant que cette fonction admet une et une seule racine réelle, calculer ses racines.

**Faculté des sciences appliquées (ULB)**

9. Soit $p(z) = z^3 + z^2 + (-1+i)\cdot z + 2 + 2i$ .

   a) Montrer que $z = 2$ est racine de $p(z) = 0$ .

   b) Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation $p(z) = 0$ .

---

10. Dans quelle(s) condition(s) l'équation $x^2 + (a+ib)\cdot x + (a'+ib') = 0$ possède-t-elle deux racines égales ? ($a$ , $a'$, $b$ et $b' \in \boldsymbol{R}$)
   Ecrire dans ce cas l'équation en fonction de $a$ et $b$ et calculer la solution.

---

11. Trouver toutes les racines complexes de l'équation $\dfrac{9}{(z+2)^4} + \dfrac{17}{(z+2)^2} = 2$ .

---

12. Sachant que $a$ est une racine cubique complexe du nombre 1, montrer que $\left(1+a^2\right)^4 = a$ .

---

13. Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation $i\cdot z^2 - (1+i)\cdot z = 2(i-1)$ .

---

14. Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation $\begin{vmatrix} 1 & z^2 & z^6 \\ 1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

---

15. Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation $z^6 - 3z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 5z^2 - 3z + 2 = 0$ sachant qu'elle admet $i$ comme racine double.

---

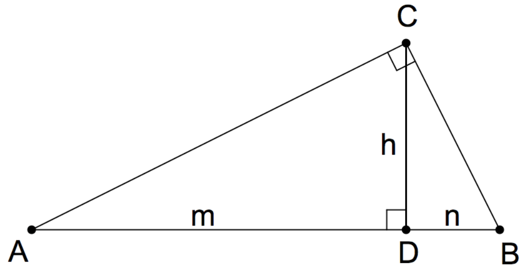
16. Soit l'équation $z^2 + 2(\alpha + i\gamma)\cdot z + \beta^2 + 4i\gamma + \alpha^2 = 0$ . Déterminer $\alpha$ , $\beta$ et $\gamma$ pour que l'équation admette deux racines complexes conjuguées. Trouver ensuite ces racines.

---

# 4. Représentation géométrique et forme trigonométrique

### *Encore un peu d'histoire …*

*Que représente géométriquement le nombre imaginaire $i$ ?*
*Le danois WESSEL (1745-1818) et le genevois ARGAND (1768-1822) trouvèrent une interprétation géométrique de $i$ en appliquant le théorème de géométrie que voici :*




*« Dans tout triangle rectangle $ABC$, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse. »*

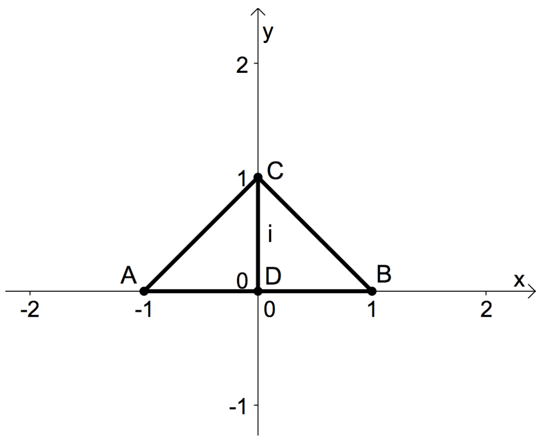
*Dans la figure dessus, la hauteur issue de $C$ a pour longueur $h$, et elle détermine sur l'hypoténuse $[AB]$ les segments $[AD]$ et $[DB]$, de longueurs respectives $m$ et $n$.*

*Dès lors :* $\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n}$ .

*En considérant l'imaginaire $i$ dans sa relation directe avec les quantités positives et négatives, WESSEL et ARGAND appliquent ce théorème comme suit (figure ci-contre) :*

*la distance $h = |CD|$ de l'origine à $+1$ est la moyenne géométrique des mesures algébriques[1] des segments $[AD]$ et $[DB]$, c'est-à-dire*

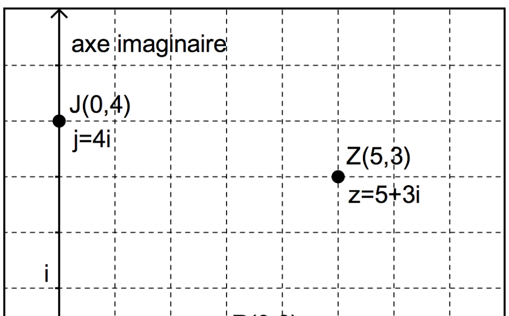
$$h = \sqrt{-1 \cdot +1} = \sqrt{-1} = i .$$




*WESSEL et ARGAND montrent ainsi la correspondance de l'imaginaire avec la direction verticale. À partir de cette idée et de l'introduction par DESCARTES de la géométrie des coordonnées (plan cartésien), GAUSS suggéra en 1831 une représentation géométrique de l'ensemble des nombres complexes : le plan complexe.*

*(Adapté d'un texte de l'équipe Mathécrit, Québec)*

## 4.1. Le plan complexe (ou plan de GAUSS)



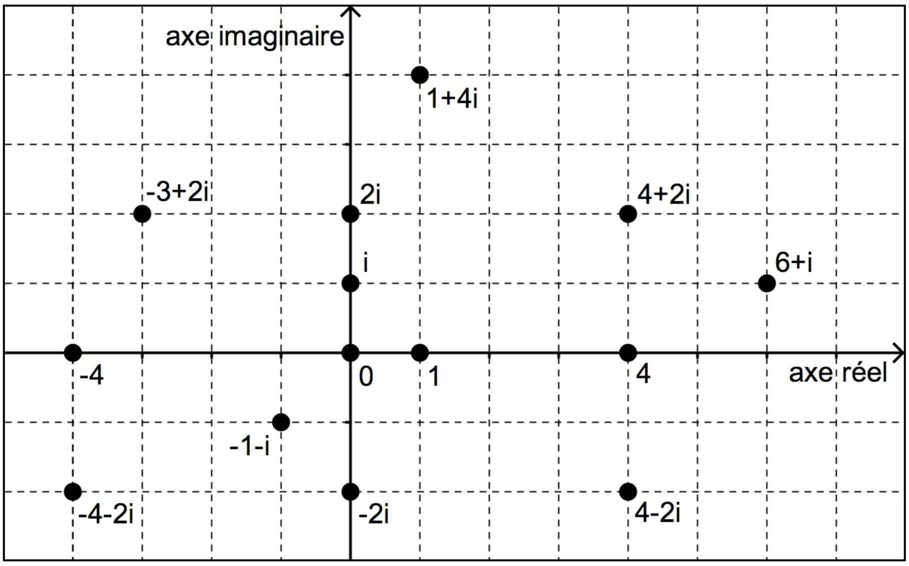

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé. Appliquons chaque nombre complexe sur le point du plan qui a sa partie réelle comme abscisse et sa partie imaginaire comme ordonnée.

Par exemple, le nombre complexe $z = 5 + 3i$ est appliqué sur le point $Z(5,3)$ .
Le nombre complexe $z = 5 + 3i$ est appelé *affixe* du point $Z(5,3)$ .

Tout nombre réel est appliqué sur un point de l'axe réel (par exemple, $r = 3$ ), tandis que tout nombre imaginaire pur est appliqué sur un point de l'axe imaginaire (par exemple, $j = 4i$ ).

[1] Mesures affectées d'un signe.

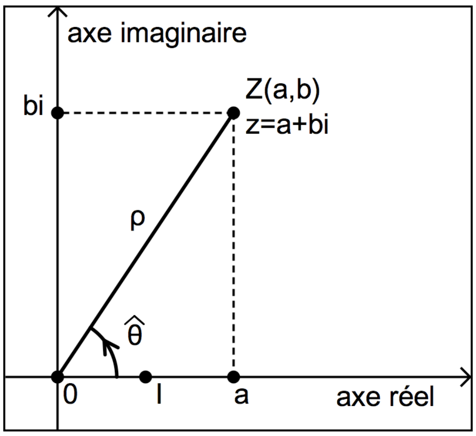
Voici d'autres exemples de points du plan complexe, accompagnés de leur affixe.




Remarques

- Des nombres complexes conjugués sont représentés par des points symétriques par rapport à l'axe réel. C'est le cas de $4+2i$ et $4-2i$, ainsi que de $2i$ et $-2i$.
- Des nombres complexes opposés sont représentés par des points symétriques par rapport à l'origine. C'est le cas de $4+2i$ et $-4-2i$, ainsi que de $2i$ et $-2i$.

## 4.2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe




Soit un nombre complexe non nul $z=a+bi$ représenté par le point $Z(a,b)$.

La position du point $Z$ dans le plan complexe est entièrement déterminée par :

- la distance $\rho=|OZ|$ ;
- l'angle $\hat{\theta}=I\hat{O}Z$.

Étant donné que $a=\rho\cdot\cos\hat{\theta}$ et $b=\rho\cdot\sin\hat{\theta}$, nous avons : $z=\rho\cdot\cos\hat{\theta}+\rho\cdot\sin\hat{\theta}\cdot i$.

Mettant $\rho$ en évidence et désignant par $\theta$ une mesure en radians de $\hat{\theta}$, nous trouvons la *forme trigonométrique* du nombre complexe $z$ :

$$\boxed{z=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)}.$$

Vocabulaire et notations

- La distance $\rho$ est appelée *module* de $z$, et est parfois notée $|z|$.
- L'angle $\hat{\theta}$ est appelé *argument* de $z$.
- Une notation abrégée courante de la forme trigonométrique de $z$ est : $z=\rho\cdot cis\theta$.
- L'écriture $z=a+bi$ d'un nombre complexe sera maintenant appelée *forme cartésienne* pour la distinguer de la forme trigonométrique.

### 4.2.1. Passage de la forme trigonométrique à la forme cartésienne

Exemple : quelle est la forme cartésienne de $z = 4 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ?

Il suffit de développer : $z = 4 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$ .

### 4.2.2. Passage de la forme cartésienne à la forme trigonométrique

On montre facilement que (expliquer) :

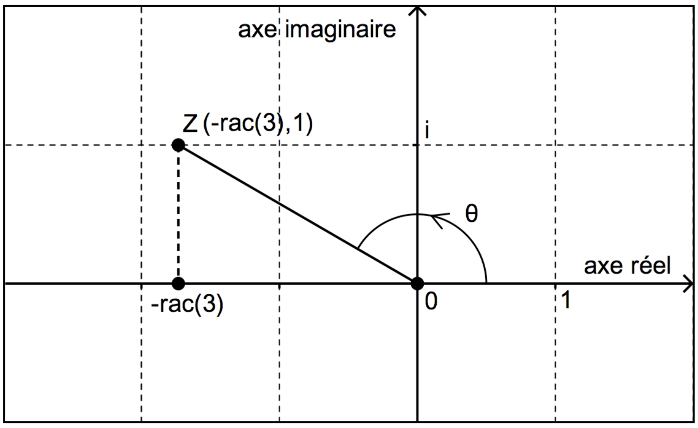
$$\boxed{\text{Le module } \rho \text{ du nombre complexe } z = a + bi \text{ est donné par : } \rho = \sqrt{a^2 + b^2}\ .}$$

Pour trouver l'argument $\theta$, on passe par sa tangente (expliquer) :

$$\boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}}\ .$$

Exemple 1 : déterminer la forme trigonométrique de $z = -\sqrt{3} + i$ .

Commençons par situer $z$ dans le plan complexe (figure ci-dessous).




Sachant que $a = -\sqrt{3}$ et $b = 1$ , le module de $z$ vaut : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$ .

Pour trouver l'argument, calculons sa tangente :

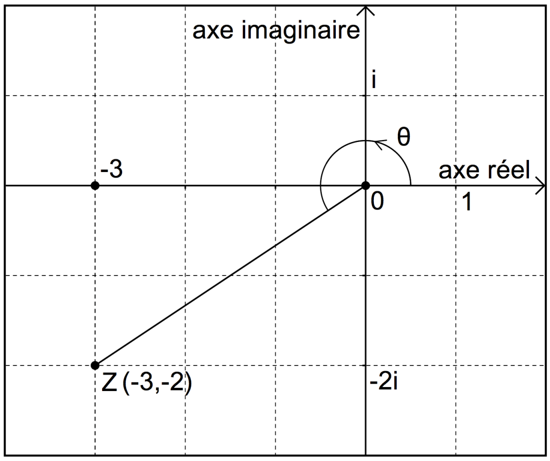
$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

Nous en déduisons que $\theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in Z)$ . Comme la figure nous montre que $z$ est l'affixe d'un point du deuxième quadrant, nous pouvons choisir $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

Finalement, la forme trigonométrique de $z$ est : $z = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot cis\frac{5\pi}{6}$ .

Exemple 2 : déterminer la forme trigonométrique de $z = -3 - 2i$ .

Comme le montre la figure ci-contre, le nombre complexe $z$ est cette fois l'affixe d'un point du troisième quadrant.




Sachant que $a = -3$ et $b = -2$ , le module de $z$ vaut : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ .

Pour trouver l'argument, calculons sa tangente :

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \ .$$

Nous en déduisons que $\theta \approx 0{,}59 + k\pi \quad (k \in Z)$.

Nous pouvons choisir $\theta \approx 0{,}59 + \pi \approx 3{,}73$ .

Finalement, la forme trigonométrique (approximative) de $z$ est :

$$z \approx \sqrt{13} \cdot (\cos 3{,}73 + i \cdot \sin 3{,}73) = \sqrt{13} \cdot cis(3{,}73) \ .$$

Rien n'empêche d'utiliser une mesure en degrés de l'argument. Nous avons donc aussi :

$$z \approx \sqrt{13} \cdot (\cos 213{,}7° + i \cdot \sin 213{,}7°) = \sqrt{13} \cdot cis(213{,}7°) \ .$$

---

## Exercices

1. Écrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants. Les représenter dans le plan de GAUSS.

| | |
|---|---|
| 3. $z = 10 \cdot cis(60°)$ | c) $z = \frac{1}{2} \cdot cis\frac{3\pi}{4}$ |
| 4. $z = 2 \cdot cis\frac{7\pi}{6}$ | d) $z = 3 \cdot cis(-90°)$ |

---

2. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants. Les représenter dans le plan de GAUSS.

| | |
|---|---|
| a) $z = 1 + i$ | f) $z = -4i$ |
| b) $z = \sqrt{3} - 3i$ | g) $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$ |
| c) $z = 3i - 2$ | h) $z = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ |
| d) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ | i) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ |
| e) $z = 7$ | j) $z = \frac{-1}{1+i}$ |

---

3. Comparer les module et argument de deux nombres complexes conjugués.

# 5. Opérations sur les nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

## 5.1. Produit de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

Calculons le produit de deux nombres complexes non nuls $z_1 = \rho_1 \cdot cis\theta_1$ et $z_1 = \rho_2 \cdot cis\theta_2$ (détailler les calculs si nécessaire ; revoir les formules trigonométriques d'addition).

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1) \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2) \\
&= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + i \cdot (\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1)\right] \\
&= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \\
&= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot cis(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

Les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ étant non nuls, le nombre complexe $z_1 \cdot z_2$

- a pour module le produit des modules de $z_1$ et $z_2$ ;
- a pour argument la somme des arguments de $z_1$ et $z_2$ .

Ce résultat se traduit par la formule

$$(\rho_1 \cdot cis\theta_1) \cdot (\rho_2 \cdot cis\theta_2) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot cis(\theta_1 + \theta_2) \ .$$

## 5.2. Quotient de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

Calculons le produit de deux nombres complexes non nuls $z_1 = \rho_1 \cdot cis\theta_1$ et $z_1 = \rho_2 \cdot cis\theta_2$ (détailler les calculs si nécessaire ; revoir les formules trigonométriques d'addition).

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1)}{\rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)} \\
&= \frac{\rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i \cdot \sin\theta_2)}{\rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2) \cdot (\cos\theta_2 - i \cdot \sin\theta_2)} \\
&= \frac{\rho_1 \cdot \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + i \cdot (\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1)\right]}{\rho_2 \cdot (\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot cis(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

Les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ étant non nuls, le nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$

- a pour module le quotient des modules de $z_1$ et $z_2$ ;
- a pour argument la différence des arguments de $z_1$ et $z_2$ .

Ce résultat se traduit par la formule :

$$\frac{\rho_1 \cdot cis\theta_1}{\rho_2 \cdot cis\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot cis(\theta_1 - \theta_2).$$

Cas particulier : inverse d'un nombre complexe

Étant donné que le réel $1$ a pour module $1$ et pour argument $0$ , on a : $1 = cis(0)$ .
Dès lors, si $z = \rho \cdot cis\theta$ , par application du résultat précédent, nous obtenons :

$$\frac{1}{z} = \frac{cis(0)}{\rho \cdot cis(\theta)} = \frac{1}{\rho} \cdot cis(0 - \theta) = \frac{1}{\rho} \cdot cis(-\theta)$$

L'inverse d'un nombre complexe non nul $z$ est le nombre complexe $\dfrac{1}{z}$ dont

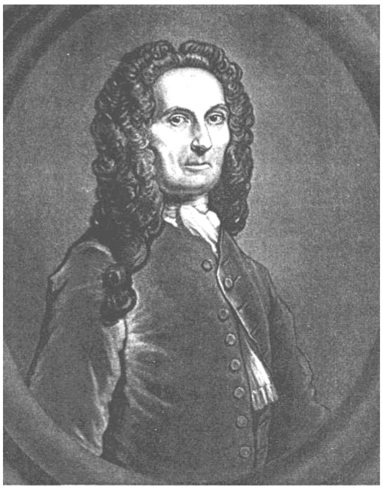
- le module est l'inverse du module de $z$ ;
- l'argument est l'opposé de l'argument de $z$ .

Ce résultat se traduit par la formule

$$\frac{1}{\rho \cdot cis(\theta)} = \frac{1}{\rho} \cdot cis(-\theta).$$

## 5.3. Puissance $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe (formule de DE MOIVRE)

Abraham DE MOIVRE (1667-1754), né en France dans une famille protestante, s'intéresse très tôt à la physique et aux mathématiques. Peu après la révocation de l'édit de Nantes en 1685, il émigre vers l'Angleterre où il se lie d'amitié avec NEWTON dont il admire les travaux. DE MOIVRE étudie notamment de manière approfondie la méthode des fluxions[2] de NEWTON. Ce dernier aurait même répondu à quelqu'un qui l'interrogeait sur cette méthode « *Go to Mr DE MOIVRE, he knows these things better than i do* ».



Abraham DE MOIVRE

On attribue à DE MOIVRE la formule relative une la puissance naturelle non nulle d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique :

$$\boxed{(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta)}$$

[2] Terme utilisé par NEWTON pour désigner notre actuelle dérivée.

En utilisant l'écriture abrégée, la formule de DE MOIVRE s'écrit : $\boxed{(cis\theta)^n = cis(n\theta)}$ .

Exemple : $(cis(25°))^3 = cis(3 \cdot 25°) = cis(75°)$

Démonstration par récurrence de la formule de DE MOIVRE

1° Si $n = 1$ , la formule est vraie. En effet : $(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)^1 = 1 \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ .

2° Supposons la formule vraie pour $n = k - 1$ (hypothèse de récurrence) et démontrons qu'elle est vraie aussi pour $n = k$ .

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)^k &= (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)^{k-1} \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \\
&= \left[\cos(k-1)\theta + i \cdot \sin(k-1)\theta\right] \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \qquad \text{(par H.R)} \\
&= \cos(k-1)\theta \cdot \cos\theta - \sin(k-1)\theta \cdot \sin\theta \\
&\qquad + i \cdot \left(\cos(k-1)\theta \cdot \sin\theta + \sin(k-1)\theta \cdot \cos\theta\right) \\
&= \cos k\theta + i \cdot \sin k\theta
\end{aligned}$$

Extensions de la formule de DE MOIVRE

- La formule que nous venons d'énoncer pour $n \in N_0$ , est valable pour tout $n \in Z$ .
- $(\cos\theta - i \cdot \sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i \cdot \sin(n\theta)$ (vérifier).

Exercice résolu : calculer $(1+i)^3$ et $(1+i)^{20}$ .

Solution

S'il est relativement facile de calculer algébriquement la première expression, cela paraît nettement plus fastidieux pour la seconde !

$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$ $\qquad (1+i)^{20} = ...$ .

Il est utile d'écrire $(1+i)$ sous forme trigonométrique et d'appliquer la formule de DE MOIVRE.

D'abord : $1 + i = \sqrt{2} \cdot cis\frac{\pi}{4}$ (vérifier).

Ensuite :

$$(1+i)^3 = \left(\sqrt{2} \cdot cis\frac{\pi}{4}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot cis\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2} \cdot cis\frac{\pi}{4}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} \cdot cis\frac{20\pi}{4} = 2^{10} \cdot cis(5\pi) = 2^{10} \cdot (-1) = -1024$$

Remarque : une petite astuce algébrique permet aussi de calculer $(1+i)^{20}$ ; chercher …

## Exercices (produits, quotients et puissances)

1. Effectuer les opérations suivantes et donner les réponses sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne. Représenter dans le plan de GAUSS.

a) $\left(2\cdot cis\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot cis\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left(10\cdot cis(100°)\right)\cdot\left(cis(140°)\right)$

c) $\dfrac{6\cdot cis(170°)}{3\cdot cis(50°)}$

d) $\dfrac{1}{2\cdot cis\frac{\pi}{6}}$

e) $\dfrac{1+i}{1-i}$

f) $i\cdot cis\frac{\pi}{6}$

g) $\dfrac{4\cdot cis\frac{3\pi}{4}}{2\cdot cis(\pi)}$

h) $\left(2\cdot cis\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\left(3\cdot cis\frac{\pi}{4}\right)^3$

---

2. Déterminer la forme trigonométrique de :

a) $(1+i)\cdot\left(\sqrt{3}-3i\right)$

b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}$

---

3. Soient les nombres complexes $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=1-i$ .

a) Calculer le rapport $z_1/z_2$ de deux manières.

b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$ .

---

4. Calculer à l'aide de la formule de DE MOIVRE.

a) $\left(cis\frac{\pi}{6}\right)^7$

b) $(5+5i)^6$

c) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{30}$

d) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}$

e) $(3+3i)^{14}$

f) $\left|\left(2\cdot cis\frac{\pi}{3}\right)^7\right|$ (calculer le module)

g) $(1-i)^{10}$

h) $\dfrac{1}{(1-i)^8}$

---

5. En utilisant la formule de DE MOIVRE, établir les formules de trigonométrie donnant $\sin 3x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ .

## 5.4. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Définition : un nombre complexe $z$ est une racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe $u$ si et seulement si $z^n = u \ (n \in N)$ .

Propriété préparatoire : si deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique sont égaux, alors ils ont le même module, et leurs arguments sont égaux à $k \cdot 2\pi$ près ( $k \in Z$ ). L'égalité des arguments est due au fait que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $2\pi$ .

Exercice résolu 1

Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation $z^4 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ , c'est-à-dire déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $1 - \sqrt{3} \cdot i$ .

Solution

Écrivons d'abord le second membre de l'équation sous forme trigonométrique (vérifier) :

$$1 - \sqrt{3} \cdot i = 2 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{3}\right) .$$

Écrivons aussi l'inconnue sous forme trigonométrique : $z = \rho \cdot cis\theta$ .
En utilisant la formule de DE MOIVRE, l'équation $z^4 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ s'écrit alors :

$$\rho^4 \cdot cis(4\theta) = 2 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{3}\right) .$$

En vertu de la propriété énoncée ci-dessus, cette égalité entre deux nombres complexes a pour conséquence :

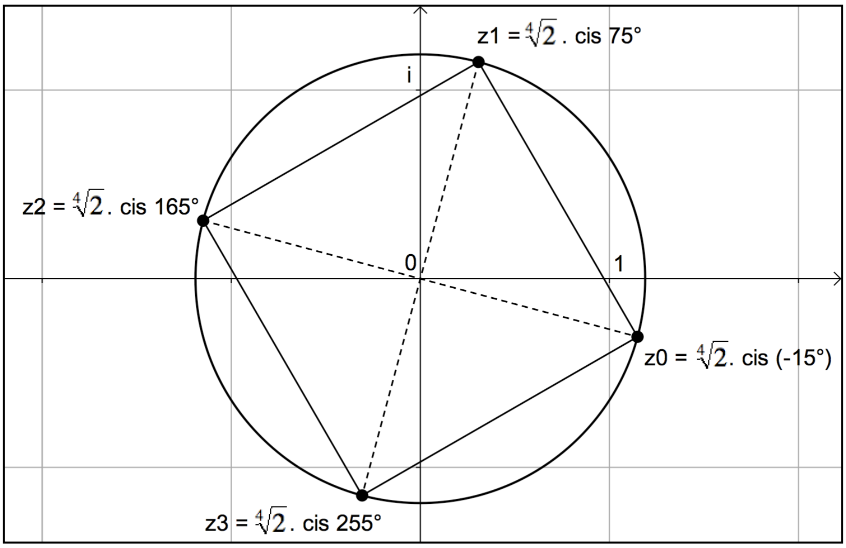
$$\rho^4 = 2 \ \text{ et } \ 4\theta = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\rho = \sqrt[4]{2}} \ \text{ et } \ \boxed{\theta = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Nous pouvons maintenant écrire les solutions de l'équation, en faisant varier la valeur de $k$ :

| | |
|---|---|
| $k = 0$ | $z_0 = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ |
| $k = 1$ | $z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ |
| $k = 2$ | $z_2 = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12} + \pi\right) = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ |
| $k = 3$ | $z_3 = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ |
| $k = 4$ | $z_4 = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12} + 2\pi\right) = \sqrt[4]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ |

Il suffisait de prendre $k = 0$ , $1$ , $2$ et $3$ , car à partir de $k = 4$ , nous retrouvons les solutions déjà obtenues.

Nous pouvons facilement visualiser les solutions dans le plan de GAUSS. Elles correspondant à des points se trouvant sur un cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[4]{2}$ .
Pour passer d'une solution à l'autre, on ajoute $\pi/2$ à son argument. Ces points sont donc les sommets d'un carré.




## Cas particulier : racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Exercice résolu 2

Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation $z^5 = 1$ , c'est-à-dire déterminer les racines cinquièmes de l'unité.

Solution

Posons $z = \rho \cdot cis\theta$ . Sachant que $1 = cis(0)$ , l'équation $z^5 = 1$ peut s'écrire :

$$\rho^5 \cdot cis(5\theta) = cis(0) .$$

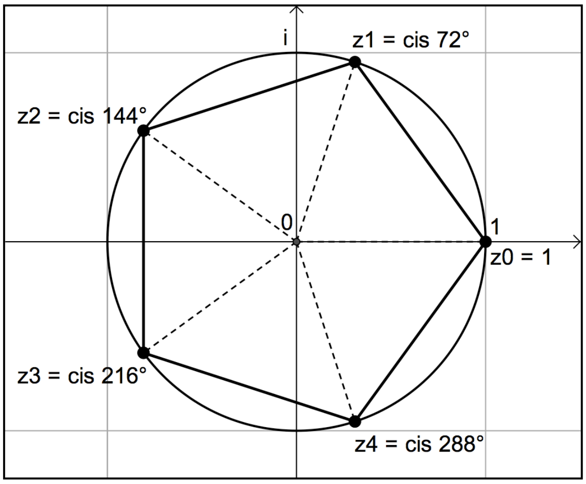
Nous en déduisons : $\rho^5 = 1$ et $5\theta = 0 + k \cdot 2\pi$ ou encore $\boxed{\rho = 1}$ et $\boxed{\theta = k \cdot \frac{2\pi}{5}}$

Toutes les racines cinquièmes de l'unité s'obtiennent en faisant varier k de 0 à 4 .

| | |
|---|---|
| $k = 0$ | $z_0 = cis(0) = 1$ |
| $k = 1$ | $z_1 = cis\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ |
| $k = 2$ | $z_2 = cis\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ |
| $k = 3$ | $z_3 = cis\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ |
| $k = 4$ | $z_4 = cis\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ |

Notons que pour $k = 0$ , nous retrouvons la solution évidente $z = 1$ .

Dans le plan de GAUSS, les racines cinquièmes de l'unité sont représentées par les sommets d'un pentagone régulier, inscrit dans un cercle de rayon 1 .




## Généralisations

En suivant une démarche analogue à celle des exercices résolus 1 et 2, on peut montrer que :

> Tout nombre complexe $z = r \cdot cis\varphi$ admet $n$ racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes données par
>
> $$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot cis\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \text{ avec } k \in \{0,1,2,...,n-1\} .$$

> Le réel 1 admet $n$ racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes (racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) données par
>
> $$z_k = cis\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) \text{ avec } k \in \{0,1,2,...,n-1\} .$$

## Exercices

1. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan de GAUSS.

   a) $z^3 = 1$

   b) $z^3 = -8i$

   c) $z^4 = 1 - i$

   d) $z^5 = 3 + 3 \cdot i$

   e) $z^2 = \sqrt{3} + i$

   f) $z^5 = -1$

---

2. Vérifier que $2\sqrt{3} + i$ est une racine cubique de $18\sqrt{3} + 35 \cdot i$ .

---

## Exercices variés

1. Calculer de deux manières différentes $(\cos a + i \cdot \sin a) \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$ . Que peut-on en déduire ?

---

2. Calculer

   a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^8 + \left(1-i\sqrt{3}\right)^8$

   b) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^8 - \left(1-i\sqrt{3}\right)^8$

---

3. Étant donné un nombre naturel $n$ supérieur à $1$ , démontrer que la somme des racines de l'équation $z^n = 1$ est nulle. Démontrer qu'il en va de même pour l'équation $z^n = -1$ .

---

4. a) Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ .

   b) En déduire $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$ .

---

5. a) Calculer $(2-i)^3$ .

   b) Résoudre l'équation $z^3 = 2 - 11i$ .

---

6. Soient x , y et z des nombres complexes de module 1 .

   Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=1 \end{cases}$

---

7. Montrer que si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ , alors $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ .

---

8. On considère le nombre complexe $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i.\sin\frac{2\pi}{5}$ .

   a) Calculer $z^5$ .

   b) On pose $u = z + z^4$ et $v = z^2 + z^3$ . Calculer $u + v$ et $u \,.\, v$ . En déduire $u$ et $v$ .

   c) Exprimer $\cos\frac{2\pi}{5}$ en fonction de $u$ . En déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$ .

---

9. Quel est l'ensemble des points images des nombres complexes $z$ tels que $z + \frac{4}{z}$ soit réel ?

   Résoudre les équations $z + \frac{4}{z} = 5$ et $z + \frac{4}{z} = 2$ . Représenter les points images des solutions.

10. a) Déterminer le module et l'argument de $z = \dfrac{1}{i + tg\alpha}$ .

b) Quel est l'ensemble des points images de $z$ quand $\alpha$ est un paramètre ?
En déduire une construction simple du point image de $z = \dfrac{1}{i + tg\dfrac{7\pi}{8}}$ .

---

11. Démontrer que $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$ .

---

12. Résoudre dans $\boldsymbol{C}$ l'équation $2z^2(1-\cos 2\theta) - 2z.\sin 2\theta + 1 = 0$ dans laquelle $z$ est l'inconnue et $\theta$ un paramètre réel tel que $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta \neq 0$ .

<u>Indications</u> : exprimer $1 - \cos 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ ; utiliser les formules de DE MOIVRE pour simplifier le résultat.

---

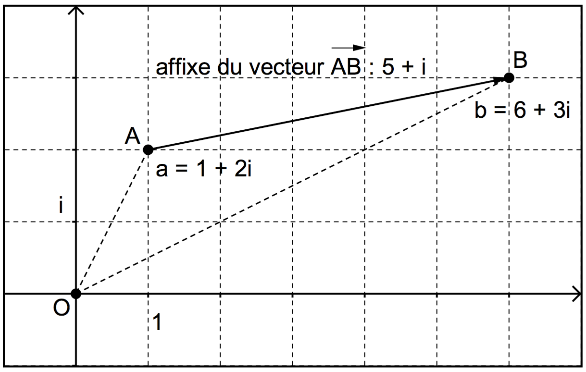
# 6. Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes

## 6.0. Mise au point préalable : affixe d'un vecteur

Dans le plan de GAUSS, nous savons déjà que si le point $Z$ représente le nombre complexe $z = x + yi$ , celui-ci s'appelle l'affixe du point $Z$ .
Par extension, nous dirons que $z = x + yi$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OZ}$ ( $O$ étant l'origine), ou, plus généralement, du vecteur $\vec{v}$ de composantes $(x,y)$ .

Le lien immédiat entre l'affixe et les composantes d'un vecteur nous indique que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la différence entre l'affixe de son extrémité et celle de son origine.

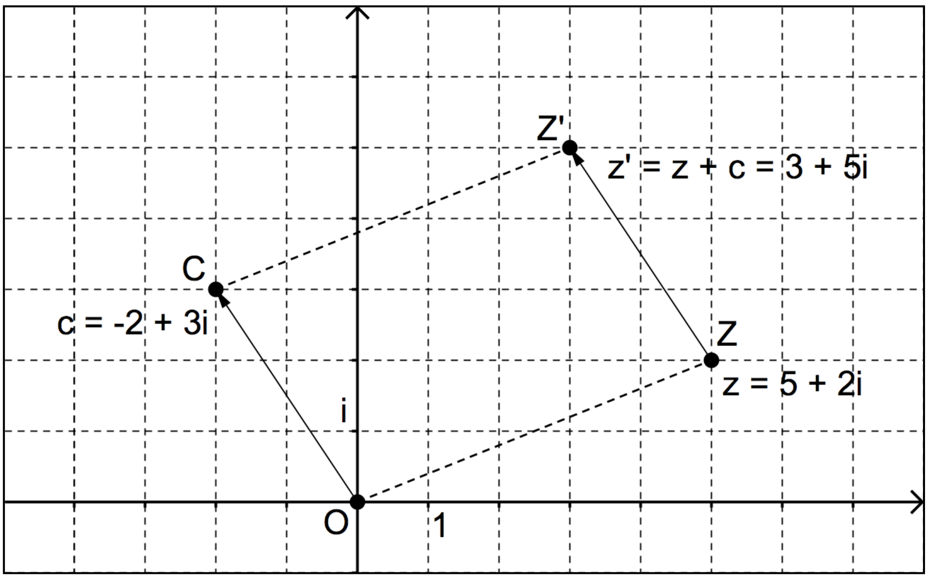
Par exemple, si les affixes des points $A$ et $B$ sont respectivement $a = 1 + 2i$ et $b = 6 + 3i$ (figure ci-contre), celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a = 5 + i$ .




## 6.1. Addition - Translation

Exemple

Soit les nombres complexes $z = 5 + 2i$ et $c = -2 + 3i$ . Représentons $z + c = 3 + 5i$ dans le plan de GAUSS.



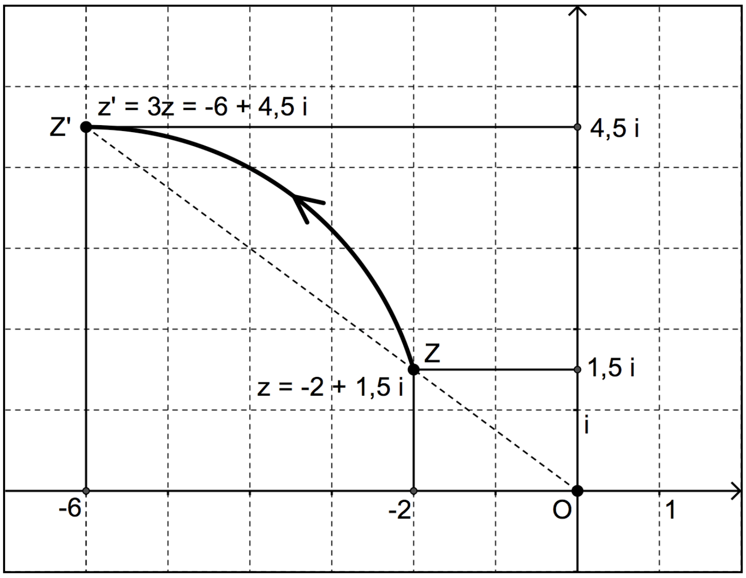

D'un point de vue géométrique, nous voyons que le point $Z'$ , d'affixe $z + c$ , est l'image du point $Z$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ .

L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ : $z \to z + c$ (ajouter à un complexe quelconque $z$ un complexe donné $c$ ), correspond, dans le plan de GAUSS, à une translation de vecteur d'affixe $c$ .

## 6.2. Multiplication par un réel non nul - Homothétie

Exemple

Soit le nombre complexe $z = -2 + \frac{3}{2}i$ et le réel $k = 3$. Représentons $k \cdot z = -6 + \frac{9}{2}i$ dans le plan de GAUSS.




D'un point de vue géométrique, nous voyons que le point $Z'$, d'affixe $k \cdot z$, est l'image du point $Z$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $3$.
La partie réelle (imaginaire) de $z'$ est égale à $3$ fois celle de $z$.
Si nous comparons les formes trigonométriques, le module de $z'$ est égal à 3 fois celui de $z$, tandis que l'argument de $z'$ est celui de $z$.

L'application de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}$ : $z \to k \cdot z$ (multiplier un complexe quelconque $z$ par un réel non nul donné $k$), correspond, dans le plan de GAUSS, à une homothétie de centre $O$ et de rapport $k$.

## 6.3. Multiplication par un nombre complexe de module 1 - Rotation

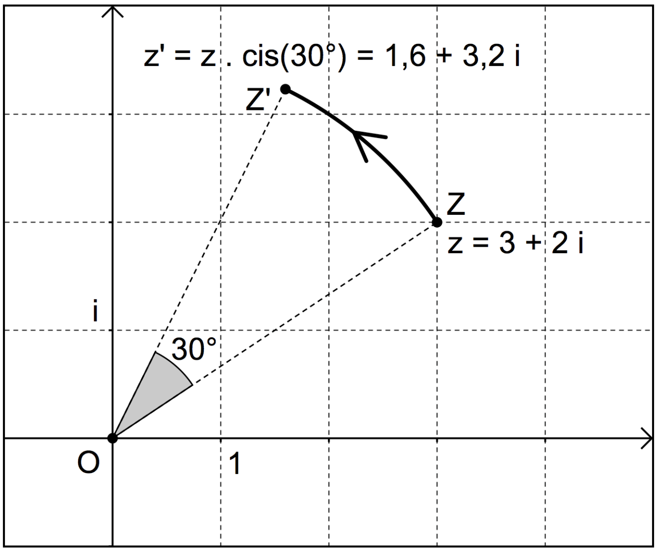
Exemple

Soit le nombre complexe $z = 3 + 2i$ et le nombre complexe $u = cis(30°)$ (de module $1$). Représentons $z \cdot u = (3 + 2i) \cdot cis(30°)$ dans le plan de GAUSS.

Écrivons d'abord $z$ sous forme trigonométrique. Son module vaut $\sqrt{13}$ et son argument vaut $\arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}69°$.

Effectuons le produit : $z \cdot u \approx \sqrt{13} \cdot cis(33{,}69°) \cdot cis(30°) = \sqrt{13} \cdot cis(63{,}69°)$.

Nous obtenons un complexe de même module que $z$ et d'argument égal à la somme des arguments de $z$ et de $u$. Le point représentant ce produit est donc l'image du point représentant $z$ par une rotation de centre $O$ et d'angle $30°$.




L'application de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}$ : $z \to z \cdot cis\theta$ (multiplier un complexe quelconque $z$ par un complexe de module $1$ donné $u$ ), correspond, dans le plan de GAUSS, à une rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.

**Cas particuliers (expliquer)**

- Si on multiplie un nombre complexe par $i$ , alors son point image subit une rotation de centre $O$ et d'angle $90°$ .
- Si on multiplie un nombre complexe par $(-i)$, alors son point image subit une rotation de centre $O$ et d'angle $-90°$ .

## 6.4. Multiplication par un nombre complexe quelconque - Similitude directe

Exemple

Soit les nombres complexes $z = 3 + 2i$ et $v = 2 \cdot cis(30°)$ .
Représentons $z \cdot v = (3 + 2i) \cdot 2 \cdot cis(30°)$ dans le plan de GAUSS.

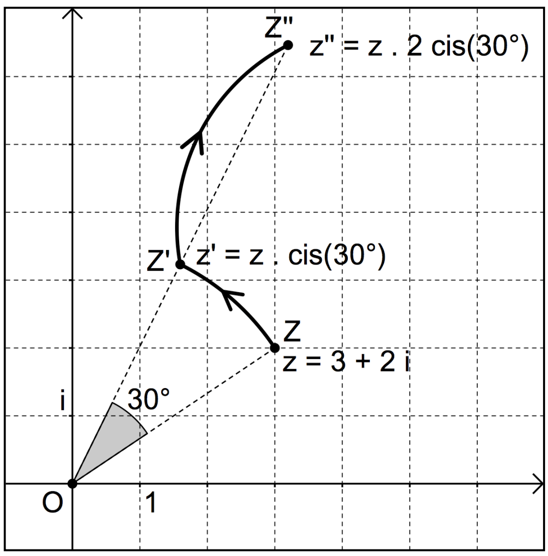
Nous savons déjà que $z \approx \sqrt{13} \cdot cis(33{,}69°)$ .

Effectuons le produit de $z$ par $v$ :

$$z \cdot v \approx \sqrt{13} \cdot cis(33{,}69°) \cdot 2 \cdot cis(30°)$$

$$= 2\sqrt{13} \cdot cis(63{,}69°)$$

Nous obtenons un complexe dont le module est le produit des modules de $z$ et de $v$ , et dont l'argument égal à la somme des arguments de $z$ et de $v$ . Le point représentant ce produit est donc l'image du point représentant $z$ par une rotation de centre $O$ et d'angle $30°$ , suivie d'une homothétie de centre $O$ et de rapport $2$ .



Remarque

La composée d'une rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$, et d'une homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ non nul, est appelée une *similitude directe*.

| |
|---|
| L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ : $z \to z \cdot v$ avec $v = \rho \cdot cis\theta$ (multiplier un complexe quelconque $z$ par un complexe donné $v$ ), correspond, dans le plan de GAUSS, à une rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$, suivie d'une homothétie de centre $O$ et de rapport $\rho$. |

---

## Exercices

1. Dans le plan de GAUSS, représenter les points $P$ d'affixe $p = 2 + i$ et $Q$ d'affixe $q = 1 - 2i$ . Ensuite, construire les points dont les affixes sont données ci-dessous. Préciser chaque fois les transformations du plan utilisées.

   a) $2p + q$

   b) $p \cdot q$

   c) $(p - q)^2$

---

2. Dans le plan de GAUSS d'origine $O$ , on donne le point $Z$ d'affixe $3 - 3i$ . Déterminer l'affixe du point $Z'$ , image du point $Z$ par :

   a) la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $2 - 2i$ et la rotation d'origine $O$ et d'angle 315° ;

   b) la rotation d'origine $O$ et d'angle - 90° suivie de l'homothétie de centre O et de rapport - 2 .

---

3. Dans le plan de GAUSS d'origine $O$ , on donne le point $P$ d'affixe $-2 + 2i$ . Déterminer l'affixe du point $P'$ , image du point $P$ par :

   a) la translation de vecteur $\vec{v}(1,-1)$ ;

   b) l'homothétie $h$ de centre $O$ et de rapport - 2 ;

   c) la rotation $r$ de centre $O$ et d'angle 150° ;

   d) la composée des trois transformations précédentes ;

   e) la similitude $r \circ h$ .

---

4. Une translation $t$ , appliquée trois fois de suite au point $P$ d'affixe $2 + i$ , donne le point $P'$ d'affixe $1 + 2i$ comme image. Quelle est l'affixe du vecteur de la translation ?

---

5. Même question qu'à l'exercice 5, lorsque la transformation appliquée trois fois de suite à $P$ est une :

   a) homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ ;

   b) une rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ .

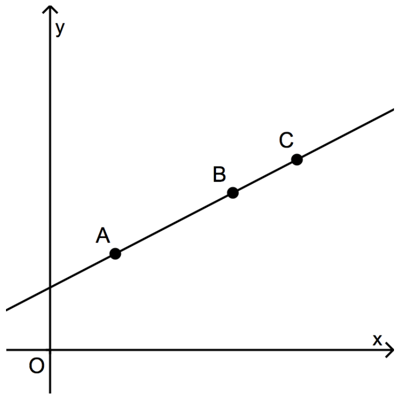
# 7. Faire de la géométrie avec les nombres complexes[3]

## 7.1. Quelques situations géométriques

Considérons les points $A$, $B$, $C$, $D$, … deux à deux distincts dont les affixes respectives sont $a$, $b$, $c$, $d$, … (éléments de $\mathbf{C}$).

**Alignement de trois points**

Exprimer que les trois points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.




La condition vectorielle d'alignement est :

$$\exists\, k \in R \text{ tel que } \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}\ .$$

Cette condition se traduit sur les affixes par :

$$c - a = k \cdot (b - a) \quad (\text{avec } k \in R\ ).$$

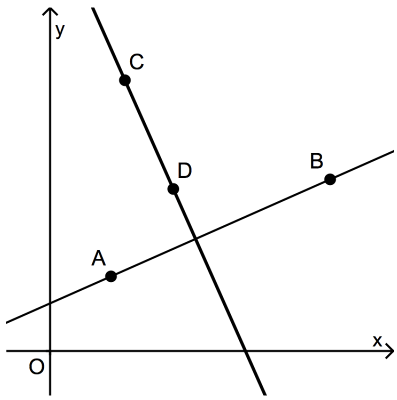
Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in R$.

Exemple : les points $A(2{,}2)$, $B(4{,}3)$ et $C(8{,}5)$ sont-ils alignés ?

Ils sont alignés car : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{(8+5i)-(2+2i)}{(4+3i)-(2+2i)} = \dfrac{6+3i}{2+i} = \dfrac{(6+3i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \dfrac{15}{5} = 3 \in R$.

**Perpendicularité de deux droites**

Exprimer que deux droites $AB$ et $CD$ sont perpendiculaires.




Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une rotation de centre $O$ et d'angle $90°$, suivie d'une homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ (considérer les représentants d'origine $O$ de ces deux vecteurs).

Sur les affixes des vecteurs, cela se traduit par :

$$d - c = (b-a)\cdot i \cdot k \iff \frac{d-c}{b-a} = k \cdot i \quad (\text{car } b - a \neq 0\ ).$$

Les droites $AB$ et $CD$ sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{d-c}{b-a}$ est un imaginaire pur.

[3] Ce paragraphe est adapté de l'ouvrage *Des grandeurs aux espaces vectoriels* (2002), Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

Exemple : étant donnés les points $A(-1,2)$ , $B(2,3)$ , $C(6,-2)$ et $D(2,10)$ , les droites $AB$ et $CD$ sont-elles perpendiculaires ?

Elles sont perpendiculaires car :

$$\frac{d-c}{b-a}=\frac{(2+10i)-(6-2i)}{(2+3i)-(-1+2i)}=\frac{-4+12i}{3+i}=\frac{(-4+12i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)}=\frac{40i}{10}=4i\in I\ .$$

**Exercice**

Dans l'esprit des deux exemples précédents, écrire des relations entre des affixes pour exprimer un fait géométrique.

a) Exprimer qu'un triangle $ABC$ est rectangle isocèle de sommet $A$ .

b) Exprimer qu'un quadrilatère $ABCD$ est un carré.

c) Exprimer qu'un triangle $ABC$ est équilatéral.

## 7.2. Quelques problèmes

Notre objectif est maintenant d'utiliser l'aspect géométrique des opérations sur les nombres complexes pour établir des propriétés géométriques de figures planes. Bien que cette méthode ne soit guère différente de celle qui utilise les vecteurs, il faut souligner qu'elle présente un avantage au niveau des rotations : pour en effectuer une, il suffit en effet de multiplier par le nombre complexe adéquat.
Notons enfin que les problèmes qui suivent peuvent être résolus par la méthode synthétique, en exploitant les propriétés des transformations du plan.

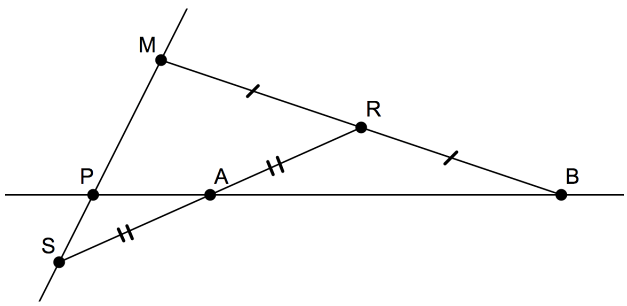
**Problème 1 (résolu)**

Soient $A$ , $B$ et $M$ trois points non alignés du plan. Au point $M$ , on associe le point $R$ , milieu de $[BM]$ . Soient encore le point $S$ , symétrique de $R$ par rapport au point $A$ , et le point $P$ , intersection des droites $MS$ et $AB$ . Qu'advient-il du point $P$ lorsque le point $M$ se déplace dans le plan ?

Solution

Plaçons l'origine du repère en $A$ , et le point unité sur l'axe réel en $B$ .
Les affixes des points $A$ et $B$ sont respectivement $0+0i$ et $1+0i$ .

Notons $m=\lambda+\mu i$ l'affixe du point mobile $M$ .




L'affixe de $R$ , milieu de $[BM]$ , est alors $r=\dfrac{\lambda+1}{2}+\dfrac{\mu}{2}i$ , et celle de $S$ , symétrique de $R$ par rapport à l'origine $A$ est $s=-\dfrac{\lambda+1}{2}-\dfrac{\mu}{2}i$ .

Désignant par $p$ l'affixe de $P$, l'alignement des points $M$, $P$ et $S$ peut s'exprimer vectoriellement par $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MS}$, et donc par la relation suivante sur les affixes :

$$p - m = k \cdot (s - m) \ .$$

L'affixe de $P$ est donc : $p = (\lambda + \mu i) + k \cdot \left( -\frac{\lambda + 1}{2} - \frac{\mu}{2} i - \lambda - \mu i \right)$.

En regroupant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$p = \lambda - k \cdot \frac{3\lambda + 1}{2} + \mu \cdot \frac{2 - 3k}{2} i \ .$$

Comme $P$ est sur l'axe réel, la partie imaginaire de son affixe est nulle, ce qui donne $k = \frac{2}{3}$.

En remplaçant $k$ par cette valeur, on obtient finalement $\boxed{p = \frac{1}{3} + 0 \cdot i}$.

Nous en déduisons que $P$ est un point fixe, situé sur la droite $AB$, à une distance $\frac{|AB|}{3}$ de $A$, du côté opposé à $B$.

---

**Problème 2**

On donne deux triangles isocèles $OAB$ et $OCD$ rectangles en $O$. Montrer que la médiane issue du sommet $O$ de l'un des deux triangles $AOD$ ou $COB$ est hauteur de l'autre.

---

**Problème 3**

Le triangle $ABC$ est équilatéral et $G$ désigne son centre. Si $D$ est un point de $[BC]$, on construit les triangles équilatéraux $BED$ et $DFC$, extérieurs au triangle $ABC$, et de centres respectifs $H$ et $J$. Démontrer que le triangle $GHJ$ est également équilatéral.

---

**Problème 4 (les trois carrés)**

On donne un segment $[OB]$ et un point $A$ de ce segment. D'un même côté de $OB$, on construit les carrés de côtés $[OA]$ et $[AB]$, de l'autre côté, le carré de côté $[OB]$. Désignons par $C$, $D$ et $E$ les centres respectifs des trois carrés.
Démontrer que $BC$ est perpendiculaire à $DE$. Montrer en outre que $|BC| = |DE|$.

---

**Problème 5 (les quatre carrés)**

On construit quatre carrés sur les côtés d'un parallélogramme extérieurement à celui-ci. Démontrer que les centres de ces carrés sont les sommets d'un carré.

---