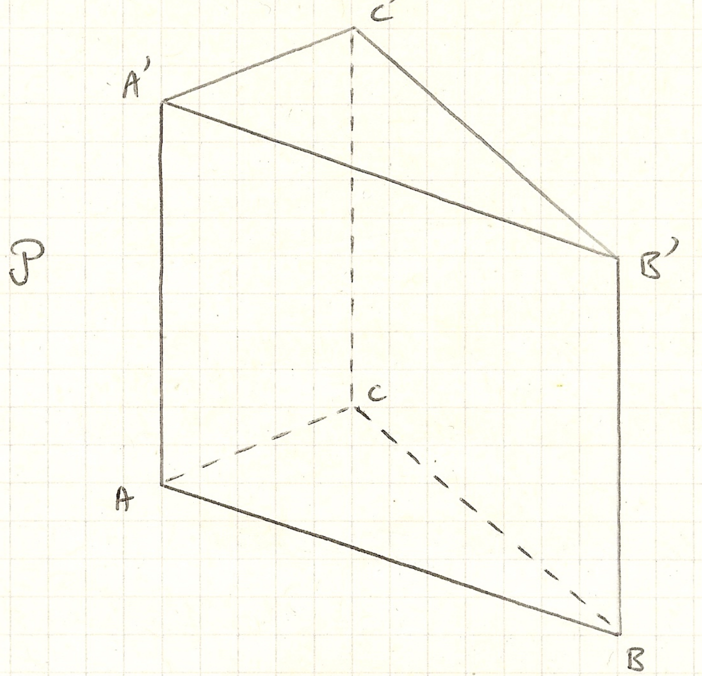
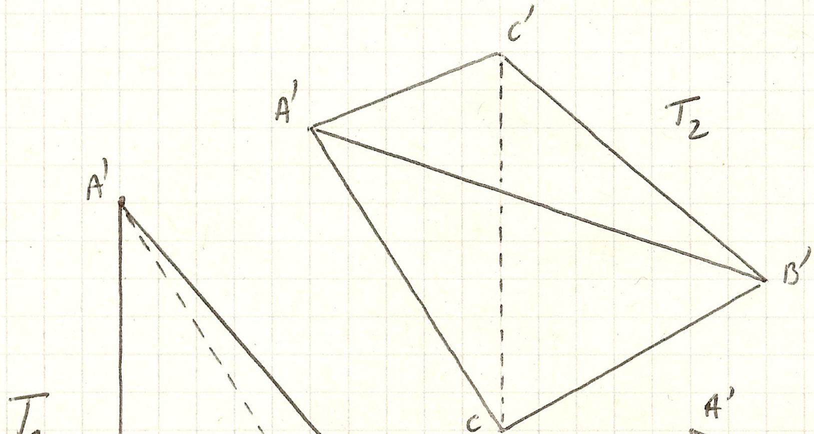
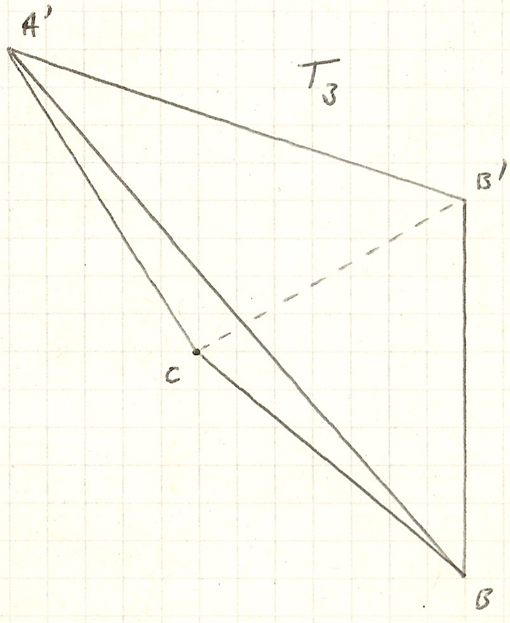
GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE - Juillet 2018 (série 1)

1 Le prisme d'EUCLIDE

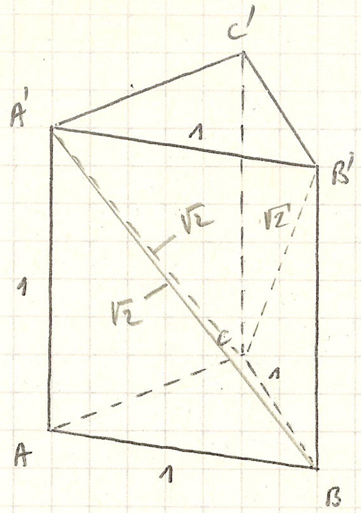






Volume $T_1 = \frac{1}{3} \cdot$ Volume $\mathcal{P}$

La réunion de T_1, T_2 et T_3 donne $\mathcal{P}$.



Toutes les arêtes sont de longueur 1.

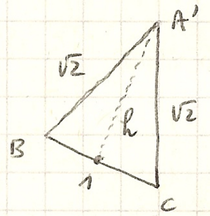
Soit b l'aire de la base ABC $(=$ aire $A'B'C')$.

Aire totale du prisme : $3 \times 1 + 2b = 3 + 2b$.

Aire du tétraèdre $T_1 = ABCA'$

$$= b + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{\text{aire}\,(BCA')}$$

BCA' est un triangle isocèle



$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Aire de $T_1 = b + 1 + \frac{\sqrt{7}}{4}$

Aire du tétraèdre $T_2 = A'B'C'C$

$$= b + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{\text{aire}\,(A'B'C)}_{\sqrt{7}/4}$$

Aire de $T_2 = b + 1 + \frac{\sqrt{7}}{4}$

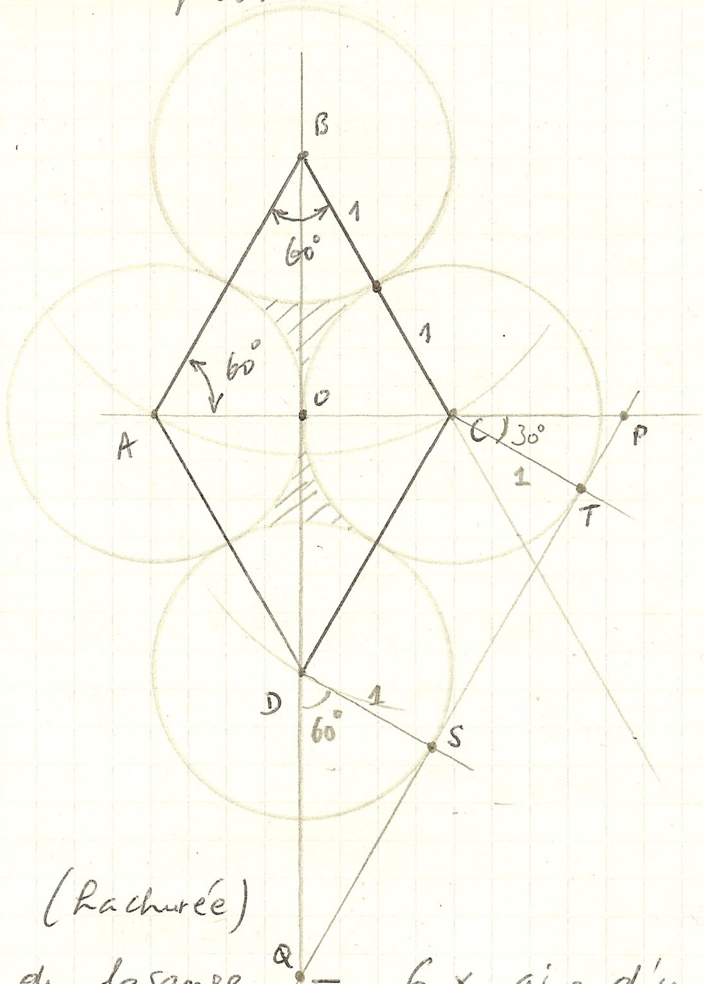
Aire du tétraèdre $T_3 = A'B'BC$

$$= \text{aire}\,(A'B'B) + \text{aire}\,(B'BC) + \text{aire}\,(A'B'C) + \text{aire}\,(A'BC)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\delta =$ Aire T_1 + Aire T_2 + Aire T_3 − Aire $\mathcal{P}$

$$= \left(\cancel{b} + \cancel{1} + \frac{\sqrt{7}}{4}\right) + \left(\cancel{b} + \cancel{1} + \frac{\sqrt{7}}{4}\right) + \left(\cancel{1} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right) - \left(\cancel{3} + \cancel{2b}\right) = \sqrt{7}$$

② Pavage de disques.



$|AC| = d$

$|BD| = D$

Aire $\mathcal{L}$ (hachurée)

$=$ aire du losange $-$ 6 × aire d'un secteur de disque de 60°

$= \dfrac{d \times D}{2}$ $-$ aire d'un disque (rayon 1)

$= \dfrac{|BD| \times |AC|}{2} - \pi . 1^2$

$= \dfrac{2\sqrt{3} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} - \pi$ car $|BD| = 2 \times |BO|$

$= 2 . \sqrt{4-1}$

$= 2\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} - \pi \simeq 0,3225$

Base l du plus petit losange entourant les 4 disques ?

$l = |PQ| = |PT| + |TS| + |SQ|$

$= 1 . \tan 30° + 2 + 1 . \tan 60°$

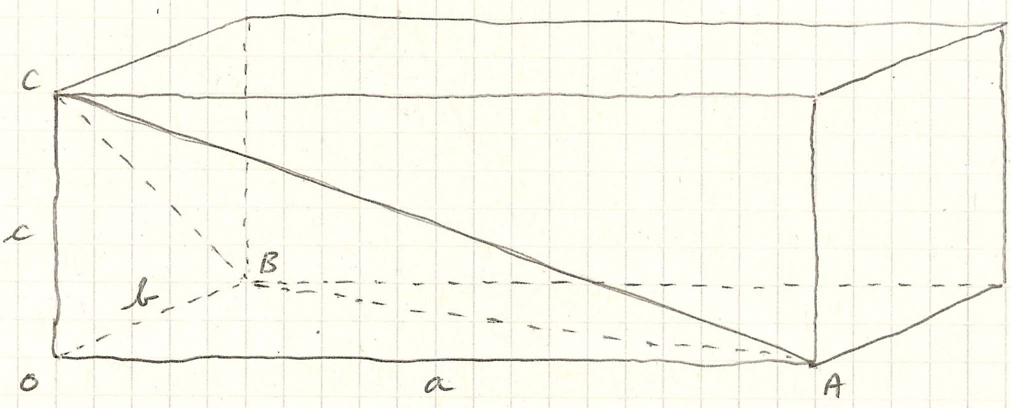
$= \dfrac{\sqrt{3}}{3} + 2 + \sqrt{3}$

$\rightarrow l = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} + 2 \simeq 5,4641$

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE - JUILLET 2018 (série 2)

① Une curiosité tétraédrique

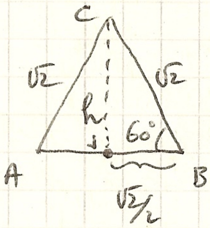
(1)



(2) $\text{Aire}(OAB) + \text{Aire}(OAC) + \text{Aire}(OBC)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$\text{Aire}(ABC) = ?$



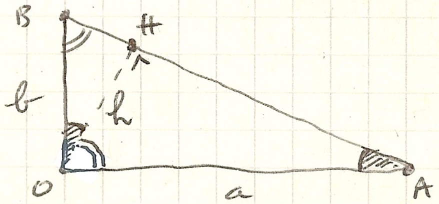
$$h = \sqrt{2}\cdot\sin 60° = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\longrightarrow \quad \text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\text{Aire}(ABC)\right)^2 = 3/4$$

$$\longrightarrow \quad \delta = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

(3)



$$\begin{matrix} OHB \\ AOB \end{matrix} \longrightarrow \frac{|OH|}{|OB|} = \frac{|AO|}{|AB|}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{h}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

(4) $\text{Aire}(OAB) + \text{Aire}(OAC) + \text{Aire}(OBC) = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2}$

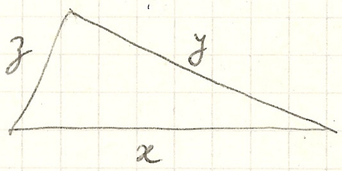
$\text{Aire}(ABC) = \frac{|AC|\cdot h'}{2} = \;...\; ?$

Oh ... comment trouver l'aire d'un triangle dont on connaît les 3 côtés ?

$\longrightarrow$

Côtés de ABC : $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$ et $\sqrt{b^2+c^2}$.

On peut penser à la formule de HERON



$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

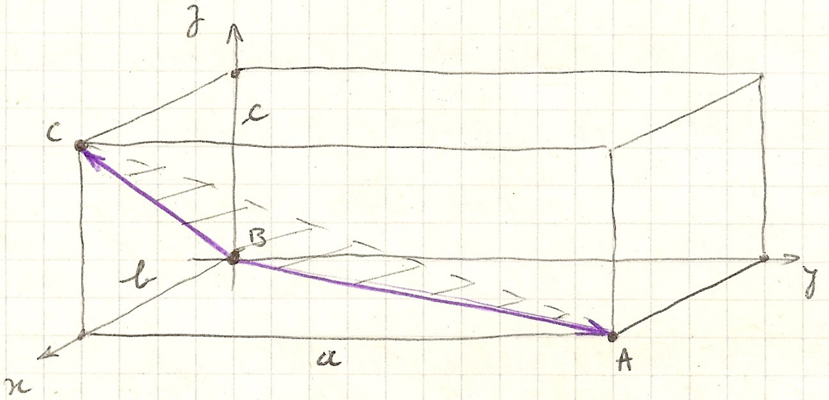
où p est le demi-périmètre du triangle :

$$p = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Cela semble un peu compliqué ...

On peut penser au produit vectoriel de deux vecteurs : il s'agit d'un autre vecteur dont la norme est l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.

Faisons $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$



$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ac \\ bc \\ ab \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2} =$ aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$

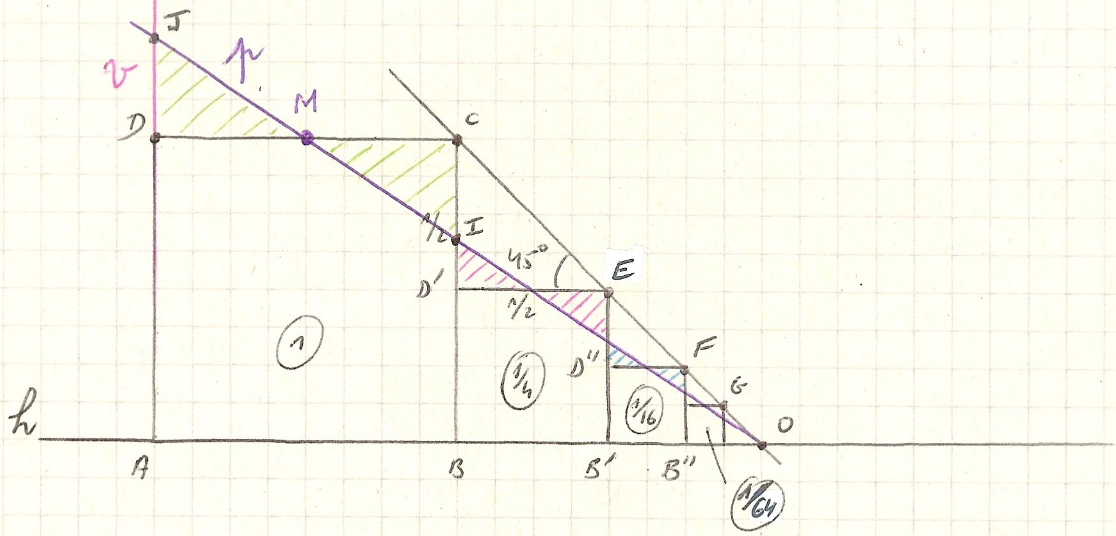
$= 2 \times$ aire du triangle (ABC).

$\rightarrow$ Aire du triangle ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$

Donc : $\delta = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2} - \frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)$

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE - Juillet 2018 (série 2)

(2) "Une suite de carrés"



(1) (2) Les carrés ABCD et BB'ED' sont homothétique car leurs côtés sont parallèles.
Le rapport d'homothétie est 1/2.

Traçons la droite CE. Elle coupe h en O.

Le point O est le centre de l'homothétie car

$$|OB| = \frac{1}{2}|OA| \quad \text{et} \quad |OE| = \frac{1}{2}|OC|.$$

(en effet B'E // BO
et D' est le milieu de [BC]
→ E milieu de [OC] par THALÈS)

Le carré B'B''FD'' est l'image de BB'ED' par l'homothétie de centre O et de rapport 1/2. Donc, F ∈ CO.

Par un raisonnement analogue, G ∈ CO, etc.

→ les points C, E, F, G, ... et O sont alignés.

De plus $d = |BO| = 1$ car $|BO| = |BC| = 1$
car la droite CO fait un angle de 45° avec h et le triangle OBC est isocèle.

(3) $d' = |CM| = 1/2$

(4) $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Argument géométrique

Soit I le point de rencontre de BC et OM.
Les triangles IBO et ICM sont semblables (3 angles égaux).

$$\rightarrow \frac{|IB|}{|BO|} = \frac{|IC|}{|CM|} \Leftrightarrow \frac{|IB|}{1} = \frac{|IC|}{1/2} \Leftrightarrow |IB| = 2|IC| \quad \text{or, } |IB| + |IC| = 1 \Rightarrow |IC| = 1/3$$

$$\rightarrow |DJ| = 1/3 \rightarrow |AJ| = 4/3 \rightarrow \text{Aire du } \Delta(OAJ) \geq \Sigma \text{ carrés} = \frac{\overset{2}{|OA|}\cdot\overset{4/3}{|AJ|}}{2} = 4/3$$