6ᴱ A - B - C - D	MATHÉMATIQUE (6H)	AVRIL 2020
	CALCUL INTÉGRAL : ÉVALUATION FORMATIVE (CORRIGÉ)	

1. Calculez les intégrales indéfinies suivantes (méthode au choix).

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x+3} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x}\,dx = \int \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + C$

c) $\displaystyle\int x.\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

Intégration par parties :
u = ln x → u'= 1/x
v' = x → v = $x^2/2$

d) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3.\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

---

2. Calculez l'intégrale indéfinie suivante en utilisant la décomposition en fractions simples.

$$\int \frac{x+8}{x^2-9}\,dx$$

$\displaystyle\frac{x+8}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}$ avec $A = 11/6$ et $B = -5/6$

En effet, il faut $x+8 = A(x+3)+B(x-3)$ → si $x = 3$: $11 = 6A$
→ si $x = -3$: $5 = -6B$

$$\int \frac{x+8}{x^2-9}\,dx = \frac{11}{6}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{5}{6}\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{11}{6}\ln|x-3| - \frac{5}{6}\ln|x+3| + C$$

---

3. Calculez l'intégrale indéfinie suivante en utilisant le changement de variable indiqué :

$$\int x\left(5x^2+1\right)^4 dx \text{ en posant } t = 5x^2+1\,.$$

$dt = 10x\,dx \rightarrow x\,dx = \dfrac{dt}{10}$ donc $\displaystyle\int x\left(5x^2+1\right)^4 dx = \int t^4\,\frac{dt}{10} = \frac{t^5}{50} + C = \frac{\left(5x^2+1\right)^5}{50} + C\,.$

4. Considérez l'intégrale définie $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx \quad \rightarrow \quad I = \int_?^? \ ?\ d\theta$.

Si vous posez $x = \sin\theta$, comment réécrivez-vous cette intégrale définie avec la nouvelle variable θ ? Adaptez les bornes. Ne calculez pas cette intégrale.

Différentions d'abord : $dx = \cos\theta\ d\theta$. Ensuite : $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$.

Adaptons les bornes : si $x = 0$ alors $\sin\theta = 0$ $\rightarrow$ prenons $\theta = 0$

si $x = 1$ alors $\sin\theta = 1$ $\rightarrow$ prenons $\theta = \pi/2$

L'intégrale peut s'écrire $I = \int_0^{\pi/2} \cos\theta . \cos\theta\ d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\ d\theta$.

Remarque : si vous voulez calculer cette intégrale, le plus simple est de partir d'une formule de CARNOT :

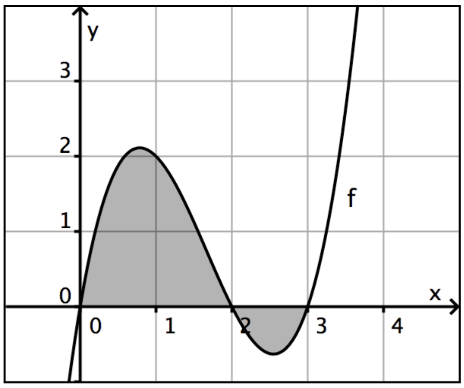
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \ \rightarrow\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$. Réponse : $\pi/4$.

---

5. La fonction f représentée ci-contre est définie par

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x \ .$$

Calculez l'aire grisée.



$$A = \int_0^2 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12} \approx 3{,}08 \text{ (ua).}$$

---

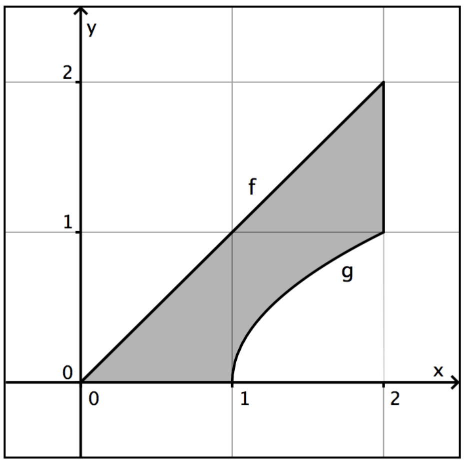
6. Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x-1}$$

représentées ci-contre dans l'intervalle $[0,2]$.

a) Calculez l'aire grisée.

b) Calculez le volume engendré par la rotation de la surface grisée autour de l'axe Ox .



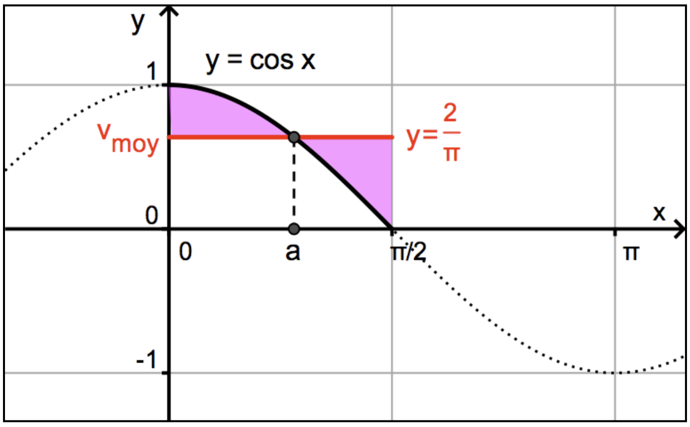
a) $A = \int_0^2 x\ dx - \int_1^2 \sqrt{x-1}\ dx = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$ (ua).

b) $V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^2 x^2 dx - \pi \int_1^2 (x-1) dx = \dfrac{8\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{13\pi}{6}$ (uv).

7. Parmi les valeurs proposées ci-dessous, laquelle est la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\cos x$ dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$? Justifiez.

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{2}{\pi}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\pi}{2}$

$$v_{moy}=\frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi}(1-0)=\frac{2}{\pi}\quad\text{(réponse C)}$$



<u>Remarque</u> : l'aire de la surface comprise entre y = cos x , y = 2 / π et les abscisses 0 et a est égale à l'aire de la surface comprise entre y = cos x , y = 2 / π et les abscisses a et π / 2 .

---

8. La constante de rappel k d'un ressort vaut $200\left(\frac{N}{m}\right)$.

Parmi les valeurs proposées ci-dessous, laquelle correspond au travail (en joules) nécessaire pour étirer ce ressort de 50 (cm) au-delà de sa longueur « naturelle » ?

$\boxed{\text{A}}$ 250 000 $\boxed{\text{B}}$ 500 000 $\boxed{\text{C}}$ 25 $\boxed{\text{D}}$ 50

N'oubliez pas de convertir : 50 (cm) = 0,5 (m).

$$W=\int_0^{0,5}200\,x\,dx=200\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,5}=200\,.\,\frac{1}{8}=25\ \text{(J)}\ .\ \text{Réponse C .}$$
