Solutions de quelques problèmes de dénombrement

1. a) $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$ équipes possibles
Comme il s'agit de choisir 5 joueurs parmi 10 en tenant compte de l'ordre, on peut aussi calculer $A_{10}^{5} = \dfrac{10\,!}{(10-5)\,!} = \dfrac{10\,!}{5\,!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$.

   b) $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5\,!} = 252$ équipes possibles
Comme il s'agit de choisir 5 joueurs parmi 10 en ne tenant pas compte de l'ordre, on peut aussi calculer $C_{10}^{5} = \dfrac{10\,!}{(10-5)\,!\,5\,!} = \dfrac{10\,!}{5\,!\,5\,!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5\,!}$.

---

2. Le mot PARIS est formé de 5 lettres différentes et MONS de 4 lettres différentes.
Il s'agit donc de calculer des nombres de permutations sans répétition :
respectivement $5\,! = 120$ et $4\,! = 24$.

   Dans le cas de BRUXELLES , il y a 2 fois la lettre « E » et 2 fois la lettre « L » .
Il s'agit donc de calculer un nombre de permutations avec répétitions : $P_{9}^{2,2} = \dfrac{9\,!}{2\,!\,2\,!} = 90720$.

---

4. Les deux premières lettres étant fixées, il reste à permuter les quatre autres : *a b* _ _ _ _ .
On peut le faire de $4\,! = 24$ façons.

---

6. Voici un raisonnement possible : la première case à noircir peut être choisie de 12 façons ; une fois cette case noircie, elle « interdit » la ligne et la colonne auxquelles elle appartient et il ne reste donc que 6 possibilités pour choisir la deuxième case ; celle-ci « interdit » une ligne et une colonne supplémentaires, et il ne reste plus que 2 possibilités pour la troisième case.
Il y a donc $\dfrac{12 \times 6 \times 2}{3\,!} = 24$ façons de noircir 3 cases. Il faut diviser par $3\,!$ car l'ordre dans lequel les cases sont noircies n'a aucune importance (par exemple, si l'on noircit 1 - 6 - 11 dans cet ordre, ou si l'on noircit 1 - 11 - 6 , le résultat final sera le même).

   <u>Généralisation</u>

$$\frac{(m \times n) \times \left[(m-1) \times (n-1)\right] \times \left[(m-2) \times (n-2)\right] \times \ldots \times \left[(m-p+1) \times (n-p+1)\right]}{p\,!}$$

$$= \frac{m \times (m-1) \times (m-2) \times \ldots \times (m-p+1) \quad \times \quad n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p\,!}$$

$= C_{m}^{p} \times A_{n}^{p}$ (qui est aussi égale à $C_{n}^{p} \times A_{m}^{p}$)

En effet :

$$\frac{m \times (m-1) \times (m-2) \times \ldots \times (m-p+1)}{p\,!} = \frac{m \times (m-1) \times (m-2) \times \ldots \times (m-p+1) \times (m-p) \times (m-p-1) \times \ldots \times 1}{p\,! \times (m-p) \times (m-p-1) \times \ldots \times 1} = \frac{m\,!}{p\,!\,(m-p)\,!} = C_{m}^{p}$$

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 1} = \frac{n\,!}{(n-p)\,!} = A_{n}^{p}$$

8. a) Une fois qu'une carte est tirée et que l'on a noté sa valeur, elle est remise dans le paquet et il y a donc toujours 52 tirages possibles pour la suivante.
Il y a donc 52 × 52 ×52 = 140 608 tirages possibles.

Bien qu'en pratique, pour résoudre le problème, cela ne soit pas nécessaire, faisons le lien avec la partie théorique du cours : il s'agit du nombre d'arrangements avec répétitions de 3 objets parmi 52 c'est-à-dire $\overline{A_{52}^3} = 52^3$.

b) Il y a 52 × 51 ×50 = 132 600 tirages possibles.
Il s'agit du nombre d'arrangements sans répétition de 3 objets parmi 52 c'est-à-dire

$$A_{52}^3 = \frac{52\,!}{(52-3)\,!} \;.$$

---

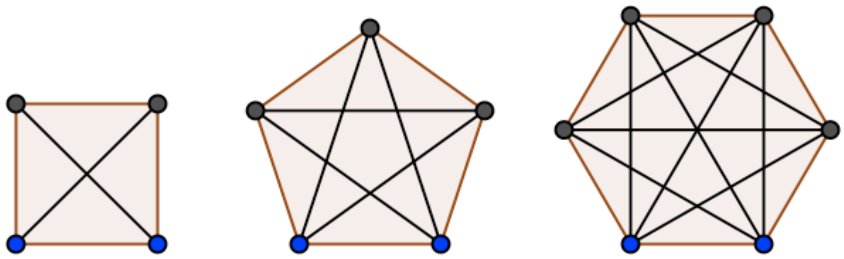
9. Il s'agit de choisir 3 personnes parmi 8 sans accorder d'importance à l'ordre du choix.

Il y a donc $\frac{8 \times 7 \times 6}{3\,!} = 56$ façons de le faire (ou C_8^3).

En effet, on choisit un groupe de 3 personnes sans leur attribuer de fonction précise ; si l'on avait demandé de combien de façons on peut choisir un président, un secrétaire et un trésorier, alors l'ordre avait de l'importance et le nombre de choix était $8 \times 7 \times 6 = 336$ (ou A_8^3).

---

14. Pour les trois premières formes : respectivement 2 , 5 et 9 diagonales.



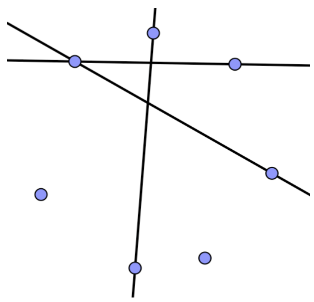
Pour un *n*-gone ? Pour tracer une diagonale, il faut choisir un sommet parmi n et ensuite un deuxième sommet parmi n - 3 (en effet, il reste n - 1 sommets, mais il faut aussi enlever les deux voisins immédiats du premier, sinon on obtient un côté et non une diagonale).

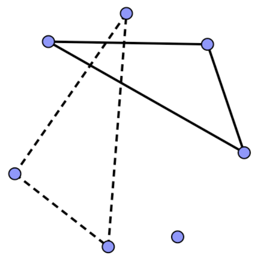
Comme l'ordre de choix des deux sommets importe peu (diagonale AB = diagonale BA) , il y a

$$\frac{n \times (n-3)}{2} \text{ diagonales.}$$

15. a) Il faut choisir 2 points parmi 7 sans accorder de l'importance à l'ordre : $\dfrac{7 \times 6}{2\,!} = 21$ droites possibles (ou C_7^2).

b) Il faut choisir 3 points parmi 7 sans accorder de l'importance à l'ordre : $\dfrac{7 \times 6 \times 5}{3\,!} = 35$ triangles possibles (ou C_7^3).





---

16. Il y a $\dfrac{15 \times 14 \times 13}{3\,!} = 455$ façons de choisir 3 joueurs parmi les 15 élèves de la classe A .

Il y a $\dfrac{12 \times 11}{2\,!} = 66$ façons de choisir 2 joueurs parmi les 12 élèves de la classe B .

Chacun des groupes d'élèves de A pouvant être associé à l'un des groupes d'élèves de B , il y a 455 × 66 = 30 030 façons de former l'équipe.

Nous venons de faire $C_{15}^3 \times C_{12}^2$.

---

18. Avec un seul signe : 2 lettres « • » et « - » .
Avec deux signes : 4 lettres « • • » , « • - » , « - • » et « - - » .
Avec trois signes : 8 lettres
Avec quatre signes : 16 lettres
Avec cinq signes : 32 lettres.
En utilisant jusqu'à quatre signes, il est possible de former 30 lettres (ou caractères) et donc de couvrir tout l'alphabet.

---

19. C'est une application directe du principe de multiplication : il y a 5 × 10 × 6 = 300 menus possibles.

---

20. On sert d'abord le premier joueur : il y a $C_{32}^8 = \dfrac{32\,!}{8\,!\,24\,!} = 10\,518\,300$ façons de le faire.

Pour le second joueur : $C_{24}^8 = \dfrac{24\,!}{8\,!\,16\,!} = 735\,471$ façons.

Pour le troisième joueur : $C_{16}^8 = \dfrac{16\,!}{8\,!\,8\,!} = 12\,870$ façons.

Pour le quatrième joueur : $C_8^8 = \dfrac{8\,!}{8\,!\,0\,!} = 1$ façon !

Le produit de ces quatre nombres vaut environ $9{,}96 \,.\, 10^{16}$.