Variables aléatoires et lois de probabilités

1. Exemple

Dans une classe on a noté la pointure de chaque élève. Voici les résultats.

Pointure	Filles	Garçons	Total
36	1	0	1
37	1	0	1
38	2	1	3
39	4	2	6
40	3	1	4
41	0	3	3
42	1	4	5
43	0	2	2
44	0	2	2
45	0	1	1
46	0	1	1
Total	12	17	29

Choisissons au hasard un élève de ce groupe. Comme nous le savons, il s'agit là d'une *expérience aléatoire*.
Si, plutôt qu'à la personne elle-même, nous nous intéressons seulement à sa pointure, c'est-à-dire à un *nombre réel* associé à cette personne, nous dirons que nous étudions la *variable aléatoire* « pointure ».
Notons X cette variable aléatoire. Pour notre exemple, les différentes valeurs qu'elle peut prendre sont les nombres entiers compris entre 36 et 46 :

$$36 \leq X \leq 46 \quad \text{et} \quad X \in N \ .$$

Voici maintenant quelques questions de probabilités.

a) *Quelle est la probabilité pour que la pointure de l'élève soit égale à 40 ?*

Comme trois filles et un garçon sont dans ce cas ; il y a donc 4 cas favorables sur 29 cas possibles et nous écrirons : $P(X = 40) = \dfrac{4}{29}$.

b) *Quelle est la probabilité pour que la pointure de l'élève soit inférieure ou égale à 39 ?*

Il suffit d'additionner les probabilités des pointures comprises entre 36 et 39 :

$$P(X \leq 39) = P(X = 36) + P(X = 37) + P(X = 38) + P(X = 39) = \frac{11}{29}$$

Les questions peuvent aussi relever des *probabilités conditionnelles*.

c) *Sachant que l'élève est une fille, quelle est la probabilité pour que sa pointure soit égale à 38 ?*

Soit F l'événement « l'élève est une fille ». Nous écrirons : $P(X = 38 \,|\, \mathrm{F}) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

d) *Sachant que l'élève est un garçon, quelle est la probabilité pour que sa pointure soit supérieure ou égale à 42 ?*

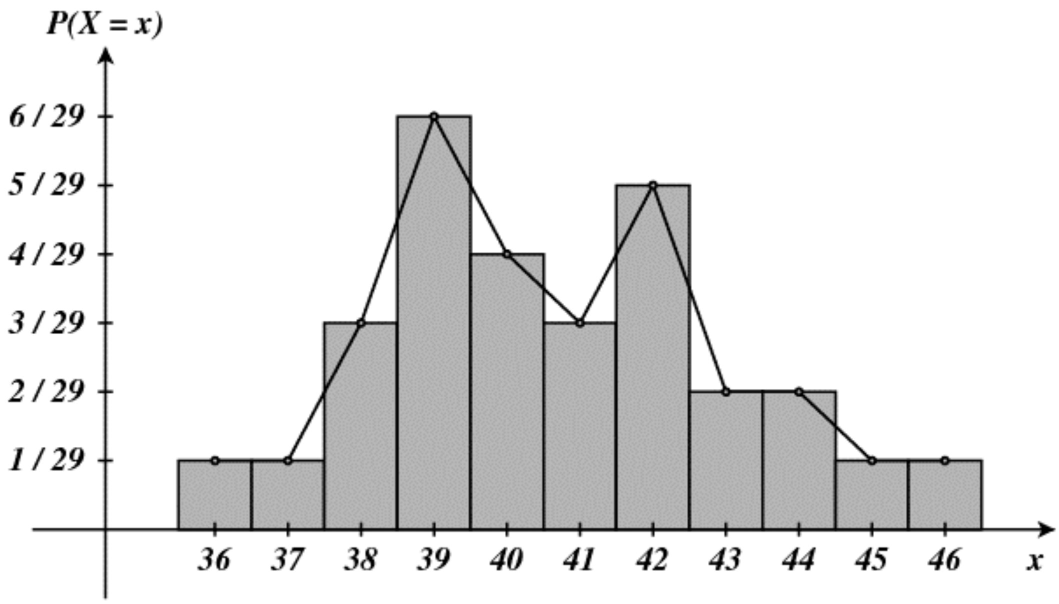
Soit G l'événement « l'élève est un garçon ». Nous écrirons : $P(X \geq 42 \mid \mathrm{G}) = \dfrac{10}{17}$.

Si nous cherchons la probabilité de chacune des valeurs possibles de X , nous obtenons un ensemble de valeurs constituant la *loi de probabilité* de la variable aléatoire X .

Pour notre exemple, nous trouvons les valeurs suivantes :

$P(X = 36) = \dfrac{1}{29}$	$P(X = 42) = \dfrac{5}{29}$
$P(X = 37) = \dfrac{1}{29}$	$P(X = 43) = \dfrac{2}{29}$
$P(X = 38) = \dfrac{3}{29}$	$P(X = 44) = \dfrac{2}{29}$
$P(X = 39) = \dfrac{6}{29}$	$P(X = 45) = \dfrac{1}{29}$
$P(X = 40) = \dfrac{4}{29}$	$P(X = 46) = \dfrac{1}{29}$
$P(X = 41) = \dfrac{3}{29}$	

On visualise couramment une loi de probabilité via un diagramme en rectangles ou une ligne polygonale.



Exercices

1. On a mesuré les tailles en centimètres de cent femmes adultes. Voici les résultats.

Tailles	Effectifs	Tailles	Effectifs	Tailles	Effectifs
155	1	164	7	173	6
156	1	165	5	174	4
157	2	166	5	175	3
158	3	167	6	176	2
159	3	168	7	177	3
160	5	169	5	178	1
161	6	170	4	179	1
162	4	171	5	180	1
163	5	172	5		

Supposons que cet *échantillon* de cent femmes soit représentatif de l'ensemble de la population féminine du pays.

Une femme est désignée par le sort dans l'ensemble de la population.
Si nous notons T la variable aléatoire « taille », quelles valeurs peut-on raisonnablement donner aux probabilités suivantes ? Critiquer ces réponses.

a) $P(T > 173)$

b) $P(T \leq 160)$

c) $P(163 \leq T \leq 172)$

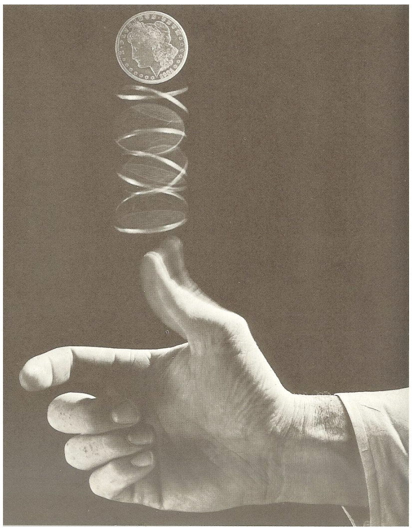
d) $P(170 < T < 175)$

e) $P(T < 155)$

f) $P(T \leq 180)$

---

2. Une pièce de monnaie est lancée trois fois de suite. Le nombre de fois que « face » apparaît au cours de cette expérience est une variable aléatoire X.



a) Donner la loi de probabilité de X, c'est-à-dire calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, etc.

b) Réaliser le diagramme en rectangles représentant cette loi de probabilité.

---

3. Même travail qu'au numéro 2 avec X qui représente cette fois le nombre de « faces » obtenues lorsque la pièce est lancée *quatre* fois de suite.

4. Une expérience aléatoire consiste à jeter deux dés et à observer la somme des résultats obtenus (variable aléatoire S). Le graphique est celui de la loi de probabilité de S.

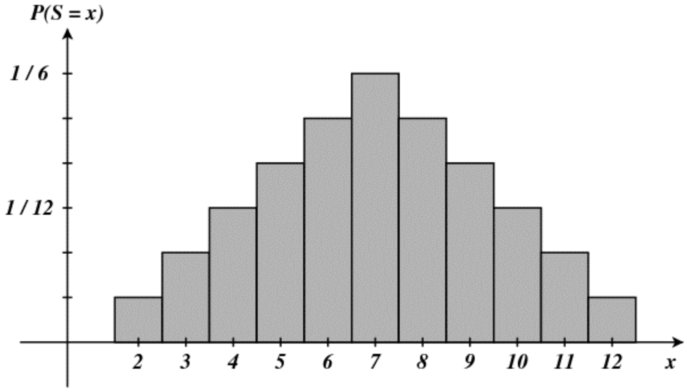
Déterminer :

a) $P(S = 5)$;

b) $P(S \geq 8)$ et $P(S < 8)$;

c) $P(S \geq 4)$;

d) le plus grand nombre entier k tel que $P(S \leq k)$ soit inférieure à 10%.



---

5. Lors d'un tirage du Lotto, on extrait 7 numéros différents parmi les numéros de 1 à 42. Soit M la variable aléatoire « le plus grand numéro tiré ».

a) Quelles sont les valeurs possibles de M ?

b) Pouvez-vous expliquer pourquoi $P(M = 42) = \dfrac{1}{6}$?

---

6. Imaginons un « mini-lotto » consistant à tirer au hasard trois numéros parmi 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Voici des exemples de tirages : $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, etc.

a) Sachant que, comme pour le vrai Lotto, l'ordre de sortie des numéros n'a pas d'importance, combien de tirages différents sont-ils possibles ?

b) Dresser la liste de tous les tirages possibles et noter la valeur correspondante de M.

c) Déterminer la distribution de probabilités de M.

<u>Remarque</u>

La détermination des différentes probabilités peut se faire autrement qu'en dressant la liste de tous les tirages possibles.

A titre d'exemple, voici le calcul de $P(M = 5)$.

- On extrait 3 numéros parmi 6 ; le nombre de façons de faire cela est $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$.
- Pour que le plus grand numéro soit 5, il faut que les deux autres numéros aient été tirés parmi 1, 2, 3 et 4 ; le nombre de façons de faire cela est $\dfrac{4 \times 3}{2!} = 6$.
- Nous en concluons que $P(M = 5) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.

---

7. Calculer la distribution de probabilités de M en utilisant la méthode décrite dans la remarque ci-dessus.

2. Espérance mathématique

Exemple

Une personne vous propose un jeu dont voici les règles :

- vous lancez un dé une fois ;
- - si vous obtenez « 6 », vous gagnez 3 € ;
  - si vous obtenez « 4 » ou « 5 », vous gagnez 1 € ;
  - si vous obtenez un résultat inférieur ou égal à « 3 », vous payez 2 € .

Comme pour tous les jeux d'argent, vous refusez évidemment de jouer ! Mais vous vous posez tout de même la question : « ce jeu est-il équitable ? »

Une façon d'aborder le problème est d'évaluer votre gain – ou perte – si vous jouez un grand nombre de fois.
Supposons que le jeu soit répété 600 fois. Il est raisonnable de penser que le « 6 » apparaîtra environ 100 fois, que vous obtiendrez « 4 » ou « 5 » environ 200 fois, et un résultat inférieur ou égal à « 3 » environ 300 fois[1].

Le bilan financier serait alors nettement en votre défaveur :

$$100 \times 3 + 200 \times 1 + 300 \times (-2) = -100 \text{ € !}$$

Remarquons que perdre 100 € sur 600 parties équivaut à perdre, en moyenne, $\frac{1}{6} \approx 0{,}1667$ € par partie. Ceci nous amène à la notion d'*espérance mathématique* d'une variable aléatoire.

Considérons la variable aléatoire X dont les valeurs sont les gains possible pour le jeu décrit ci-dessus : 3 , 1 et -2 (puisqu'il s'agit d'une perte dans le dernier cas).

Voici la loi de probabilité de X :

$$P(X = 3) = \frac{1}{6}$$
$$P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(X = -2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, se calcule comme suit :

$$E(X) = P(X = 3) \times 3 + P(X = 1) \times 1 + P(X = -2) \times (-2) = \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-2) = -\frac{1}{6}$$

La valeur négative obtenue ici indique que le jeu est défavorable au joueur. Elle représente la perte moyenne par partie.

[1] En effet, nous savons que lorsqu'une expérience aléatoire est répétée de nombreuses fois, les fréquences des événements ont tendance à se rapprocher des probabilités théoriques.

Définition

Soit une variable aléatoire X pouvant prendre n valeurs différentes : x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n . L'espérance mathématique de X , notée $E(X)$ est la somme des produits de chacune des valeurs possibles de X par la probabilité que X prenne cette valeur :

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + ... + P(X = x_n) \cdot x_n$$

Si l'on note $P(X = x_i) = p_i$, nous obtenons : $E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n$.

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i}$$

Exercices

1. L'organisateur d'un loterie propose un gros lot d'une valeur de 800 euros, un second lot d'une valeur de 300 euros et des lots de consolation d'un valeur de 20 euros chacun.
   La probabilité de gagner le gros lot vaut 0,001 ; celle de gagner le second lot vaut 0,005 et celle d'avoir un lot de consolation vaut 0,01 .

   a) La somme que débourse l'organisateur est une variable aléatoire X . Quelles sont toutes les valeurs possibles de X ? Calculer l'espérance mathématique de X .

   b) Quel doit être le prix minimal d'un billet de tombola pour que l'organisateur ne soit pas perdant ?

---

2. Les organisateurs d'une tombola de bienfaisance ont imprimé 1000 billets.
   Il a été décidé que
   - 5 billets gagneront 500 € ;
   - 12 billets gagneront 100 € ;
   - 25 billets gagneront 30 € ;
   - 55 billets gagneront 10 € ;
   - les autres billets ne gagneront rien.

   a) Soit X la variable aléatoire « gain procuré par un billet ». Calculer l'espérance mathématique de X .

   b) Sachant que tous les billets seront vendus, quel doit être le prix d'un billet pour que cette tombola dégage un bénéfice de 5000 € ?

---

3. Dans un jeu de « pile » ou « face », on gagne 1 euro si l'on obtient « pile » et on perd 2 euros si l'on obtient « face ». Soit X la variable aléatoire « gain réalisé lors d'une partie ». Déterminer sa loi de probabilité ainsi que son espérance mathématique.

---

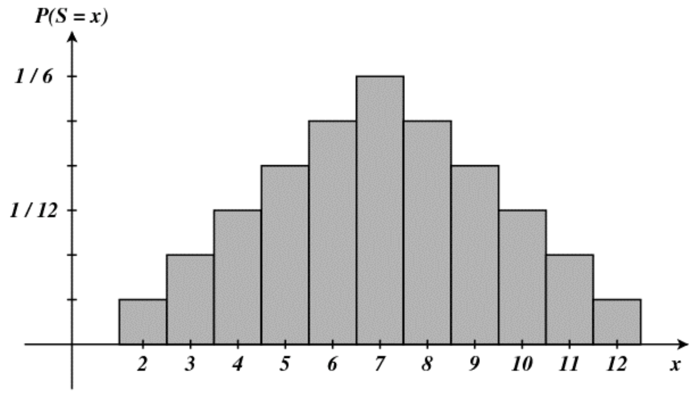
4. Une pièce de monnaie est lancée trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire « nombre de *pile* obtenu ». Déterminer sa la loi de probabilité ainsi que son espérance mathématique.

5. Lancer d'un ou plusieurs dés

   a) On lance un dé. Soit X la variable aléatoire « nombre de points sur la face supérieure du dé ». Calculer $E(X)$.

   b) On lance deux dés. Soit S la variable aléatoire « somme des points sur les faces supérieures des dés ». Calculer $E(S)$.

   c) Ce résultat est-il visible sur le diagramme ci-dessous, représentant la loi de probabilité de S ?



   d) Comparer les résultats (a) et (b). Surprenant ? Quelle est l'espérance mathématique de la somme des points si l'on lance trois dés ?

---

6. Une enquête est menée auprès de cent familles. Pour chacune d'elles, on note le nombre d'enfants en précisant le nombre de filles et le nombre de garçons. Ce travail donne le tableau suivant.

		Nombre de filles					
		0	1	2	3	4	
Nombre de garçons	0	10	9	4	3	2	28
	1	7	10	10	7	1	35
	2	7	9	7	5	0	28
	3	3	2	1	1	0	7
	4	1	1	0	0	0	2
		28	31	22	16	3	100

   a) Dans combien de familles y a-t-il deux garçons et une seule fille ?

   b) Dans combien de familles y a-t-il trois filles ?

   c) Une famille est choisie au hasard parmi les cent familles rencontrées. Trois variables aléatoires sont définies : F « nombre de filles », G « nombre de garçons » et X « nombre d'enfants ». Calculer $E(F)$, $E(G)$ et $E(X)$.

   d) Que lien peut-on supposer entre ces trois espérances mathématiques ?

3. Loi binomiale

Nous allons maintenant étudier des expériences aléatoires pour lesquelles il y a exactement *deux* résultats possibles :

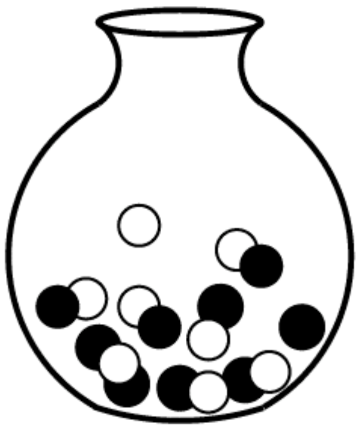
- le lancer d'une pièce de monnaie : pile ou face ;
- une naissance : fille ou garçon ;
- un sondage d'opinion : pour ou contre ;
- une question avec une seule réponse correcte parmi quatre réponses proposées : réponse correcte ou réponse fausse.

Dans la pratique, de telles expériences sont menées un grand nombre de fois :

- lancer cent fois une pièce de monnaie ;
- un certain jour de l'année, 500 enfants naissent dans le pays ;
- un millier de personnes sont interrogées sur le *numerus clausus* pour les étudiants en médecine ;
- un examen compte vingt questions et quatre réponses proposées pour chacune d'elles.

<u>Le modèle de l'urne</u>

De telles expériences aléatoires peuvent être modélisées par le tirage de boules dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires.



Voici un exemple : les statistiques montrent que $48{,}5\%$ des nouveaux-nés sont des filles. Si nous remplissons une urne avec 485 boules blanches et 515 boules noires, nous pouvons simuler 500 naissances dans le pays en tirant 500 boules de l'urne (ce tirage doit-il se faire avec ou sans replacement ?)

Un autre exemple : un étudiant décide de répondre au hasard à chacune des 20 questions d'un questionnaire à choix multiples ; sachant que pour chaque question, il y a quatre réponses proposées (dont une seule correcte), comment peut-on simuler cette expérience aléatoire à l'aide d'une urne ?

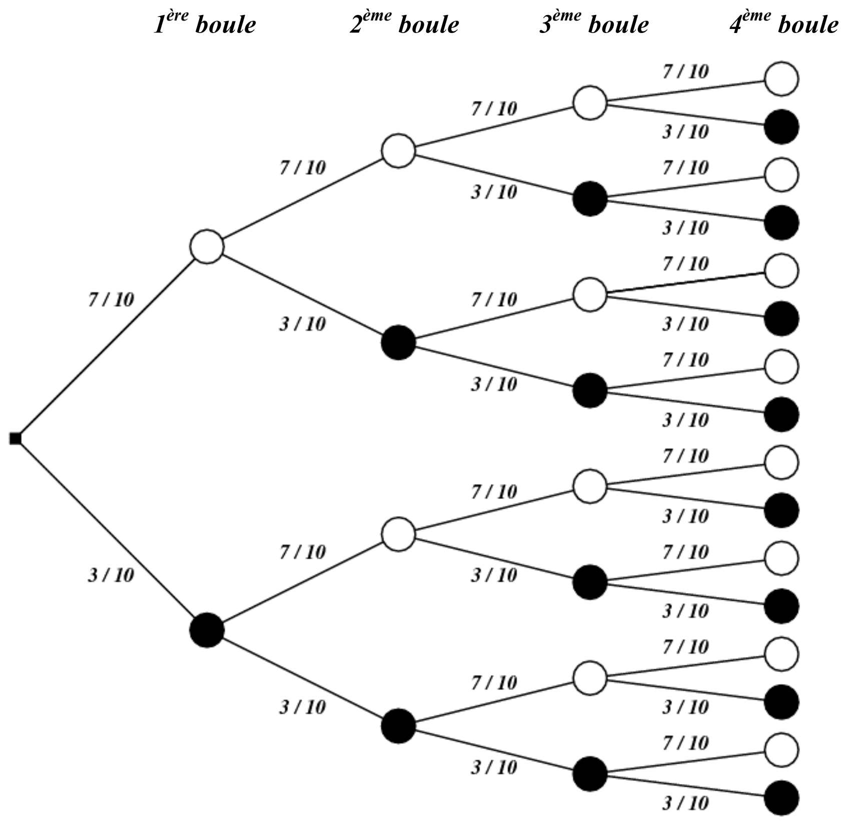
Nous allons maintenant résoudre un problème de tirages de boules dans une urne. Nous allons ainsi découvrir une méthode générale qui nous permettra de résoudre des questions de probabilités liées aux naissances, aux tests de type QCM, etc.

<u>Problème</u>

Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires. On extrait successivement 4 boules de l'urne (tirage avec remise).
Soit X la variable aléatoire « nombre de boules blanches obtenues ». Déterminer la loi de probabilités de X.

Solution

Les valeurs possibles pour X sont 0, 1, 2, 3 et 4. Afin de déterminer la probabilité de chacune de ces valeurs, nous allons utiliser un diagramme en arbre.



Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche (ou quatre boules noires) ?

Seul le chemin inférieur du diagramme en arbre est favorable. Nous avons donc :

$$P(X = 0) = 0{,}3^4 \approx 0{,}0081 \ .$$

Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche et trois boules noires ?

La probabilité d'obtenir le tirage $BNNN$, dans cet ordre, est égale à $0{,}7 \cdot 0{,}3^3$.
Les tirages $NBNN$, $NNBN$ et $NNNB$ conviennent également et possèdent chacun la même probabilité que $BNNN$.
Il y a ainsi *quatre chemins favorables* dans le diagramme en arbre et nous obtenons :

$$P(X = 1) = 4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^3 \approx 0{,}0756$$

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches et deux boules noires ?

Voici les six différents ordres possibles pour les tirages favorables :

$$BBNN\ ,\ BNBN\ ,\ BNNB\ ,\ NBBN\ ,\ NBNB\ \ et\ \ NNBB$$

Chacun de ces tirages possède une probabilité égale à $0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2$. Par conséquent :

$$P(X = 2) = 6 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2 \approx 0{,}2646$$

Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches et une seule boule noire ?

Voici les quatre différents ordres possibles pour les tirages favorables :

$$BBBN\ ,\ BBNB\ ,\ BNBB\ \ et\ \ NBBB$$

Chacun de ces tirages possède une probabilité égale à $0{,}7^3 \cdot 0{,}3$. Par conséquent :

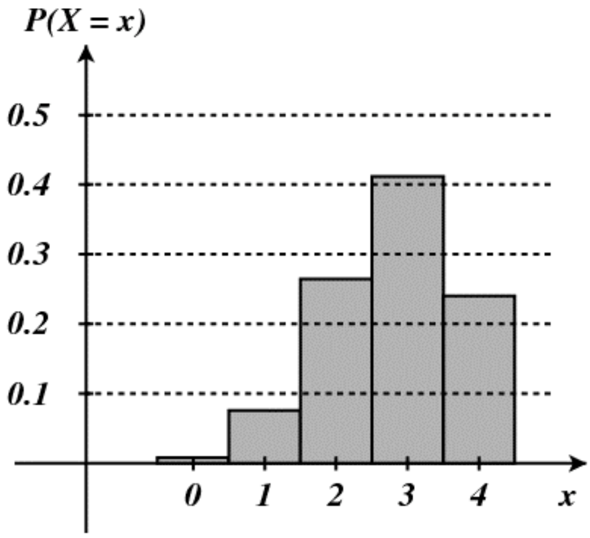
$$P(X = 3) = 4 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}4116$$

Quelle est la probabilité d'obtenir quatre boules blanches ?

Seul le chemin supérieur du diagramme en arbre est favorable. Nous avons donc :

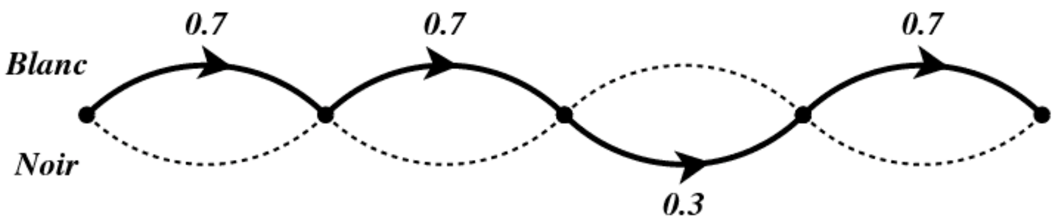
$$P(X = 4) = 0{,}7^4 \approx 0{,}2401\ .$$

Cette loi de probabilité est représentée par le diagramme ci-dessous. Il montre bien que le nombre de boules blanches le plus probable est 3 . C'était prévisible. Pourquoi ?



Remarque

Plutôt que de faire un diagramme en arbre complet, ce qui est souvent fastidieux, nous pouvons utiliser le schéma suivant comme support de raisonnement.



Une flèche supérieure symbolise le tirage d'une boule blanche, tandis qu'une flèche inférieure symbolise celui d'une boule noire. La probabilité de tirage est indiquée à proximité de la flèche.
La probabilité d'obtenir le tirage *BBNB* dans cet ordre vaut donc $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}7^3 \cdot 0{,}3$.

Si l'on souhaite connaître la probabilité de tirer trois boules blanches et une seule noire, sans se préoccuper de l'ordre, il reste à déterminer le nombre de « mots » de quatre lettres comprenant trois fois la lettre B et une fois la lettre N.
Cela revient à déterminer le nombre de façons de placer trois fois la lettre B sur quatre emplacements possibles[2] : $C_4^3 = 4$. Finalement : $P(X = 3) = C_4^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}4116$.

Généralisation (1)

Procéder à des tirages successifs, avec replacement, de boules d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires est un exemple de *schéma binomial* ou de *Bernoulli*.

Un schéma binomial est constitué de n expériences aléatoires indépendantes les unes des autres ; chacune de ces expériences donne deux résultats possibles dont les probabilités restent invariables tout au long du schéma.

Une suite de n tirages peut être représentée par un mot de n lettres ne comprenant que les lettres B et N. Par exemple, pour $n = 10$: $B\,B\,N\,B\,N\,N\,N\,B\,N\,N$.

Si la probabilité de tirer une boule blanche vaut p et celle de tirer une boule noire vaut q (avec $q = 1 - p$), la probabilité d'obtenir la suite $B\,B\,N\,B\,N\,N\,N\,B\,N\,N$ vaut :

$$p.p.q.p.q.q.q.p.q.q = p^4.q^6$$

Étant donné qu'il y a C_{10}^4 façons d'écrire un mot de 10 lettres comprenant 4 fois la lettre B et 6 fois la lettre N, la probabilité d'obtenir 4 boules blanches et 6 boules noires vaut :

$$C_{10}^4.p^4.q^6$$

Si l'on note X la variable aléatoire « nombre de boules blanches obtenues », nous avons :

$$P(X = 4) = C_{10}^4.p^4.q^6$$

Exercices

1. Pour un schéma binomial, on s'exprime souvent en termes de « succès » et « échec ».
   Soit p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec d'une expérience aléatoire.
   a) Si l'expérience est menée 10 fois de suite, écrire la formule donnant la probabilité de récolter exactement 3 succès.
   b) Si l'expérience est menée 8 fois de suite, écrire la formule donnant la probabilité de récolter exactement 5 succès.
2. Une urne contient 35 boules blanches et 65 boules noires. Vous effectuez n fois le tirage, avec replacement, d'une boule de l'urne.
   Écrire la formule donnant la probabilité de tirer k boules blanches et $n - k$ boules noires.

[2] Ou une seule fois la lettre N sur quatre emplacements possibles : $C_4^1 = 4$.

Généralisation (2)

Soit X le nombre de succès récoltés au cours d'un schéma binomial de n expériences.
Soit p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec.

La variable aléatoire X est dite *binomiale* de paramètres n et p. Cela se note $X \sim B(n,p)$.
La loi de probabilité de X est :

$$P(X=0)=q^n$$
$$P(X=1)=C_n^1.p.q^{n-1}$$
$$P(X=2)=C_n^2.p^2.q^{n-2}$$
$$P(X=3)=C_n^3.p^3.q^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$P(X=n)=p^n$$

En résumé :

$$\boxed{P(X=k)=C_n^k.p^k.q^{n-k}} \quad \text{avec} \quad 0 \le k \le n$$

Exercices

1. La probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon vaut environ 0,515 ; la probabilité que le bébé soit une fille vaut donc environ 0,485 .

   a) Soit X la variable aléatoire « nombre de filles dans une famille de 5 enfants ». Déterminer la distribution de probabilité de X .

   b) Un certain jour, quinze bébés naissent à La Louvière. Quelle est la probabilité qu'il y ait 10 filles parmi eux ?

   c) Quelle est la probabilité d'obtenir la composition de famille de la photo ?

2. Dans un jeu de cinquante-deux cartes, il y a quatre « couleurs » : cœur, carreau, trèfle et pique (♥ , ♦ , ♣ et ♠). Chaque couleur compte treize cartes.
On extrait successivement 4 cartes du jeu (tirage avec remise).
Soit X la variable aléatoire « nombre de coeurs obtenus ». Déterminer la distribution de probabilités de X.

---

3. Un test comporte six questions à choix multiples.
Il y a trois choix possibles pour chaque question avec une seule bonne réponse dans chaque cas.
Un étudiant décide de répondre au hasard à chaque question.

   a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement trois bonnes réponses ?

   b) Quelle est la probabilité qu'il n'obtienne aucune bonne réponse ?

---

4. On lance un dé bien équilibré dix fois de suite.

   a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le « 6 » ?

   b) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun « 6 » ?

---

5. Un test comporte six questions à choix multiples. Il y a quatre choix possibles pour chaque question avec une seule bonne réponse dans chaque cas.
Un étudiant décide de répondre au hasard à chaque question.
Soit X la variable aléatoire « nombre de bonnes réponses obtenues » et voici la loi de probabilité de X.

k	$P(X=k)$
0	0,1780
1	0,3560
2	0,2966
3	0,1318
4	0,0330
5	0,0044
6	0,0002

   a) Vérifier que $P(X=3)$ est bien égale à 0,1318 .

   b) Quelle est la probabilité qu'il obtienne *au plus* deux bonnes réponses ?

   c) Quelle est la probabilité qu'il obtienne *au moins* trois bonnes réponses ?

Utilisation de tables binomiales cumulatives

Dans la pratique, on utilise souvent des *tables cumulatives*. Celles-ci donnent les valeurs de $P(X \leq k)$, c'est-à-dire, dans le cas de l'exercice 5, la probabilité d'obtenir *au plus* k bonnes réponses.

Par exemple :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}1780 + 0{,}3560 + 0{,}2966 \approx 0{,}8306$$

6. Reprendre l'énoncé de l'exercice 5.

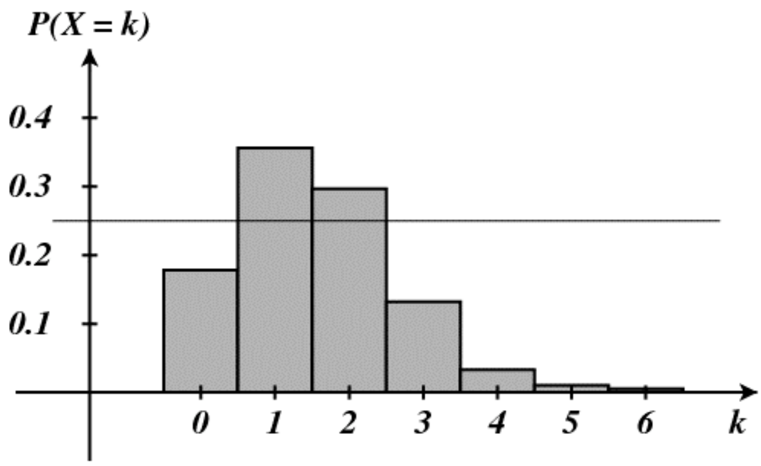
   a) Vérifier les premières lignes et compléter la table cumulative ci-dessous.

k	$P(X \leq k)$
0	0,1780
1	0,5339
2	0,8306
3	
4	
5	
6	

   b) Comment déterminer, à l'aide de la table cumulative, la probabilité que l'étudiant obtienne *exactement* trois bonnes réponses?

---

7. Voici le diagramme représentant la loi de probabilité d'une variable aléatoire binomiale X avec $n = 6$ et $p = 0{,}25$ (la même que dans les exercices 5 et 6).



   a) Comment trouver les valeurs de $P(X \leq 2)$ et $P(X \geq 3)$ à l'aide de ce diagramme ?

   b) Comment trouver $P(X \geq 4)$ à l'aide de la table cumulative ?

   c) Pourquoi une table cumulative est-elle plus pratique qu'une table non cumulative ?

8. Voici la table cumulative d'une variable aléatoire binomiale X avec $n = 10$ et $p = 0,25$.

k	$P(X \leq k)$
0	0,0563
1	0,2440
2	0,5256
3	0,7759
4	0,9219
5	0,9803
6	0,9965
7	0,9996
8	1,0000
9	1,0000
10	1,0000

a) Pourquoi cette table renseigne-t-elle $P(X \leq 8) = P(X \leq 9) = P(X \leq 10) = 1$? Critiquer.

b) L'étudiant que nous connaissons bien conserve la même méthode pour présenter ses tests : face à un QCM de 10 questions avec 4 choix possibles pour chaque question, il décide de répondre au hasard !
Quelle probabilité a-t-il de récolter plus de 6 bonnes réponses ?

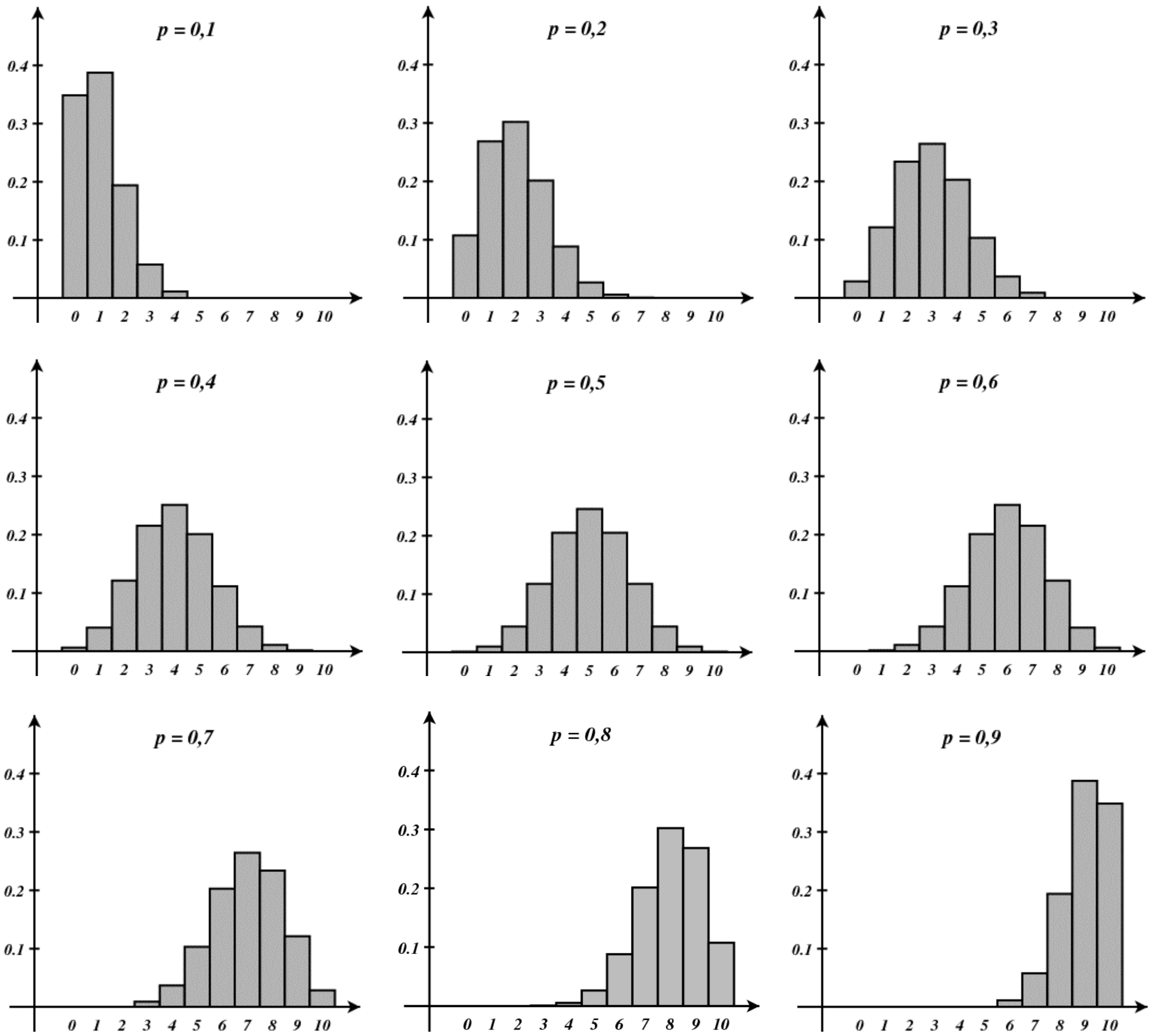
c) Calculer $P(2 < X \leq 6)$.

---

9. Voici les diagrammes des lois binomiales pour $n = 10$ et $p = 0,1 ; 0,2 ; ... ; 0,9$.

a) Repérer le rectangle le plus haut dans chaque diagramme. Expliquer.

b) Certains diagrammes sont « miroirs » l'un de l'autre. Expliquer.



En annexe, vous trouverez des tables binomiales cumulatives pour toutes les valeurs entières de n comprises entre 2 et 20, ainsi que pour n = 50 et n = 100 .

Les valeurs choisies pour p sont : 0,05 ; 0,10 ; 0,15 ; ... ; 0,50 et aussi $1/6$; $1/3$.

<u>Exercices basés sur les tables fournies en annexe</u>

1. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de fournir des tables pour $p \geq 0{,}5$?

---

2. Soit X une variable aléatoire binomiale. Déterminer les probabilités suivantes à l'aide des tables.

   a) $P(X \leq 4)$ pour $n = 8$ et $p = 0{,}35$

   b) $P(X < 10)$ pour $n = 19$ et $p = 0{,}5$

   c) $P(X > 8)$ pour $n = 15$ et $p = 0{,}2$

   d) $P(X \geq 15)$ pour $n = 50$ et $p = 1/3$

   e) $P(X = 9)$ pour $n = 50$ et $p = 1/6$

   f) $P(35 < X < 45)$ pour $n = 100$ et $p = 2/5$

<u>Remarque</u> : si l'on travaille avec des valeurs de p supérieures à ½ , il est commode de s'intéresser aux échecs plutôt qu'aux succès ; voici un exemple.

On donne $n = 12$ et $p = 0{,}75$. On demande de calculer $P(X \leq 5)$.
Définissons la variable aléatoire Y « nombre d'échecs ». Nous avons donc : $Y = 12 - X$.
Cette nouvelle variable obéit à une loi binomiale avec les paramètres $n = 12$ et $p = 0{,}25$.

$$P(X \leq 5) = P(Y \geq 7) = 1 - P(Y \leq 6) \approx 1 - 0{,}9857 \approx 0{,}0143$$

3. En application de cette remarque, déterminer à l'aide des tables.

   a) $P(X \leq 10)$ pour $n = 20$ et $p = 0{,}6$

   b) $P(X = 44)$ pour $n = 50$ et $p = 0{,}9$

   c) $P(X > 6)$ pour $n = 14$ et $p = 2/3$

---

4. On estime qu'un candidat sur six réussit l'examen pratique de conduite automobile au premier essai. Ce mercredi après-midi, 17 candidats se présentent pour la première fois. Quelle est la probabilité pour que plus de trois d'entre eux réussissent ?

---

5. En examinant un grand lot de blocs de fromage, l'inspection sanitaire conclut que 1% des blocs contiennent un taux trop élevé de dioxine. Un supermarché ayant acheté 100 blocs de ce fromage, quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus de 5 blocs contaminés ?

6. a) Un tireur à l'arc débutant atteint le centre de la cible en moyenne une fois sur cinq. Il tire 50 fois de suite.
   Quelle est la probabilité qu'il « tape dans le mille » plus de 10 fois ?

   b) Après quelques années d'entraînement, il atteint le centre en moyenne quatre fois sur cinq. Quelle est la probabilité qu'il manque le centre 10 fois ?
   Et quelle est la probabilité qu'il atteigne le centre plus de 40 fois ?

---

7. Un certain traitement médical est efficace pour 60 % des patients auxquels il est administré. Dans un groupe de douze patients, quelle est la probabilité que le traitement se révèle inefficace pour au plus cinq d'entre eux ?
   Et quelle est la probabilité qu'au moins huit patients soient guéris ?

---

8. Un médecin prétend être capable de déterminer le sexe d'un enfant trois mois avant sa naissance. Il affirme que ses prévisions se sont avérées exactes dans 80 % des cas. Afin de vérifier ses dires, on lui propose de faire des prévisions pour 15 nouveaux cas.

   a) Si les propos du médecin ne sont que pure fanfaronnade, c'est-à-dire s'il n'a qu'une chance sur deux de prévoir le sexe du bébé, quelle est la probabilité qu'il fasse au moins douze prévisions correctes ?

   b) Mais si ses compétences sont réelles, quelle est la probabilité qu'il fasse moins de douze prévisions correctes ?

---

9. Une pièce de monnaie est lancée n fois. Quelle est la probabilité d'obtenir entre 40 % et 60 % de « faces » lorsque :

   a) $n = 10$? b) $n = 20$? c) $n = 50$? d) $n = 100$?

   Que constate-t-on ? Était-ce prévisible ?

---

4. Loi hypergéométrique

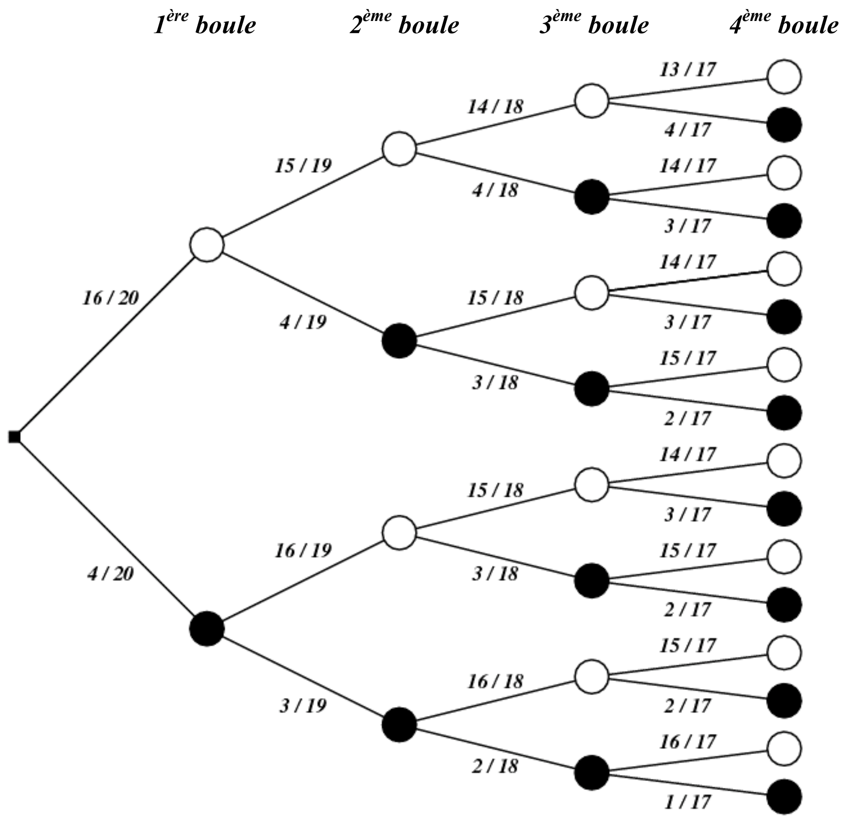
Rappelons-nous les caractéristiques du schéma binomial : il est constitué de n expériences aléatoires *indépendantes* les unes des autres ; chacune de ces expériences donne deux résultats possibles dont les probabilités restent *invariables* tout au long du schéma.
Il n'en est pas toujours ainsi ! Les expériences peuvent être *dépendantes* les unes des autres et les probabilités *varier* au cours du schéma. Tel est le cas du *schéma hypergéométrique*.

Afin d'expliquer de quoi il s'agit, revenons à une situation que nous avons déjà rencontrée : le tirage de boules dans une urne.

Problème

Une urne contient 16 boules blanches et 4 boules noires. On extrait successivement 4 boules de l'urne (tirage sans remise).
Soit X la variable aléatoire « nombre de boules blanches obtenues ». Déterminer la loi de probabilités de X.

Solution



Lors du premier tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $^{16}/_{20}$ et celle d'obtenir une boule noire est $^{4}/_{20}$. Au deuxième tirage, il n'y a plus que 19 boules dans l'urne puisque le tirage se fait sans replacement. La probabilité d'obtenir une boule blanche dépend donc de la couleur de la première boule : si elle est blanche, il n'y a plus que 15 boules blanches dans l'urne d'où une probabilité de $^{15}/_{19}$; si elle est noire, toutes les boules blanches sont encore dans l'urne d'où une probabilité de $^{16}/_{19}$.
Toutes les autres probabilités attachées aux branches du diagramme s'expliquent d'une façon analogue. Vérifiez !

Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche (ou quatre boules noires) ?

Seul le chemin inférieur du diagramme en arbre est favorable. Nous avons donc :

$$P(X=0)=\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot\frac{1}{17}\approx 0{,}0002\ .$$

Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche et trois boules noires ?

La probabilité d'obtenir le tirage $BNNN$, dans cet ordre, est égale à $\frac{16}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}\approx 0{,}0033$.
Voici les probabilités pour les autres tirages qui conviennent :

- $NBNN$: $\frac{4}{20}\cdot\frac{16}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}\approx 0{,}0033$
- $NNBN$: $\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{16}{18}\cdot\frac{2}{17}\approx 0{,}0033$
- $NNNB$: $\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot\frac{16}{17}\approx 0{,}0033$

Quand l'ordre du tirage change, l'ordre des facteurs change aussi mais cela ne change rien au résultat final ! Retenons cela pour la suite ...
Il suffit donc de reprendre le résultat trouvé pour $BNNN$ et de le multiplier par 4 :

$$P(X=1)=4\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}\approx 0{,}0132$$

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches et deux boules noires ?

Voici les six différents ordres possibles pour les tirages favorables :

$$BBNN\,,\ BNBN\,,\ BNNB\,,\ NBBN\,,\ NBNB\ \ et\ \ NNBB$$

Chacun de ces tirages possède une probabilité égale à $\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{3}{17}\approx 0{,}0033$.
Par conséquent :

$$P(X=2)=6\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{3}{17}\approx 0{,}1486$$

Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches et une seule boule noire ?

Voici les quatre différents ordres possibles pour les tirages favorables :

$$BBBN\,,\ BBNB\,,\ BNBB\ \ et\ \ NBBB$$

Chacun de ces tirages possède une probabilité égale à $\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{4}{17}\approx 0{,}1156$.
Par conséquent :

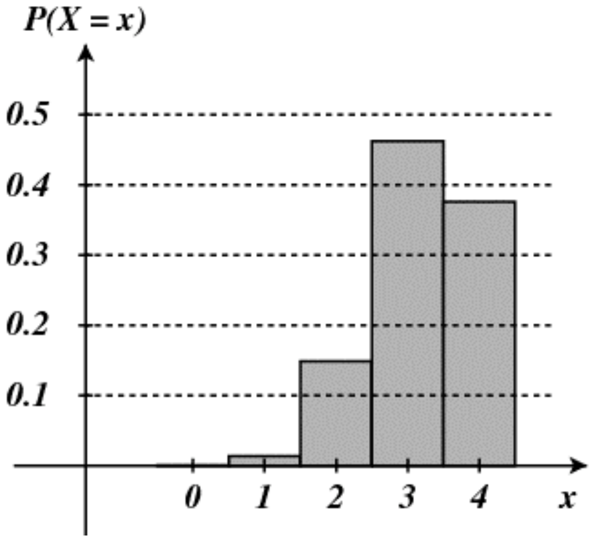
$$P(X=3)=4\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{4}{17}\approx 0{,}4623$$

Quelle est la probabilité d'obtenir quatre boules blanches ?

Seul le chemin supérieur du diagramme en arbre est favorable. Nous avons donc :

$$P(X=4)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{13}{17}\approx 0{,}3756\,.$$

Cette loi de probabilité est représentée par le diagramme ci-dessous.



Remarque : dans les calculs précédents, les nombres de chemins favorables (1, 4 , 6, 4 et 1) ne sont autres que les coefficients binomiaux : C_4^0 , C_4^1 , C_4^2 , C_4^3 et C_4^4 .

Une autre façon de résoudre le problème

Nous pouvons utiliser les techniques de dénombrement et calculer les probabilités en grâce aux rapports « nombre de cas favorables / nombre de cas possibles ».

Nombre de cas possibles

Il s'agit du nombre de façons de tirer sans replacement 4 boules parmi 20 boules :

$$C_{20}^4=\frac{20!}{16!4!}=4845$$

Nombre de cas favorables pour ...

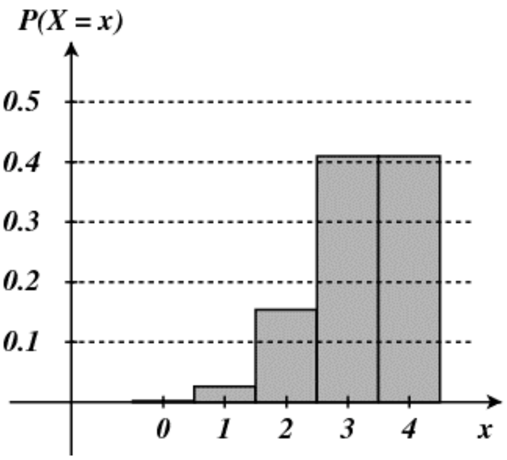
- aucune boule blanche et quatre noires : $C_{16}^0.C_4^4=1\rightarrow P(X=0)=\dfrac{1}{4845}\approx 0{,}0002$;
- une seule boule blanche et trois noires : $C_{16}^1.C_4^3=64\rightarrow P(X=1)=\dfrac{64}{4845}\approx 0{,}0132$;
- deux boules blanches et deux noires ; $C_{16}^2.C_4^2=720\rightarrow P(X=2)=\dfrac{720}{4845}\approx 0{,}1486$

... continuez !

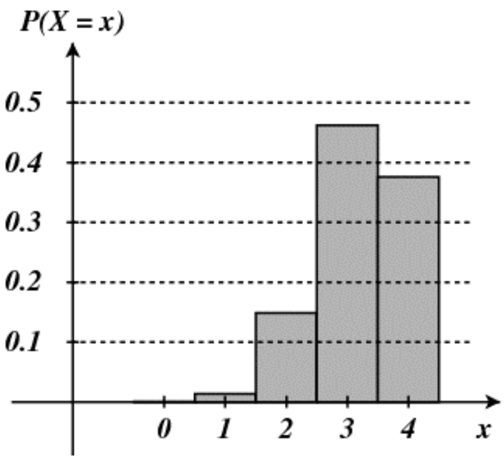
<u>Une comparaison importante ! Et si le tirage avait été fait *avec* replacement ?</u>

Reprendre les données du problème précédent et déterminer la loi de probabilité de X (exercice).
Cette loi est représentée par le diagramme de gauche, confronté au diagramme déjà obtenu à la page précédente.

Tirage avec replacement (loi binomiale)



Tirage sans replacement (loi hypergéométrique)



<u>Commentaires</u>

- Lorsque nous tirons au hasard, *sans replacement*, quatre boules d'une urne contenant vingt boules (dont seize blanches et quatre noires), la variable aléatoire X « nombre de boules blanches obtenues » est dite de *loi hypergéométrique*. Lorsque le tirage se fait *avec replacement*, cette variable aléatoire est de *loi binomiale*.
- Dans le cadre d'une *loi hypergéométrique*, les résultats du tirage de la première boule, de la seconde boule, etc. sont *dépendants*, alors que dans le cadre d'une loi *binomiale*, ils sont *indépendants*.
- Intuitivement, on peut comprendre que si l'on extrait un *petit* échantillon d'une population *nombreuse*, l'écart entre les lois binomiale et hypergéométrique sera *faible*. C'est ce que montrent, dans une certaine mesure, les deux diagrammes ci-dessus.

  Pour illustrer cela davantage, voici d'autres exemples.

  Les tables ❶ , ❷ et ❸ correspondent respectivement à des tirages sans replacement de 4 boules parmi 20, 100 et 1000.
  La proportion de boules blanches est toujours de 80 %.
  La table ❹ correspond à des tirages avec replacement de 4 boules avec une probabilité de succès $p = 0{,}8$. Comparer et commenter.

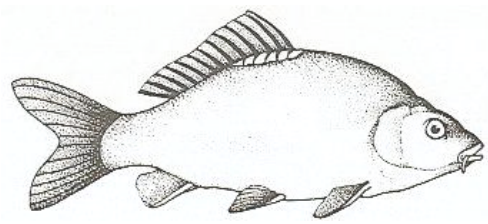
	Lois hypergéométriques			Loi binomiale
	❶	❷	❸	❹
k	$P(X = k)$	$P(X = k)$	$P(X = k)$	$P(X = k)$
0	0,0002	0,0012	0,0016	0,0016
1	0,0132	0,0233	0,0254	0,0256
2	0,1486	0,1531	0,1536	0,1536
3	0,4623	0,4191	0,4105	0,4096
4	0,3756	0,4033	0,4090	0,4096

Conclusion

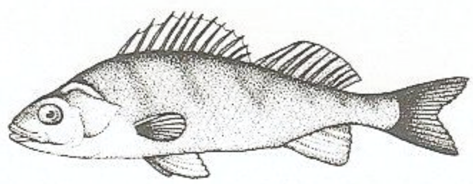
Lors d'un tirage sans replacement d'un échantillon de taille relativement réduite par rapport à l'ensemble de la population, on peut procéder comme si le tirage se faisait avec replacement. En d'autres mots, pour de petits[3] échantillons, la loi binomiale constitue une bonne approximation de la loi hypergéométrique.

Exercices

1. Dans un grand lac, où vivent environ 10000 poissons, il y a 40 % de carpes 60 % de perches. Supposons que chaque poisson se laisse capturer avec la même facilité (ou difficulté ...). Calculer la probabilité pour que dans une pêche de dix poissons, il y ait quatre carpes et six perches.



Carpe



Perche

---

2. Le propriétaire d'un étang y introduit huit carpes et douze perches. Le lendemain, un pêcheur capture cinq poissons. Quelle est la probabilité qu'il y ait deux carpes et trois perches dans sa prise ?

---

3. Une classe est constituée de quatorze filles et douze garçons. Afin de former une délégation qui rencontrera le directeur, quatre élèves sont désignés par le sort. Quelle est la probabilité que la délégation soit formée par deux filles et deux garçons ?

---

4. Parmi les militants du CDk, 60 % sont favorables à une coalition avec le PR tandis que 40 % préfèrent s'allier au MS. Si l'on interroge dix membres au hasard du CDk, quelle est la probabilité que l'on y retrouve la proportion 60 % - 40 % ?

---

5. Au Lotto, on tire au hasard sept numéros parmi quarante-deux (sans répétition). Quelle est la probabilité que trois des sept numéros soient inférieurs ou égaux à 13 ?

---

[3] Le terme « petit » est à prendre au sens *relatif* : le nombre d'individus de l'échantillon est petit *par rapport* aux nombre d'individus dans la population entière.

n	x	p											
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	1/6	1/3
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500	0,6944	0,4444
	1	0,9975	0,9900	0,9775	0,9600	0,9375	0,9100	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500	0,9722	0,8889
	2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250	0,5787	0,2963
	1	0,9928	0,9720	0,9393	0,8960	0,8438	0,7840	0,7138	0,6480	0,5748	0,5000	0,9259	0,7407
	2	0,9999	0,9990	0,9966	0,9920	0,9844	0,9730	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750	0,9954	0,9630
	3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625	0,4823	0,1975
	1	0,9860	0,9477	0,8905	0,8192	0,7383	0,6517	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125	0,8681	0,5926
	2	0,9995	0,9963	0,9880	0,9728	0,9492	0,9163	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875	0,9838	0,8889
	3	1,000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9961	0,9919	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375	0,9992	0,9877
	4		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313	0,4019	0,1317
	1	0,9774	0,9185	0,8352	0,7373	0,6328	0,5282	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875	0,8038	0,4609
	2	0,9988	0,9914	0,9734	0,9421	0,8965	0,8369	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000	0,9645	0,7901
	3	1,000	0,9995	0,9978	0,9933	0,9844	0,9692	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125	0,9967	0,9547
	4		1,000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688	0,9999	0,9959
	5			1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156	0,3349	0,0878
	1	0,9672	0,8857	0,7765	0,6554	0,5339	0,4202	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094	0,7368	0,3512
	2	0,9978	0,9842	0,9527	0,9011	0,8306	0,7443	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438	0,9377	0,6804
	3	0,9999	0,9987	0,9941	0,9830	0,9624	0,9295	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563	0,9913	0,8999
	4	1,000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9954	0,9891	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906	0,0993	0,9822
	5		1,000	1,000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844	1,000	0,9986
	6				1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000		1,000
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078	0,2791	0,0585
	1	0,9556	0,8503	0,7166	0,5767	0,4449	0,3294	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625	0,6698	0,2634
	2	0,9962	0,9743	0,9262	0,8520	0,7564	0,6471	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266	0,9042	0,5706
	3	0,9998	0,9973	0,9879	0,9667	0,9294	0,8740	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000	0,9824	0,8267
	4	1,000	0,9998	0,9988	0,9953	0,9871	0,9712	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734	0,9980	0,9547
	5		1,000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9962	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375	0,9999	0,9931
	6			1,000	1,000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922	1,000	0,9995
	7				1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000		1,000
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039	0,2326	0,0390
	1	0,9428	0,8131	0,6572	0,5033	0,3671	0,2553	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352	0,6047	0,1951
	2	0,9942	0,9619	0,8948	0,7969	0,6785	0,5518	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445	0,8652	0,4682
	3	0,9996	0,9950	0,9786	0,9437	0,8862	0,8059	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633	0,9693	0,7414
	4	1,000	0,9996	0,9971	0,9896	0,9727	0,9420	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367	0,9954	0,9121
	5		1,000	0,9988	0,9988	0,9958	0,9887	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555	0,9996	0,9803
	6			1,000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648	1,000	0,9974
	7				1,000	1,000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961	1,000	0,9998
	8						1,000	1,000	1,000	1,000	1,000		1,000

n	x	p											
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	1/6	1/3
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020	0,1938	0,0260
	1	0,9288	0,7748	0,5995	0,4362	0,3003	0,1960	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195	0,5427	0,1431
	2	0,9916	0,9470	0,8591	0,7382	0,6007	0,4628	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898	0,8217	0,3772
	3	0,9994	0,9917	0,9661	0,9144	0,8343	0,7297	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539	0,9520	0,6503
	4	1,000	0,9991	0,9944	0,9804	0,9511	0,9012	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000	0,9910	0,8552
	5		0,9999	0,9994	0,9969	0,9900	0,9747	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461	0,9989	0,9576
	6		1,000	1,000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102	0,9999	0,9917
	7				1,000	0,9999	0,9996	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805	1,000	0,9990
	8					1,000	1,000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980		0,9999
	9							1,000	1,000	1,000	1,000		1,000
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010	0,1615	0,0173
	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107	0,4845	0,1040
	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547	0,7752	0,2991
	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719	0,9303	0,5593
	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770	0,9845	0,7869
	5	1,000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230	0,9976	0,9234
	6		1,000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281	0,9997	0,9803
	7			1,000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453	1,000	0,9966
	8				1,000	1,000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893		0,9996
	9						1,000	1,000	0,9999	0,9997	0,9990		1,000
	10								1,000	1,000	1,000		1,000
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005	0,1346	0,0116
	1	0,8981	0,6974	0,4922	0,3221	0,1971	0,1130	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059	0,4307	0,0751
	2	0,9848	0,9104	0,7788	0,6174	0,4552	0,3127	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327	0,7268	0,2341
	3	0,9984	0,9815	0,9306	0,8389	0,7133	0,5696	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133	0,9044	0,4726
	4	0,9999	0,9972	0,9841	0,9496	0,8854	0,7897	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744	0,9755	0,7110
	5	1,0000	0,9997	0,9973	0,9883	0,9657	0,9218	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000	0,9954	0,8779
	6		1,0000	0,9997	0,9980	0,9924	0,9784	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256	0,9994	0,9614
	7			1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867	0,9999	0,9912
	8				1,0000	0,9999	0,9994	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673	1,0000	0,9986
	9					1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941		0,9999
	10							1,0000	1,0000	0,9998	0,9995		1,0000
	11									1,0000	1,0000		
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002	0,1122	0,0077
	1	0,8816	0,6590	0,4435	0,2749	0,5184	0,0850	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032	0,3813	0,0540
	2	0,9804	0,8891	0,7358	0,5583	0,3907	0,2528	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193	0,6774	0,1811
	3	0,9978	0,9744	0,9078	0,7946	0,6488	0,4925	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730	0,8748	0,3931
	4	0,9998	0,9957	0,9761	0,9274	0,8424	0,7237	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938	0,9636	0,6315
	5	1,0000	0,9995	0,9954	0,9806	0,9456	0,8822	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872	0,9921	0,8223
	6		0,9999	0,9993	0,9961	0,9857	0,9614	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128	0,9987	0,9336
	7		1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9905	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062	0,9998	0,9812
	8			1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270	1,0000	0,9961
	9				1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807		0,9995
	10						1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968		1,0000
	11							1,0000	1,0000	0,9999	0,9998		
	12									1,0000	1,0000		

		p											
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	1/6	1/3
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001	0,0935	0,0051
	1	0,8646	0,6213	0,3983	0,2336	0,1267	0,0637	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017	0,3365	0,0385
	2	0,9755	0,8661	0,6920	0,5017	0,3326	0,2025	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112	0,6281	0,1387
	3	0,9969	0,9658	0,8820	0,7473	0,5843	0,4206	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461	0,8419	0,3224
	4	0,9997	0,9935	0,9658	0,9009	0,7940	0,6543	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334	0,9488	0,5520
	5	1,0000	0,9991	0,9925	0,9700	0,9198	0,8346	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905	0,9873	0,7587
	6		0,9999	0,9987	0,9930	0,9757	0,9376	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000	0,9976	0,8965
	7		1,0000	0,9998	0,9988	0,9944	0,9818	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095	0,9997	0,9653
	8			1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666	1,0000	0,9912
	9				1,0000	0,9999	0,9993	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539		0,9984
	10					1,0000	0,9999	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888		0,9998
	11						1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983		1,0000
	12								1,0000	1,0000	0,9999		
	13										1,0000		
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001	0,0779	0,0034
	1	0,8470	0,5846	0,3567	0,1979	0,1010	0,0475	0,0205	0,0081	0,0029	0,0009	0,2960	0,0274
	2	0,9699	0,8416	0,6479	0,4481	0,2811	0,1608	0,0839	0,0398	0,0170	0,0065	0,5795	0,1053
	3	0,9958	0,9559	0,8535	0,6982	0,5213	0,3552	0,2205	0,1243	0,0632	0,0287	0,8063	0,2612
	4	0,9996	0,9908	0,9533	0,8702	0,7415	0,5842	0,4227	0,2793	0,1672	0,0898	0,9310	0,4755
	5	1,0000	0,9985	0,9885	0,9561	0,8883	0,7805	0,6405	0,4859	0,3373	0,2120	0,9809	0,6898
	6		0,9998	0,9978	0,9884	0,9617	0,9067	0,8164	0,6925	0,5461	0,3953	0,9959	0,8505
	7		1,0000	0,9997	0,9976	0,9897	0,9685	0,9247	0,8499	0,7414	0,6047	0,9993	0,9424
	8			1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9757	0,9417	0,8811	0,7880	0,9999	0,9826
	9				1,0000	0,9997	0,9983	0,9940	0,9825	0,9574	0,9102	1,0000	0,9960
	10					1,0000	0,9998	0,9989	0,9961	0,9886	0,9713		0,9993
	11						1,0000	0,9999	0,9994	0,9978	0,9935		0,9999
	12							1,0000	0,9999	0,9997	0,9991		1,0000
	13								1,0000	1,0000	0,9999		
	14										1,0000		
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0649	0,0023
	1	0,8290	0,5490	0,3186	0,1671	0,0802	0,0353	0,0142	0,0052	0,0017	0,0005	0,2596	0,0194
	2	0,9638	0,8159	0,6042	0,3980	0,2361	0,1268	0,0617	0,0271	0,0107	0,0037	0,5322	0,0794
	3	0,9945	0,9444	0,8227	0,6482	0,4613	0,2969	0,1727	0,0905	0,0424	0,0176	0,7685	0,2092
	4	0,9994	0,9873	0,9383	0,8358	0,6865	0,5155	0,3519	0,2173	0,1204	0,0592	0,9102	0,4041
	5	0,9999	0,9978	0,9832	0,9389	0,8516	0,7216	0,5643	0,4032	0,2608	0,1509	0,9726	0,6184
	6	1,0000	0,9997	0,9964	0,9819	0,9434	0,8689	0,7548	0,6098	0,4522	0,3036	0,9934	0,7970
	7		1,0000	0,9994	0,9958	0,9827	0,9500	0,8868	0,7869	0,6535	0,5000	0,9978	0,9118
	8			0,9999	0,9992	0,9958	0,9848	0,9578	0,9050	0,8182	0,6964	0,9998	0,9692
	9			1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9876	0,9662	0,9231	0,8491	1,0000	0,9915
	10				1,0000	0,9999	0,9993	0,9972	0,9907	0,9745	0,9408		0,9982
	11					1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9937	0,9824		0,9997
	12						1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9963		1,0000
	13							1,0000	1,0000	0,9999	0,9995		
	14									1,0000	1,0000		
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0541	0,0015
	1	0,8108	0,5147	0,2839	0,1407	0,0635	0,0261	0,0098	0,0033	0,0010	0,0003	0,2272	0,0137
	2	0,9571	0,7892	0,5614	0,3518	0,1971	0,0994	0,0451	0,0183	0,0066	0,0021	0,4868	0,0594
	3	0,9930	0,9316	0,7899	0,5981	0,4050	0,2459	0,1339	0,0651	0,0281	0,0106	0,7291	0,1659
	4	0,9991	0,9830	0,9209	0,7982	0,6302	0,4499	0,2892	0,1666	0,0853	0,0384	0,8866	0,3391
	5	0,9999	0,9967	0,9765	0,9183	0,8103	0,6598	0,4900	0,3288	0,1976	0,1051	0,9622	0,5469
	6	1,0000	0,9995	0,9944	0,9733	0,9204	0,8247	0,6881	0,5272	0,3660	0,2272	0,9899	0,7374
	7		0,9999	0,9989	0,9930	0,9729	0,9256	0,8406	0,7161	0,5629	0,4018	0,9979	0,8735
	8		1,0000	0,9998	0,9985	0,9925	0,9743	0,9329	0,8577	0,7441	0,5982	0,9996	0,9500
	9			1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9771	0,9417	0,8759	0,7728	1,0000	0,9841
	10				1,0000	0,9997	0,9984	0,9938	0,9809	0,9514	0,8949		0,9960
	11					1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9851	0,9616		0,9992
	12						1,0000	0,9998	0,9991	0,9965	0,9894		0,9999
	13							1,0000	0,9999	0,9994	0,9979		1,0000
	14								1,0000	0,9999	0,9997		
	15									1,0000	1,0000		
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0451	0,0010
	1	0,7922	0,4818	0,2525	0,1182	0,0501	0,0193	0,0067	0,0021	0,0006	0,0001	0,1983	0,0096
	2	0,9497	0,7618	0,5198	0,3096	0,1637	0,0774	0,0327	0,0123	0,0041	0,0012	0,4435	0,0442
	3	0,9912	0,9174	0,7556	0,5489	0,3530	0,2019	0,1028	0,0464	0,0184	0,0064	0,6887	0,1304
	4	0,9988	0,9779	0,9013	0,7582	0,5739	0,3887	0,2348	0,1260	0,0596	0,0245	0,8604	0,2814
	5	0,9999	0,9953	0,9681	0,8943	0,7653	0,5968	0,4197	0,2639	0,1471	0,0717	0,9496	0,4777
	6	1,0000	0,9992	0,9917	0,9623	0,8929	0,7752	0,6188	0,4478	0,2902	0,1662	0,9853	0,6739
	7		0,9999	0,9983	0,9891	0,9598	0,8954	0,7872	0,6405	0,4743	0,3145	0,9965	0,8281
	8		1,0000	0,9997	0,9974	0,9876	0,9597	0,9006	0,8011	0,6626	0,5000	0,9993	0,9245
	9			1,0000	0,9995	0,9969	0,9873	0,9617	0,9081	0,8166	0,6855	0,9999	0,9727
	10				0,9999	0,9994	0,9968	0,9880	0,9652	0,9174	0,8338	1,0000	0,9920
	11				1,0000	0,9999	0,9993	0,9970	0,9894	0,9699	0,9283		0,9981
	12					1,0000	0,9999	0,9994	0,9975	0,9914	0,9755		0,9997
	13						1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9936		1,0000
	14							1,0000	0,9999	0,9997	0,9988		
	15								1,0000	1,0000	0,9999		
	16										1,0000		
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0376	0,0007
	1	0,7735	0,4503	0,2241	0,0991	0,0395	0,0142	0,0046	0,0013	0,0003	0,0001	0,1728	0,0068
	2	0,9419	0,7338	0,4797	0,2713	0,1353	0,0600	0,0236	0,0082	0,0025	0,0007	0,4027	0,0326
	3	0,9891	0,9018	0,7202	0,5010	0,3057	0,1646	0,0783	0,0328	0,0120	0,0038	0,6479	0,1017
	4	0,9985	0,9718	0,8794	0,7164	0,5187	0,3327	0,1886	0,0942	0,0411	0,0154	0,8318	0,2311
	5	0,9998	0,9936	0,9581	0,8671	0,7175	0,5344	0,3550	0,2088	0,1077	0,0481	0,9347	0,4122
	6	1,0000	0,9988	0,9882	0,9487	0,8610	0,7217	0,5491	0,3743	0,2258	0,1189	0,9794	0,6085
	7		0,9998	0,9973	0,9837	0,9431	0,8593	0,7283	0,5634	0,3915	0,2403	0,9947	0,7767
	8		1,0000	0,9995	0,9957	0,9807	0,9404	0,8609	0,7368	0,5778	0,4073	0,9989	0,8924
	9			0,9999	0,9991	0,9946	0,9790	0,9403	0,8653	0,7473	0,5927	0,9998	0,9567
	10			1,0000	0,9998	0,9988	0,9939	0,9788	0,9424	0,8720	0,7597	1,0000	0,9856
	11				1,0000	0,9998	0,9986	0,9938	0,9797	0,9463	0,8811		0,9961
	12					1,0000	0,9997	0,9986	0,9942	0,9817	0,9519		0,9991
	13						1,0000	0,9997	0,9987	0,8851	0,9846		0,9999
	14							1,0000	0,9998	0,9990	0,9962		1,0000
	15								1,0000	0,9999	0,9993		
	16									1,0000	0,9999		
	17										1,0000		
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0313	0,0005
	1	0,7547	0,4203	0,1985	0,0829	0,0310	0,0104	0,0031	0,0008	0,0002	0,0000	0,1502	0,0047
	2	0,9335	0,7054	0,4413	0,2369	0,1113	0,0462	0,0170	0,0055	0,0015	0,0004	0,3643	0,0240
	3	0,9868	0,8850	0,6841	0,4551	0,2631	0,1332	0,0591	0,0230	0,0077	0,0022	0,6070	0,0787
	4	0,9980	0,9648	0,8556	0,6733	0,4654	0,2822	0,1500	0,0696	0,0280	0,0096	0,8011	0,1879
	5	0,0998	0,9914	0,9463	0,8369	0,6678	0,4739	0,2968	0,1629	0,0777	0,0318	0,9176	0,3519
	6	1,0000	0,9983	0,9837	0,9324	0,8251	0,6655	0,4812	0,3081	0,1727	0,0835	0,9719	0,5431
	7		0,9997	0,9959	0,9767	0,9225	0,8180	0,6656	0,4878	0,3169	0,1796	0,9921	0,7207
	8		1,0000	0,9992	0,9933	0,9713	0,9161	0,8145	0,6675	0,4940	0,3238	0,9982	0,8538
	9			0,9999	0,9984	0,9911	0,9674	0,9125	0,8139	0,6710	0,5000	0,9996	0,9352
	10			1,0000	0,9997	0,9977	0,9895	0,9653	0,9115	0,8159	0,6762	0,9999	0,9759
	11				1,0000	0,9995	0,9972	0,9886	0,9648	0,9129	0,8204	1,0000	0,9926
	12					0,9999	0,9994	0,9969	0,9884	0,9658	0,9165		0,9981
	13					1,0000	0,9999	0,9993	0,9969	0,9891	0,9682		0,9996
	14						1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9904		0,9999
	15							1,0000	0,9999	0,9995	0,9978		1,0000
	16								1,0000	0,9999	0,9996		
	17									1,0000	1,0000		

n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	1/6	1/3
20	0		0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0261	0,0003
	1		0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000	0,1304	0,0033
	2		0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002	0,3287	0,0176
	3		0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013	0,5665	0,0604
	4		0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059	0,7687	0,1515
	5		0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207	0,8982	0,2972
	6		1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577	0,9629	0,4793
	7			0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316	0,9887	0,6615
	8			0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517	0,9972	0,8095
	9			1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119	0,9994	0,9081
	10				1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881	0,9999	0,9624
	11					0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483	1,0000	0,9870
	12					1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684		0,9963
	13						1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423		0,9991
	14							1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793		0,9998
	15								1,0000	0,9997	0,9985	0,9941		1,0000
	16									1,0000	0,9997	0,9987		
	17										1,0000	0,9998		
	18											1,0000		
50	0	0,6050	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
	1	0,9106	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0000
	2	0,9862	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0066	0,0000
	3	0,9984	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0238	0,0000
	4	0,9999	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0643	0,0000
	5	1,0000	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,1388	0,0001
	6		0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,2506	0,0005
	7		0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,3911	0,0017
	8		0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,5421	0,0050
	9		0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000	0,6830	0,0127
	10		1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000	0,7986	0,0284
	11			0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000	0,8827	0,0570
	12			0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002	0,9373	0,1035
	13			0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005	0,9693	0,1715
	14			0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013	0,9862	0,2612
	15			1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033	0,9943	0,3690
	16				0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077	0,9978	0,4868
	17				0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164	0,9992	0,6046
	18				0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325	0,9997	0,7126
	19				1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595	0,9999	0,8036
	20					0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013	1,0000	0,8741
	21					0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611		0,9244
	22					1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399		0,9576
	23						0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359		0,9778
	24						0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439		0,9892
	25						1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561		0,9951
	26							0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641		0,9979
	27							0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601		0,9992
	28							1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389		0,9997
	29								0,9997	0,9966	0,9765	0,8987		0,9999
	30								0,9999	0,9986	0,9884	0,9405		1,0000
	31								1,0000	0,9995	0,9947	0,9675		
	32									0,9998	0,9978	0,9836		
	33									0,9999	0,9991	0,9923		
	34									1,0000	0,9997	0,9967		
	35										0,9999	0,9987		
	36										1,0000	0,9995		
	37											0,9998		
	38											1,0000		

n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	1/6	1/3
100	0	0,3660	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9206	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9816	0,2578	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9966	0,4360	0,0237	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
	5	0,9995	0,6160	0,0576	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000
	6	0,9999	0,7660	0,1172	0,0047	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0000
	7	1,0000	0,8720	0,2061	0,0122	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0038	0,0000
	8		0,9369	0,3209	0,0275	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0095	0,0000
	9		0,9718	0,4513	0,0551	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0213	0,0000
	10		0,9885	0,5832	0,0994	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0427	0,0000
	11		0,9957	0,7030	0,1635	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0777	0,0000
	12		0,9985	0,8018	0,2473	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1297	0,0000
	13		0,9995	0,8761	0,3474	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2000	0,0000
	14		0,9999	0,9274	0,4572	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2874	0,0000
	15		1,0000	0,9601	0,5683	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3877	0,0000
	16			0,9794	0,6725	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3877	0,0001
	17			0,9900	0,7633	0,2712	0,0376	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,5994	0,0002
	18			0,9954	0,8372	0,3621	0,0630	0,0045	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,6965	0,0005
	19			0,9980	0,8935	0,4602	0,0995	0,0089	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,7803	0,0011
	20			0,9992	0,9337	0,5595	0,1488	0,0165	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,8481	0,0024
	21			0,9997	0,9607	0,6540	0,2114	0,0288	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,8998	0,0048
	22			0,9999	0,9779	0,7389	0,2864	0,0479	0,0034	0,0001	0,0000	0,0000	0,9369	0,0091
	23			1,0000	0,9881	0,8109	0,3711	0,0755	0,0066	0,0003	0,0000	0,0000	0,9621	0,0164
	24				0,9939	0,8686	0,4617	0,1136	0,0121	0,0006	0,0000	0,0000	0,9783	0,0281
	25				0,9970	0,9125	0,5535	0,1631	0,0211	0,0012	0,0000	0,0000	0,9881	0,0458
	26				0,9986	0,9442	0,6417	0,2244	0,0351	0,0024	0,0001	0,0000	0,9938	0,0715
	27				0,9994	0,9658	0,7224	0,2964	0,0558	0,0046	0,0002	0,0000	0,9969	0,1066
	28				0,9997	0,9800	0,7925	0,3768	0,0848	0,0084	0,0004	0,0000	0,9985	0,1524
	29				0,9999	0,9888	0,8505	0,4623	0,1236	0,0148	0,0008	0,0000	0,9993	0,2093
	30				1,0000	0,9939	0,8962	0,5491	0,1730	0,0248	0,0015	0,0000	0,9997	0,2766
	31					0,9969	0,9307	0,6331	0,2331	0,0398	0,0030	0,0001	0,9999	0,3525
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,3029	0,0615	0,0055	0,0002	1,0000	0,4344
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,3803	0,0913	0,0098	0,0004		0,5188
	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,4624	0,1303	0,0166	0,0009		0,6019
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,5458	0,1795	0,0272	0,0018		0,6803
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,6269	0,2386	0,0429	0,0033		0,7511
	37					1,0000	0,9973	0,9470	0,7024	0,3068	0,0651	0,0060		0,8123
	38						0,9986	0,9660	0,7699	0,3822	0,0951	0,0105		0,8630
	39						0,9993	0,9790	0,8276	0,4621	0,1343	0,0176		0,9034
	40						0,0997	0,9875	0,8750	0,5433	0,1831	0,0284		0,9341
	41						0,9999	0,9928	0,9123	0,6225	0,2415	0,0443		0,9566
	42						0,9999	0,9960	0,9406	0,6967	0,3078	0,0666		0,9724
	43						1,0000	0,9979	0,9611	0,7635	0,3828	0,0967		0,9831
	44							0,9989	0,9754	0,8211	0,4613	0,1356		0,9900
	45							0,9995	0,9850	0,8689	0,5413	0,1841		0,9943
	46							0,9997	0,9912	0,9070	0,6196	0,2421		0,9969
	47							0,9999	0,9950	0,9362	0,6931	0,3086		0,9983
	48							0,9999	0,9973	0,9577	0,7596	0,3822		0,9991
	49							1,0000	0,9985	0,9729	0,8173	0,4602		0,9996
	50								0,9993	0,9832	0,8654	0,5398		0,9998
	51								0,9996	0,9900	0,9040	0,6178		0,9999
	52								0,9998	0,9942	0,9338	0,6914		1,0000
	53								0,9999	0,9968	0,9559	0,7579		
	54								1,0000	0,9983	0,9716	0,8159		
	55									0,9991	0,9824	0,8644		
	56									0,9996	0,9894	0,9033		
	57									0,9998	0,9939	0,9334		
	58									0,9999	0,9966	0,9557		
	59									1,0000	0,9982	0,9716		
100	60										0,9991	0,9824		
	61										0,9995	0,9895		
	62										0,9998	0,9940		
	63										0,9999	0,9967		
	64										1,0000	0,9982		
	65											0,9991		
	66											0,9996		
	67											0,9998		
	68											0,9999		
	69											1,0000		