PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

1. Combien peut-on former de « mots », ayant un sens ou non, de deux lettres, commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?

2. A partir des chiffres 1, 2, 3 et 4, combien peut-on former de nombres naturels de 4 chiffres différents ?

3. A partir de neuf chiffres significatifs (de 1 à 9), combien peut-on former de nombres naturels de

   a) neuf chiffres différents ?

   b) cinq chiffres différents ?

4. Combien de paris différents pouvez-vous faire pour un tiercé lorsqu'il y a quinze chevaux partants ?

5. De combien de façons différentes peut-on disposer quatre garçons et cinq filles pour une photographie de groupe, si les filles doivent s'asseoir côte à côte, les quatre garçons se tenant debout derrière elles ?

6. Combien de combinaisons sont possibles pour un coffre-fort, sachant qu'elles doivent comporter quatre lettres ?

7. Vous avez fondé un club et vous désirez lui donner un drapeau. Vous décidez que ce drapeau, composé de trois bandes rectangulaires et parallèles, sera tricolore. Vous avez sept coupons de tissu de couleurs différentes à votre disposition.
   Combien de drapeaux différents pouvez-vous créer ?

8. En Belgique, les plaques minéralogiques comportent soit cinq caractères, soit six caractères (il s'agit alors de trois lettres suivies de trois chiffres).
   Combien de plaques de chaque sorte peut-on distribuer ?

9. Vous êtes six et vous recevez deux entrées gratuites pour une séance de cinéma.
   De combien de façons différentes pouvez-vous attribuer ces deux cartes ?

10. Un signe braille est constitué par un, deux, trois, quatre, cinq ou six points en relief disposés sur une grille comme ceci :

    ○ ○
    ○ ○
    ○ ○

    Combien de signes peut-on former ?

ANALYSE COMBINATOIRE

Principe de multiplication

Si une procédure quelconque peut être exécutée de n_1 façons différentes, si après cette procédure, une seconde procédure peut être exécutée de n_2 façons différentes, et si ensuite une troisième procédure peut être exécutée de n_3 façons différentes, et ainsi de suite, alors le nombre de façons différentes permettant d'exécuter les procédures dans l'ordre indiqué est égal au produit $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ...$

Exemple

Une voiture peut être équipée d'un moteur de 1900cc , 2300cc ou 2500cc et est disponible en rouge, vert, gris ou blanc. Combien y a-t-il de versions différentes de cette voiture ?

Solution

Pour le moteur, il y a 3 possibilités ; pour la couleur il y a 4 possibilités. Comme n'importe quel moteur peut être combiné avec n'importe quelle couleur, les possibilités se multiplient : il y a ainsi $3 \times 4 = 12$ versions.

Revoir aussi le problème introductif n°1.

Permutations sans répétition

Problème type

De combien de façons différentes n personnes peuvent-elles s'asseoir côte à côte sur un banc qui comporte exactement n places ?

Solution

Il y a n façons de placer la première personne, $(n-1)$ façons de placer la deuxième, $(n-2)$ façons de placer la troisième et ainsi de suite jusqu'à la dernière personne pour qui il n'y aura plus qu'une seule possibilité.
Il y a ainsi $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ façons différentes de placer les n personnes.

Définition : on appelle permutation de n objets différents un groupement que l'on peut effectuer en rangeant ces objets dans un ordre quelconque.

Le nombre de permutations possibles de n objets se note P_n et vaut donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ (le symbole $n!$ se lit « factorielle de n »).

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exercices

1. De combien de façons différentes 8 personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?

2. Revoir les problèmes introductifs n^{os} 2, 3a et 5.

Permutations avec répétitions

Intéressons-nous maintenant au nombre de façons de permuter n objets dont certains sont semblables.

Problème type

Combien de « mots » différents - ayant un sens ou non - peut-on former en permutant les lettres du mot *LILLE* ? Autrement dit, combien d'*anagrammes* ce mot possède-t-il ?

Solution

Si l'on considère les trois lettres « L » distinctes ($L_1 I L_2 L_3 E$), il y a $5!$ mots possibles. Mais parmi ces mots, certains sont identiques. En effet, considérons le mot $L_1 L_2 L_3 I E$.
Il est identique aux mots $L_1 L_3 L_2 I E$, $L_2 L_1 L_3 I E$, $L_2 L_3 L_1 I E$, $L_3 L_1 L_2 I E$, $L_3 L_2 L_1 I E$.
Pour cette disposition des lettres (les trois « L » d'abord, le « I » et le « E » ensuite), il y a donc $3! = 6$ mots identiques.
Ce raisonnement étant valable pour n'importe quelle disposition des 5 lettres, il y a $\frac{5!}{3!} = 20$ anagrammes différents du mot "LILLE".

Définition : soient n objets dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables, ... , n_r sont semblables (avec $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$).
On appelle permutation avec répétition de n objets un groupement de ces n objets rangés dans un ordre quelconque.

En généralisant le raisonnement tenu pour le problème ci-dessus, on trouve que le nombre de ces permutations - que l'on note $P_n^{n_1, n_2, ..., n_r}$ - est donné par :

$$\boxed{P_n^{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! .. n_3!}}$$

Exercice

Combien de signaux différents, chaque signal étant constitué de 8 pavillons alignés verticalement, peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et 1 pavillon bleu ?

Arrangements sans répétition

Problème type

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait une boule de l'urne et l'on note son numéro. On ne replace pas la boule dans l'urne (tirage sans remise) et on répète l'opération k fois ($k \le n$).
Si l'on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées, combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Solution

Il y a n façons de choisir la première boule, $n-1$ façons de choisir la deuxième, $n-2$ façons de choisir la troisième et ainsi de suite jusqu'à la dernière boule qui peut encore être choisie de $n-k+1$ façons. Il y a ainsi $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)$ tirages différents possibles.

Transformons cette expression dans le but d'y faire apparaître des factorielles :

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)$$

$$= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)\times(n-k)\times(n-k-1)\times\ldots\times 2\times 1}{(n-k)\times(n-k-1)\times\ldots\times 2\times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Définition : une suite finie $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ (l'ordre compte !) de k objets *différents* puisés parmi n objets différents est appelée « arrangement sans répétition de k objets parmi n ».

Le nombre de ces arrangements se note A_n^k. On a ainsi :

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Exercices

1. Calculer le nombre de mots de quatre lettres différentes que l'on peut former à partir des lettres *a, b, c, d, e* et *f*.

2. Revoir les problèmes introductifs nos 3b, 4 et 7.

Arrangements avec répétitions

Problème type

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait une boule de l'urne et l'on note son numéro. On replace la boule dans l'urne (tirage avec remise) et on répète l'opération k fois (k est quelconque et peut même être supérieur à n).
Si l'on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées, combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Solution

Il y a n façons de choisir la première boule. Comme cette boule est replacée dans l'urne, il y a de nouveau n façons de choisir la deuxième, n façons de choisir la troisième et ainsi de suite jusqu'à la dernière boule qui peut toujours être choisie de n façons.
Il y a ainsi $n \times n \times n \times ... \times n = n^k$ tirages différents possibles.

Définition : une suite finie $(s_1, s_2, ..., s_k)$ (l'ordre compte !) de k objets puisés parmi n objets différents est appelée « arrangement avec répétition de k objets parmi n ».

(où est la différence avec la définition du paragraphe précédent ?)

Le nombre de ces arrangements se note $\overline{A_n^k}$. On a ainsi :

$$\boxed{\overline{A_n^k} = n^k}$$

Exercices :

1. Combien y a-t-il de nombres naturels formés de quatre chiffres non nuls ?
2. Revoir les problèmes introductifs nos 6 et 8.

Combinaisons sans répétition

Problème type

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait une boule de l'urne et l'on note son numéro. On ne replace pas la boule dans l'urne (tirage sans remise) et on répète l'opération k fois ($k \leq n$).
Si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées, combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Solution

Si l'on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées, il y a A_n^k tirages différents (voir « Arrangements sans répétition »). Or, pour chacun de ces tirages de k boules, nous savons que les numéros peuvent être permutés de $k!$ façons. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées, il y a donc $\frac{A_n^k}{k!}$ tirages différents.

Définition : une *famille* (l'ordre ne compte pas) de k objets différents puisé parmi n objets différents ($k \leq n$) est appelée « combinaison sans répétition de k objets parmi n ».

Le nombre de ces combinaisons se note C_n^k . On a ainsi :

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

Exercices :

1. De combien de façons peut-on constituer une main de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes ?
2. Revoir les problèmes introductifs n^{os} 9 et 10 .

Exercices variés

1. De combien de façons peut-on former une équipe de basket-ball (5 joueurs) dans une classe de 10 élèves,
   a) si l'on tient compte de la place de chaque joueur dans l'équipe ?
   b) si l'on n'en tient pas compte ?

2. Combien de mots différents peut-on former en permutant les lettres des mots PARIS, MONS, BRUXELLES ?

3. En supposant qu'il n'y a pas de répétition,
   a) combien de nombres de trois chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 2 , 3 , 5 , 6 , 7 et 9 ?
   b) combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
   c) combien sont pairs ?
   d) combien sont impairs ?
   e) combien sont des multiples de 5 ?

4. Parmi les diverses permutations des lettres a , b , c , d , e *et* f , combien y en a-t-il qui commencent par ab ?

5. Combien y a-t-il de nombres formés de 3 chiffres pairs différents (0 exclu) et de 2 chiffres impairs différents ?

6. De combien de façons peut-on noircir trois cases de la figure ci-dessous sachant que deux cases noircies ne peuvent jamais être dans la même ligne ni dans la même colonne ? Même question pour un rectangle $m \times n$ et p cases noircies ($p \le m$ et $p \le n$) ?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

---

7. Dans une association comprenant 20 membres dont 12 hommes et 8 femmes, on désire former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. De combien de façons peut-on former ce comité si

   a) chaque membre de l'association accepte de faire partie du comité ?

   b) deux des hommes refusent d'en faire partie ?

   c) Mr X et Mme Y refusent de siéger ensemble ?

---

8. De combien de manières peut-on tirer l'une après l'autre (l'ordre compte) trois cartes d'un jeu de cinquante-deux cartes

   a) si chaque carte est remise dans le jeu avant de tirer la carte suivante ?

   b) si l'on ne remet pas les cartes dans le jeu ?

---

9. Combien de comités de 3 personnes peut-on former à partir de 8 personnes ?

---

10. Une plaque d'immatriculation contient 2 lettres distinctes suivies de 3 chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

---

11. Chaque signal étant constitué de 6 pavillons alignés, combien de signaux différents peut-on former à l'aide de 4 pavillons rouges et 2 pavillons bleus ?

---

12. A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10 . Combien de choix possibles y a-t-il

    a) s'il n'y a aucune contrainte ?

    b) s'il doit répondre aux 3 premières questions ?

    c) s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

---

13. Quel est le nombre de sous ensembles d'un ensemble de 5 éléments ?

---

14. Quel est le nombre de diagonales d'un carré ? d'un pentagone ? d'un hexagone ? … d'un n-gone ?

15. On donne, dans un plan, 7 points dont 3 quelconques ne sont pas colinéaires.

    a) Combien de droites ces 7 points déterminent-ils 2 à 2 ?

    b) Combien y a-t-il de triangles ayant 3 de ces 7 points comme sommets ?

---

16. Le professeur de gymnastique forme une équipe de 5 joueurs en prenant 3 joueurs parmi les 15 élèves d'une classe et 2 joueurs parmi les 12 élèves d'une autre classe. De combien de manières peut-il former son équipe ?

---

17. Combien de mots de 5 lettres peut-on écrire en utilisant uniquement les lettres a , b , c et d ?

---

18. Les signes morse sont le point (•) et la barre (–). Combien de lettres peut-on former en utilisant un seul signe ? 2 signes ? 3 , 4 , 5 signes ? En conclure la nécessité d'utiliser jusqu'à 4 signes pour représenter toutes les lettres de l'alphabet.

---

19. Au menu d'un restaurant figurent 5 entrées, 10 plats de viande ou de poisson, 6 desserts. Combien de repas complets différents peut-on former ?

---

20. De combien de manières peut-on distribuer 32 cartes parmi 4 joueurs de manière que chaque joueur ait 8 cartes ?

REPONSES

1. a) 30240 b) 252
2. 120 , 24 , 90720
3. a) 120 b) 40
   c) 40 d) 80 e) 20
4. 24
5. 4800
6. 24 ;
   généralisation : $C_m^p.A_n^p$ ou encore $C_n^p.A_m^p$
7. a) 9856 b) 5880 c) 9240
8. a) 140608 b) 132600
9. 56
10. 585000
11. 15
12. a) 45 b) 21 c) 35
13. 32
14. 2, 5, 9, ... n(n-3)/2
15 a) 21 b) 35
16. 30030
17. 1024
18. 2, 4, 8, 16, 32
19. 300
20. 10518300 x 735471 x 12870 x 1
    $\approx 9{,}96 . 10^{16}$

Propriétés des nombres C_n^k

❶ $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$

Preuve : choisir, sans répétition, k objets parmi n revient à laisser $(n-k)$ objets de côté ! Pour ceux qui préfèrent les calculs :

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{\left[n-(n-k)\right]!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Exemple : $C_8^3 = C_8^5$ (vérifier).

❷ $\boxed{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k}$

Preuve

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{\left[(n-1)-(k-1)\right]!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{\left[(n-1)-k\right]!k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= C_n^k
\end{aligned}$$

Exemple : $C_8^3 = C_7^2 + C_7^3$ (vérifier).

❸ $\boxed{C_n^n = 1}$

Preuve : il n'y a en effet qu'une seule façon de choisir, sans répétition, n objets parmi n objets.

Remarque : utilisant la définition, nous obtenons $C_n^n = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$. Cette égalité conduit à poser $0! = 1$.

❹ $\boxed{C_n^0 = 1}$

Preuve : d'après la propriété ❶, $C_n^0 = C_n^{n-0} = C_n^n = 1$.

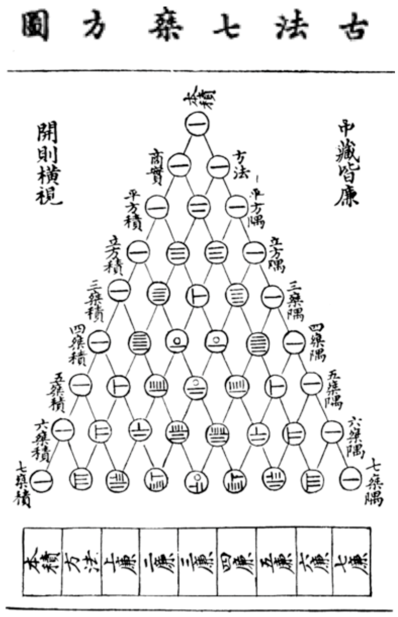
Le triangle de Pascal

Il s’agit d’un tableau donnant les nombres C_n^k . Les propriétés que nous venons de voir permettent de le construire très facilement.

		Valeurs de k **(** $k \leq n$ **)**												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Valeurs de n	0	1												
	1	1	1											
	2	1	2	1										
	3	1	3	3	1									
	4	1	4	6	4	1								
	5	1	5	10	10	5	1							
	6	1	6	15	20	15	6	1						
	7	1	7	21	35	35	21	7	1					
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
	11													
	12													

Commentaires

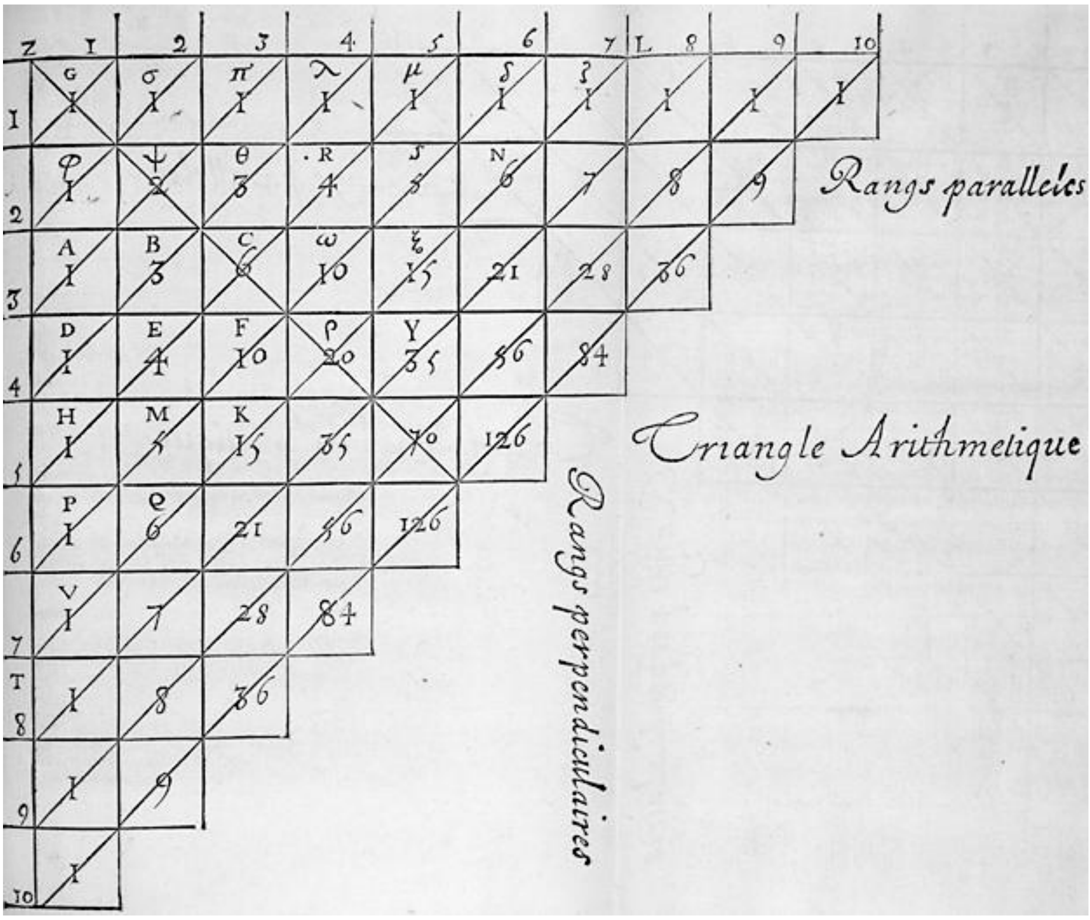
- Le nombre C_5^3 par exemple, se situe à l’intersection de la ligne correspondant à $n = 5$ et de la colonne correspondant à $k = 3$.
- La première colonne du tableau est composée exclusivement de « 1 » : c’est une conséquence de la propriété ❹ .
- La diagonale du tableau n’est composée que de « 1 » elle aussi : c’est une conséquence de la propriété ❸ .
- La somme de deux nombres voisins d’une même ligne donne le nombre situé sous le deuxième, ce qui illustre la propriété ❷ .
- Sur une même ligne, les nombres équidistants des extrémités sont égaux : c’est une conséquence de la propriété ❶ .



Le triangle de Pascal (1623 – 1662) était connu bien avant le 17ème siècle. Un exemple célèbre est celui du tableau ci-contre, paru dans un ouvrage du mathématicien Chinois Yang Hui (13ème siècle).

En Occident, le tableau porte le nom de Pascal car il fut le premier à lui consacrer un traité, et à démontrer rigoureusement ses propriétés.
En particulier, il mit au point la méthode de démonstration par récurrence afin d'établir le lien entre les nombres du triangle et la formule du binôme de Newton.

Ci-dessous, le triangle tel qu'il apparut dans le traité de Pascal en 1654 .



Le binôme de Newton

Observons les développements des puissances successives d'un binôme $(a+b)$ ...

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 && = 1 \\
(a+b)^1 &= a+b && = 1\cdot a + 1\cdot b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3
\end{aligned}$$

Il ne s'agit pas d'une coïncidence : les coefficients des termes de ces développements sont les nombres que l'on trouve dans le tableau de Pascal !

Exercice

Écrire les développements de $(a+b)^4$ et de $(a+b)^6$.

On peut démontrer la formule suivante appelée *formule du binôme de Newton* ($n \in N$) :

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n}$$

En utilisant le signe de sommation, cette formule s'écrit :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i} b^i}$$

Exercices

1. Développer

   a) $(x+2)^5$

   b) $(a-3)^4$

   c) $(2a-3b)^5$

   d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

2. Calculer le terme en

   a) x^6 dans $(3x^2-2)^{10}$

   b) x dans $\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)^5$

   c) x^3 dans $\left(2x-\frac{1}{4x^2}\right)^{12}$

   d) x^4 dans $\left(2x-\frac{1}{4x^2}\right)^{12}$

---

3. Calculer $\int (x^2+1)^6\,dx$.