Solutions des exercices de préparation au contrôle de synthèse n°1

Classes de 6e - Mathématique 6h - A. Vandenbruaene

Fonctions réciproques et cyclométriques

1. Pour une fonction du second degré, une manière commode de travailler est de transformer l'expression de f :

$$f(x) = x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 1 .$$

Il suit : $y = (x+3)^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y+1} - 3$. Et donc : $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 3$.

En effet, on vous demande de considérer la restriction de f à $]-\infty, -3]$, donc :

$$f : \left]-\infty, -3\right] \overset{injection}{\rightarrow} \left[-1, +\infty\right[\; : \; x \rightarrow x^2 + 6x + 8$$

$$f^{-1} : \left[-1, +\infty\right[\overset{injection}{\rightarrow} \left]-\infty, -3\right] \; : \; x \rightarrow -\sqrt{x+1} - 3$$

---

2. On a $y = 2 - \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = (2-y)^2 - 1$.

$$f : \left[-1, +\infty\right[\overset{injection}{\rightarrow} \left]-\infty, 2\right] \; : \; x \rightarrow 2 - \sqrt{x+1}$$

$$f^{-1} : \left]-\infty, 2\right] \overset{injection}{\rightarrow} \left[-1, +\infty\right[\; : \; x \rightarrow (2-x)^2 - 1 .$$

La réciproque de f est la fonction $(2-x)^2 - 1$ restreinte à l'intervalle $]-\infty, 2]$.

---

3. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{7}{2}$.

---

4. Il faut résoudre l'équation $\dfrac{\sqrt{x-5}}{x-26} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = \dfrac{x-26}{4}$ (sous la condition $x \geq 26$ (*)).

Après élévation au carré des deux membres, on obtient l'équation $x^2 - 68x + 756 = 0$.

Elle admet comme solutions $x = 14$ et $x = 54$. Seule la seconde est acceptable : $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 54$.

(*) En effet, le premier membre n'existe que si $x \geq 5$.

Une fois cette condition remplie, le radical $\sqrt{x-5}$ existe et est positif. Pour que l'égalité soit cohérente, il faut donc que le second membre soit positif aussi, ce qui sera le cas si $x \geq 26$.

5. Tenant compte de $f'(x) = -2x+2$, la formule de dérivation d'une fonction réciproque donne :

$$g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'\left(1+\sqrt{6-x}\right)} = \frac{1}{-2.\left(1+\sqrt{6-x}\right)+2} = \frac{1}{-2\sqrt{6-x}} \ .$$

Résultat que l'on retrouve avec les formules vues en 5^e :

$$g'(x) = \left(1+\sqrt{6-x}\right)' = \frac{1}{2}(6-x)^{-1/2}.(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} \ .$$

---

6. Il faut : $-1 \le \frac{x^2}{2} - 2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x^2}{2} \le 3 \Leftrightarrow 2 \le x^2 \le 6 \Leftrightarrow \left(-\sqrt{6} \le x \le -\sqrt{2}\right) \vee \left(\sqrt{2} \le x \le \sqrt{6}\right)$.

Et donc : $dom\ f = \left[-\sqrt{6}\,,\,-\sqrt{2}\,\right] \cup \left[\sqrt{6}\,,\,\sqrt{2}\,\right]$.

---

7. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\arctan x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{-\pi/2} + 0 = -\frac{2}{\pi}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arctan x} = \frac{0}{0} \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right) = 1$.

Fonctions logarithmes et exponentielles

1. On a $f(x) = a^x$ et $a^{-3} = \frac{64}{27}$. On en déduit $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

---

2. On a $f(x) = \log_a x$ et $\log_a 25 = 4$. On en déduit $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$.

---

3. $\log_a \frac{x^2 y^3}{\sqrt{z}} = 2.\log_a x + 3.\log_a y - \frac{1}{2}.\log_a z = 8$.

---

4. $\ln\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right] = \ln 1 = 0$.

---

5. a) $x^2 - 3x - 10 > 0$ et $\mathrm{dom} f = \ ]-\infty, -2[\, \cup \,]5, +\infty[$.

b) $\left|x^2 - 3x - 10\right| > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 \ne 0$ et $\mathrm{dom} f = \ R \setminus \{-2, 5\}$.

6. a) C.E. : $-3 < x < 3$. Solutions : $x = \pm\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.

   b) C.E. : $0 < x < 3$. L'équation s'écrit $\ln\dfrac{x^2}{3-x} = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3-x} = 1$.
   On trouve $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Seule la solution positive est acceptable : $S = \left\{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

   c) L'équation est équivalente à $e^{2x+1} = \dfrac{1}{3}$. Solution : $x = \dfrac{\ln\frac{1}{3} - 1}{2} = \dfrac{-\ln 3 - 1}{2}$.

   d) L'équation est équivalente à $4^{2-4x} = 4^{-x-1}$. Donc : $2 - 4x = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.

   e) L'inéquation est équivalente à $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x \geq \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.
   La fonction $f(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ étant strictement décroissante dans **R** : $x \leq 3$. $S = \left]-\infty, 3\right]$.

   f) La fonction $f(x) = e^x$ étant strictement croissante dans **R** : $-x < \ln 5 \Leftrightarrow x > -\ln 5$.

---

7. L'évolution de cette population est donnée par la formule $P(n) = 250 \,.\, 3^n$, où n est le nombre de périodes de 40 minutes.

   a) Après 1 heure : $P(1{,}5) = 250 \,.\, 3^{1{,}5} \approx 1299$ microbes.
   Après 2 heures : $P(3) = 250 \,.\, 3^3 = 6750$ microbes.
   Après 6 heures : $P(9) = 250 \,.\, 3^9 = 4\,920\,750$ microbes.

   b) Il faut résoudre $100000 = 250 \,.\, 3^n \Leftrightarrow 3^n = 400$.
   Donc, $n = \log_3 400 \approx 5{,}4537$ ce qui correspond à environ 3 heures et 38 minutes.

---

8. a) En 2025 : $P(8) = 15 \,.\, 1{,}025^8 \approx 18{,}28$ millions d'habitants.

   b) Il faut résoudre l'équation $25 = 15 \,.\, 1{,}025^n \Leftrightarrow 1{,}025^n = \dfrac{5}{3}$.

   On trouve $n = \log_{1{,}025}\dfrac{5}{3} \approx 20{,}69$. Le pays comptera 25 millions d'habitants en 2037.

---

9. L'évolution de la valeur de la voiture est donnée par la formule $V(n) = 12000 \,.\, 0{,}8^n$, où n est le nombre d'années.

   a) Dans 5 ans : $V(5) = 12000 \,.\, 0{,}8^5 \approx 3932{,}16$ euros.

   b) Il faut résoudre l'équation $0{,}1 = 0{,}8^n$. On trouve $n = \log_{0{,}8} 0{,}1 \approx 10{,}32$ années.

10. a) La décroissance est exponentielle car toutes les 5 minutes, la température est multipliée par le facteur constant $0{,}8$.

b) L'évolution de la température est donnée par la formule $T(n) = 60\,.\,0{,}8^{n}$, où n est le nombre de périodes de 5 minutes.

Dans 23 minutes : $T(4{,}6) = 60\,.\,0{,}8^{4,6} \approx 21{,}50$ (°C).

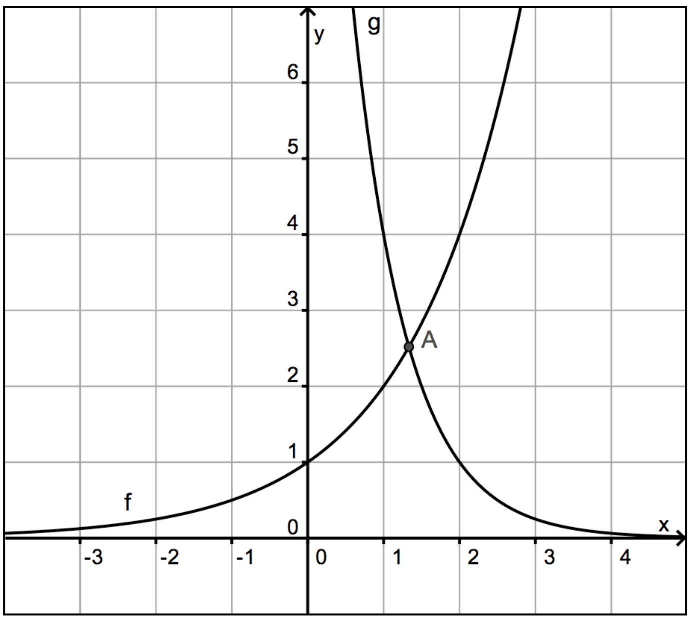
c) Il faut résoudre l'équation $37 = 60\,.\,0{,}8^{n} \Leftrightarrow 0{,}8^{n} \approx 0{,}6167$.

On trouve $n = \log_{0,8} 0{,}6167 \approx 2{,}1664$ périodes de 5 minutes.
Donc, dans $10{,}83$ soit environ 11 minutes.

---

11. b) Il faut résoudre l'équation $2^{x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x} = 2^{-2x+4}$.

On trouve $x = \frac{4}{3}$. Le point d'intersection est $A\left(\frac{4}{3}, 2^{\frac{4}{3}}\right) \approx (1.33\,, 2.52)$.



---

12. a) $dom\ f = R_0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x-1)}{x^{3}}$

b) $dom\ f = R_0^{+}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2x}$

c) $dom\ f = R \setminus \{-3\}$ $\qquad f'(x) = e^{\frac{2x-1}{x+3}} \dfrac{7}{(x+3)^{2}}$

d) $dom\ f = R$ $\qquad f'(x) = e^{-3x}(1-3x)$

e) $dom\ f = R_0^{+}$ $\qquad f'(x) = x^{3}(4\ln(4x)+1)$

f) $dom\ f = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{4x.\ln\left(x^2-4\right)}{x^2-4}$

g) $dom\ f = R_0^+ \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{6}{x.\left(\ln(3x)\right)^2}$

h) $dom\ f = R$ $\qquad f'(x) = \dfrac{4x-5}{7-5x+2x^2}$

Remarque : la condition $7 - 5x + 2x^2 > 0$ est respectée car ce trinôme n'a pas de racine et est toujours strictement positif.

i) $dom\ f = \ldots \left]0, \pi\right[\cup \left]2\pi, 3\pi\right[\cup \left]4\pi, 5\pi\right[\cup \ldots = \bigcup_{k\in Z} \left]0 + k.2\pi, \pi + k.2\pi\right[$

Le domaine est la réunion de tous les intervalles dans lesquels $\sin x > 0$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}.\cos x = \cot x$

---

13. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \dfrac{0}{0} \overset{RHB}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x.e^{-x} = +\infty.0^+ = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{e^x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} \overset{RHB}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{e^x} = 0^+$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \ln\left(2x-6\right) = \ln 0^+ = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{9e^x+1}{e^x-2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{9e^x}{e^x}} = 3$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x.\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty.\ \ln 0^+ = +\infty.\ -\infty = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x+5} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \overset{RHB}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-e^{-x}}{1} = -\infty$

---

14. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2e^x-3}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2e^x}{e^x} = 2$ $\qquad AH_1 \equiv y = 2$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2e^x-3}{e^x+1} = \dfrac{0-3}{0+1} = -3$ $\qquad AH_2 \equiv y = -3$

b) $f'(x) = \dfrac{5e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

$f'(x)$ est définie pour tout réel, son numérateur et son dénominateur sont tous deux strictement positifs et par conséquent $f'(x)$ aussi.
La fonction f est donc strictement croissante dans $\boldsymbol{R}$.

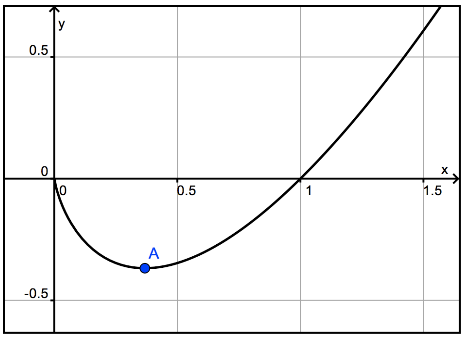
15. a) $dom\ f = R_0^+$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x.\ln x = 0^+ . -\infty = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{RHB}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-x) = 0^-$

c) $f'(x) = \ln x + 1$

x		0		1 / e	
$f'(x) = \ln x + 1$		X	-	0	+
$f(x)$		pt rouge (0,0)	↘	Min	↗

d) $f''(x) = \dfrac{1}{x}$; comme le domaine est R_0^+, la dérivée seconde est toujours strictement positive et la concavité du graphique tournée vers le haut.



---

16. a) $dom\ f = R_0$

(en effet, l'argument du logarithme est strictement positif, la seule condition concerne donc le dénominateur).

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} = \dfrac{+\infty}{\pm\infty} \overset{RHB}{=} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x} = 0$; $AH \equiv y = 0$.

---

17. Calculons d'abord l'abscisse de T : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{-x} = \sin x . e^{-x} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\ 2\pi$.

Ici, la seule solution valable est $x = \pi / 2$ et donc $T\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

Ces courbes sont bien tangentes en T . En effet, les dérivées (c'est-à-dire les pentes de tangentes) sont égales en ce point :

$$f'(x) = -e^{-x} \to f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$g'(x) = \cos x . e^{-x} + \sin x . (-e^{-x}) \to g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1.\left(-e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Nombre complexes

1. $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{1}{4+i}=\dfrac{(3+i)(2+i)}{5}+\dfrac{4-i}{17}=\dfrac{5+5i}{5}+\dfrac{4-i}{17}=1+i+\dfrac{4-i}{17}=\dfrac{21}{17}+\dfrac{16}{17}i$

---

2. $(1-2i)^3=-11+2i$

---

3. On calcule d'abord le discriminant, ce qui donne : $\Delta=-5+12i$.

   Ensuite, on résout l'équation binôme $z^2=-5+12i$, ce qui permet de trouver les racines carrées de Δ : $2+3i$ et $-2-3i$.

   Les solutions de l'équation sont données par $x=\dfrac{4-i\pm(2+3i)}{2}$.

   Après simplification, on obtient $S=\{3+i,1-2i\}$.

---

4. Même démarche qu'au n°3 avec $\Delta=32-24i$, dont les racines carrées sont $6-2i$ et $-6+2i$.

   Les solutions de l'équation sont données par $x=\dfrac{6+2i\pm(6-2i)}{4i}$.

   Après simplification, on obtient $S=\{-3i,1\}$.

---

5. Le polynôme $p(x)=ix^3-3ix^2+(2+3i)x-2-i$ s'annule pour $x=1$, il est donc divisible par $(x-1)$. Effectuant cette division par la méthode de HORNER ou d'EUCLIDE, on obtient :

$$p(x)=(x-1)\left(ix^2-2ix+2+i\right).$$

   Le trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta=-8i$, dont les racines carrées sont $2-2i$ et $-2+2i$. Les racines de ce trinôme sont données par : $x=\dfrac{2i\pm(2-2i)}{2i}$.

   Après simplification, on obtient l'ensemble des trois solutions de l'équation : $S=\{1,-i,2+i\}$.

---

6. Sachant que $p(-3)=0$, on trouve $k=12$.

   La division de $p(x)=2x^3+12x^2+47x+87$ par $(x+3)$ donne : $p(x)=(x+3)(2x^2+6x+29)$.

   Le trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta=-196=196i^2$ et on trouve facilement ses racines : $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i$ et $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}i$.

   Finalement : $p(x)=2.(x+3).\left(x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}i\right).\left(x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i\right)$.

7. Utilisons les formes trigonométriques :

$$\frac{\left[\sqrt{2}\,.\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12}}{\left[2\,.\,cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^{9}} = \frac{2^6.\,cis(-3\pi)}{2^9.\,cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{8}\,.\,cis\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}\,.\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{8}\,.\,i\ .$$

---

8. Il suffit d'effectuer $(2+i)^4$ et on trouve bien $-7+24i$.

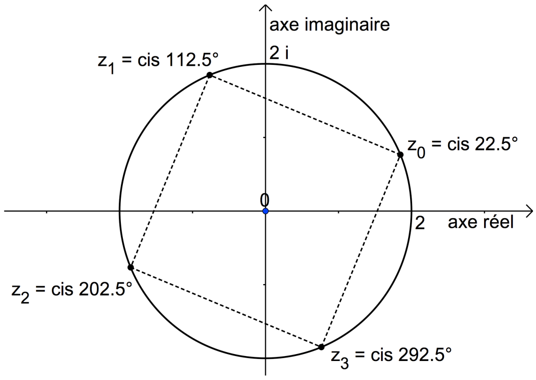
---

9. En posant $z = \rho\,.\,cis\theta$, l'équation s'écrit :

$$\rho^4\,.\,cis4\theta = 16\,.\,cis\frac{\pi}{2}\ .$$

Les solutions sont

$$z_k = 2\,.\,cis\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)\ \ (k \in \mathbf{Z}\,)\ .$$



---

10. Les racines huitièmes de l'unité sont $z_k = cis\left(k\frac{\pi}{4}\right)$ $(k \in \mathbf{Z}\,)$:

$$z_0 = 1\ ,\ z_1 = cis\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \ z_2 = cis\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \ z_3 = cis\left(\frac{3\pi}{4}\right),\ \ldots,\ \ z_7 = cis\left(\frac{7\pi}{4}\right).$$

Bon travail !