# Préparation du contrôle de synthèse n°1
# Objectifs et exercices variés

Classes de 6e – Mathématique 6h – A. Vandenbruaene

## Fonctions réciproques et cyclométriques

### Objectifs

- Déterminer des restrictions injectives d'une fonction donnée.
- Déterminer l'expression analytique de la fonction réciproque d'une fonction injective donnée.
- Vérifier si deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre (graphiquement ou à l'aide de la composée).
- Connaître et savoir appliquer la formule de dérivation d'une fonction réciproque.
- Savoir définir les fonctions cyclométriques., connaître leurs principales propriétés et savoir tracer leur graphique.
- Savoir établir les formules de dérivation des fonctions cyclométriques.
- Savoir résoudre des exercices variés : équations contenant des fonctions cyclométriques, domaines et dérivées de telles fonctions, démonstrations d'identités, associations de graphes et d'expressions analytiques, etc.

### Exercices

1. Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 + 6x + 8$ .
Déterminez la fonction réciproque de la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty, -3]$ .

---

2. Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ .
Déterminez sa fonction réciproque. Soyez précis(e).

---

3. Déterminez la fonction réciproque de $f(x) = \dfrac{1}{2x-7}$ .

---

4. Pour la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x-26}$ , quelle est l'image réciproque de ¼ ?

---

5. Lorsque la fonction $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ est restreinte à l'intervalle $]1, +\infty[$ , elle admet pour fonction réciproque $g(x) = 1 + \sqrt{6-x}$ .
Utilisez la formule de dérivation d'une fonction réciproque pour calculer la dérivée de $g(x)$ .

---

6. Déterminez le domaine de définition et la fonction dérivée de $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{2} - 2\right)$ .

---

7. Calculez
   a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\arctan x} + \frac{1}{x}\right)$
   
   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arctan x}$

# Fonctions logarithmes et exponentielles

## Objectifs

- Définir un logarithme de base $a$. Calculer un tel logarithme via la définition, en passant à l'écriture exponentielle.
- Démontrer les propriétés du logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance y compris celle du changement de base.
- Énoncer les propriétés communes d'une famille de fonctions logarithmes ou exponentielles. Tracer l'allure générale des graphiques de ces fonctions.
- Résoudre des équations et des inéquations logarithmiques ou exponentielles simples.
- Résoudre un problème issu des mathématiques, des sciences, de l'économie … au moyen des fonctions logarithmes ou exponentielles.

## Exercices

1. Déterminez l'expression analytique d'une fonction exponentielle dont le graphique comprend le point $P\left(-3, \dfrac{64}{27}\right)$.

---

2. Déterminez l'expression analytique d'une fonction logarithmique dont le graphique comprend le point $Q(25, 4)$.

---

3. Sachant que $\log_a x = 2$, $\log_a y = \dfrac{2}{3}$ et $\log_a z = -4$, que vaut $\log_a \dfrac{x^2y^3}{\sqrt{z}}$ ? Justifiez.

---

4. Sans calculatrice, mais en justifiant par des propriétés, calculez la valeur de
$$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

---

5. Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes.

   a) $f(x) = \ln\left(x^2-3x-10\right)$

   b) $g(x) = \ln\left|x^2-3x-10\right|$

---

6. Résolvez les équations et inéquations suivantes. Précisez les conditions d'existence éventuelles.

   a) $\log_3\left(9-x^2\right) = -2$

   b) $2 . \ln x - \ln(3-x) = 0$

   c) $\dfrac{1}{e^{2x+1}} - 3 = 0$

   d) $16^{1-2x} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1}$

   e) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x \geq \dfrac{27}{64}$

   f) $e^{-x} < 5$

7. Une culture de bactéries compte 250 individus au début d'une observation. Dans un milieu suffisamment nutritif, cette population est multipliée par 3 toutes les 40 minutes.

a) Combien y aura-t-il de microbes dans 1 heure ? Dans 2 heures ? Et dans 6 heures ?

b) Dans combien de temps cette population comptera-t-elle 100 000 individus ?

---

8. La population d'un pays compte 15 millions d'habitants en 2017. Son taux de croissance annuel est de 2,5 % . Supposons que ce taux se maintienne dans les années à venir.

a) Combien d'habitants ce pays comptera-t-il en 2025 ?

b) En quelle année ce pays comptera-t-il 25 millions d'habitants ?

---

9. On estime que la valeur d'une voiture diminue de 20 % par an. Une certaine voiture coûte 12 000 euros à l'achat.

a) Calculez sa valeur dans 5 ans.

b) Dans combien de temps ne vaudra-t-elle plus que 10 % de sa valeur initiale ?

---

10. On vient de faire couler l'eau du bain. Voici l'évolution de la température de l'eau en fonction du temps.

| Temps (min) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| T° (Celsius) | 60 | 48 | 38,4 | 30,7 | 24,6 |

a) Peut-on dire que la température décroît de façon exponentielle avec le temps ? Pourquoi ?

b) Quelle sera la température de l'eau après 23 minutes (deux décimales exactes) ?

c) Après combien de minutes peut-on plonger bébé dans son bain s'il ne supporte pas plus de 37 °C (deux décimales exactes) ?

---

11. Soit les fonctions $f(x) = 2^x$ et $g(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-2}$ .

a) Tracez les graphiques de $f$ et de $g$ sur le même schéma.

b) Calculez les coordonnées exactes du point d'intersection de $G_f$ et de $G_g$ .

---

12. Déterminez le domaine de définition et calculez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes. Simplifiez les expressions autant que possible.

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

b) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

c) $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x+3}}$

d) $f(x) = e^{-3x}.x$

e) $f(x) = x^4.\ln(4x)$

f) $f(x) = \ln^2(x^2-4)$

g) $f(x) = \dfrac{-6}{\ln(3x)}$

h) $f(x) = \ln(7-5x+2x^2)$

i) $f(x) = \ln(\sin x)$

13. Calculez les limites suivantes et interprétez graphiquement chaque résultat.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x.e^{-x}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \ln(2x-6)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{9e^x + 1}{e^x - 2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x.\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x+5}$

---

14. Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$ .

a) Cette fonction possède deux asymptotes horizontales. Déterminez leurs équations.

b) Démontrez que cette fonction est strictement croissante dans $\boldsymbol{R}$ .

---

15. Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x.\ln x$ .

a) Déterminez le domaine de définition de $f$.

b) Calculez $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ .

c) Étudiez les variations de $f$.

d) Étudiez la concavité du graphique de $f$.

e) À l'aide des résultats précédents, esquissez le graphique de $f$.

---

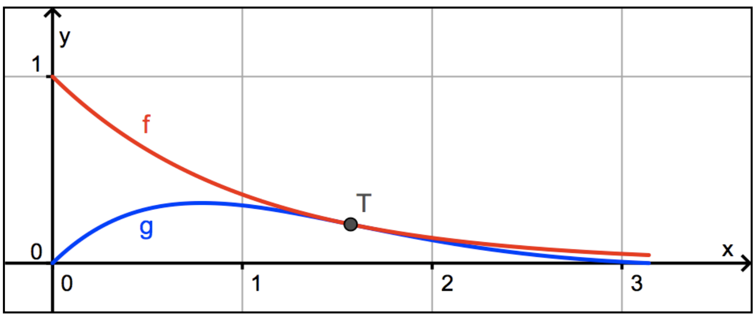
16. Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ .

a) Déterminez le domaine de définition de $f$.

b) Déterminez les équations des asymptotes au graphique de $f$.

---

17. Voici, représentées dans l'intervalle $[\,0\,,\pi\,]$ , les fonctions $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \sin x.e^{-x}$ .




Démontrez que les courbes représentant $f$ et $g$ sont tangentes en un point $T$ .
Quelles sont les coordonnées de $T$ ?

# Nombres complexes

## Objectifs

- Effectuer des calculs sur les nombres complexes écrits sous forme cartésienne.
- Passer d'un nombre complexe écrit sous forme cartésienne au même nombre complexe écrit sous forme trigonométrique et réciproquement.
- Effectuer des calculs sur les nombres complexes écrits sous forme trigonométrique. Le cas échéant, appliquer la formule de De Moivre.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations du deuxième degré, ou d'un degré supérieur en utilisant éventuellement la méthode de Horner.
- Déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe (et en particulier de l'unité).

## Exercices

1. Calculez $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{1}{4+i}$ et présentez la réponse sous la forme $a+bi$ .

---

2. Calculez $(1-2i)^3$ et présentez la réponse sous la forme $a+bi$ .

---

3. Résolvez l'équation $x^2+(i-4)x+5-5i=0$ .

---

4. Résolvez l'équation $2ix^2-(6+2i)x+6=0$ .

---

5. Résolvez l'équation suivante sachant qu'elle admet une solution réelle :

$$i\,x^3-3i\,x^2+(2+3i)x-2-i=0 \ .$$

---

6. Déterminez la valeur du paramètre $k$ pour que le polynôme $p(x)=2x^3+k\,x^2+47x+87$ soit divisible par $(x+3)$ .

   Pour cette valeur de $k$ , décomposez ensuite $p(x)$ en un produit de trois polynômes à coefficients complexes.

---

7. Calculez $\dfrac{(1-i)^{12}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}$ .

---

8. Vérifiez que $2+i$ est une racine quatrième de $-7+24i$ .

---

9. Résolvez l'équation $z^4=16i$ . Représentez les solutions dans le plan de Gauss.

---

10. Quelles sont les racines huitièmes de l'unité ?

# Calcul intégral

## Objectifs

- Résoudre une équation différentielle élémentaire, y compris dans le cadre d'un problème de MRUA .
- Calculer une intégrale indéfinie en utilisant les formules de base (intégrales immédiates et quasi immédiates), un changement de variable, la méthode d'intégration par parties ou la décomposition en fractions simples.

1. Résolvez l'équation différentielle suivante sous les conditions données :

$$f''(x) = \frac{1}{x} + x \quad \text{avec} \quad f'(1) = 2 \quad \text{et} \quad f(e) = \frac{e^3}{6} .$$

---

2. Calculez les intégrales indéfinies suivantes.

**Intégrales quasi immédiates**

a) $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

b) $\int \frac{5x}{x^2+1}\, dx$

c) $\int e^{1-3x}\, dx$

d) $\int \cos x . \sin x\, dx$

e) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\int \frac{2}{\sqrt{4-x}}\, dx$

g) $\int \cos(5x)\, dx$

h) $\int \tan(2x)\, dx$

**Intégration par changement de variable**

i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\, dx$

j) $\int \frac{18}{9+4x^2}\, dx$

k) $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$ (posez $t = 2x$ )

l) $\int x . \sqrt{x+2}\, dx$ (posez $x = -\ln t$ )

**Intégration par parties**

m) $\int \arcsin x\, dx$

n) $\int x . e^{-x}\, dx$

o) $\int x . \cos(2x)\, dx$

p) $\int x . \arctan x\, dx$

**Intégration par décomposition en fractions partielles**

q) $\int \frac{1}{x^2-6x+5}\, dx$

r) $\int \frac{4x+1}{x^2-1}\, dx$

---

3. Calculez $\int e^{3x} . \cos(2x)\, dx$ .

Indication : utilisez deux fois de suite la méthode d'intégration par parties ; à l'issue de la seconde intégration par parties, vous obtiendrez l'intégrale de départ affectée d'un autre coefficient.