

1. Lors d'une tombola, 1000 billets sont mis en vente. Parmi ces billets, cinq permettent de gagner 100 €, dix de gagner 20 €, vingt de gagner 10 €, cent de gagner 5 € et les autres sont perdants. Une personne achète un seul billet. Quelle est la probabilité pour qu'elle gagne une somme inférieure ou égale à 10 € ?

Il s'agit d'additionner les probabilités des trois événements élémentaires « gagner 10 euros », « gagner 5 euros » et « ne rien gagner » : $\frac{20}{1000} + \frac{100}{1000} + \frac{865}{1000} = 0,985$.

On peut aussi passer par le complémentaire : $1 - \left(\frac{5}{1000} + \frac{10}{1000} \right) = 0,985$.

2. Parmi 100 étudiants, 70 étudient l'anglais, 50 étudient l'espagnol et 25 étudient à la fois l'anglais et l'espagnol. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant tiré au hasard étudie l'anglais ou l'espagnol ?

Soient les événements $A =$ « l'étudiant étudie l'anglais » et $B =$ « l'étudiant étudie l'espagnol ». Il faut calculer la probabilité de l'événement $A \cup B =$ « l'étudiant étudie l'anglais ou l'espagnol » : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,5 - 0,25 = 0,95$.

3. Soient A et B des événements tels que $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Calculez $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

D'après une des lois de DE MORGAN :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} \right) = \frac{17}{30}.$$

4. Une classe se compose de 12 filles et de 8 garçons. On forme une délégation en prenant 5 élèves au hasard. Quelle est la probabilité pour que la délégation comprenne

a) exactement deux filles ?

b) au moins un garçon ?

a) Probabilité pour qu'il y ait deux filles et trois garçons : $\frac{C_{12}^2 \cdot C_8^3}{C_{20}^5} = \frac{66 \cdot 56}{15504} \approx 0,2384$.

b) Calculons la probabilité de l'événement contraire « pour qu'il n'y ait aucun garçon » :

$$\frac{C_{12}^5 \cdot C_8^0}{C_{20}^5} = \frac{792 \cdot 1}{15504} \approx 0,0511.$$

La probabilité pour qu'il y ait au moins un garçon est donc : $1 - 0,0511 \approx 0,9489$.

5. On lance trois dés distinguables.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois le « 6 » ?
b) Quelle est la probabilité pour que la somme des points soit égale à 12 ?

a) La probabilité de n'obtenir aucune fois le « 6 » est $C_3^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \approx 0,3472$.

b) La somme 12 peut s'obtenir de 25 façons : 1+5+6 (6 permutations possibles) ; 2+4+6 (6 p.p.) ; 2+5+5 (3 p.p.) ; 3+3+6 (3 p.p.) ; 3+4+5 (6 p.p.) ; 4+4+4 (1 p.p.).

Si E est l'événement « la somme des points est égale à 12 », on a :

$$E = \{(1,5,6), (1,6,5), (5,1,6), \dots, (2,5,5), (5,2,5), (5,5,2), \dots, (4,4,4)\} \text{ avec } \#E = 25.$$

$$\text{Donc : } P(E) = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216} \approx 0,1157.$$

6. La probabilité pour qu'un nouveau-né soit un garçon vaut environ 0,51. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait 7 garçons dans une famille de 12 enfants ?

Soit X la variable aléatoire « nombre de garçons dans la famille » ($X \sim \text{Bi}(12, 0.51)$).

La probabilité d'avoir 7 garçons et 5 filles est : $P(X = 7) = C_{12}^7 \cdot (0,51)^7 \cdot (0,49)^5 \approx 0,2008$.

7. D'un jeu de 52 cartes bien battues, on tire 5 cartes au hasard. Calculez la probabilité pour que l'on obtienne exactement un As et deux Rois, et deux autres cartes.

Le nombre de « cas possibles » est le nombre de façons d'obtenir 5 cartes parmi 52 (sans répétition et sans tenir compte de l'ordre).

Pour calculer le nombre de « cas favorables », il faut calculer le produit du nombre de façons d'obtenir un As parmi 4, par le nombre de façons d'obtenir 2 Rois parmi 4, et par le nombre de façons d'obtenir 2 autres cartes parmi les 44 « non-As et non-Roi ».

$$\text{La probabilité demandée est donc : } \frac{C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^2}{C_{52}^5} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 946}{2598560} \approx 0,0087.$$

8. Un sondage, réalisé sur 1000 personnes et portant sur la question « voterez-vous pour le parti A aux prochaines élections ? », a donné les résultats suivants.

	Femmes	Hommes
Oui	350	200
Non	150	175
Sans réponse	100	25

On interroge une personne au hasard.

- a) Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un homme ayant répondu « non » ?
b) Sachant que la personne est une femme, quelle est la probabilité pour qu'elle ait répondu « oui » ?

a) $\frac{175}{1000}$ b) $\frac{350}{600}$

9. On lance deux dés distinguables et bien équilibrés. Soient les événements $A = \text{« la somme des points vaut 8 »}$ et $B = \text{« un des dés a donné un 3 »}$.

a) Calculer $P(B|A)$.

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

a) D'abord, nous avons $A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$.

Si l'on sait que l'événement A est réalisé, alors il constitue l'ensemble fondamental réduit, et il n'y a donc plus que 5 cas possibles (au lieu de 36 initialement).

Les couples $(3,5)$ et $(5,3)$ sont favorables à l'événement B . Donc : $P(B|A) = \frac{2}{5}$.

b) Nous avons $B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,3)\}$.

Donc, $P(B) = \frac{11}{36} \neq P(B|A)$. Les événements A et B ne sont pas indépendants.

10. Deux étudiants A et B cherchent la solution d'un problème sans se consulter. Il y a 8 chances sur 10 pour que l'étudiant A trouve la solution, et il y en a 7 sur 10 pour que B trouve la solution.

a) Quelle est la probabilité pour que le problème soit résolu ?

b) L'étudiant A souhaite s'associer à un étudiant C , de bonne réputation, pour que la probabilité qu'ils résolvent le problème, sans se consulter, soit égale à 0,99.

Quelle devrait être la « force » de C (c.-à-d. la probabilité qu'il a de résoudre le problème ?).

a) Les événements A et B étant indépendants, nous savons que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Pour que le problème soit résolu, il faut que A ou B trouve la solution :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,8 + 0,7 - 0,56 = 0,94.$$

b) Il faut que :

$$P(A \cup C) = 0,99 \Leftrightarrow P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C) = 0,99 \Leftrightarrow P(C) \cdot [1 - P(A)] = 0,99 - P(A).$$

$$\text{Donc } P(C) = \frac{0,99 - 0,8}{1 - 0,8} = 0,95.$$

11. Dans une certaine école, 80% des élèves de rhétorique réussissent en mathématique, 90 % réussissent en physique, et 75% réussissent dans les deux branches. On choisit un élève au hasard. Sachant qu'il a réussi en physique, quelle est la probabilité pour qu'il réussisse aussi en mathématique ?

Soient les événements $A = \text{« l'élève réussit en mathématique »}$ et $B = \text{« l'élève réussit en physique »}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,75}{0,9} = \frac{5}{6} \approx 0,8333.$$