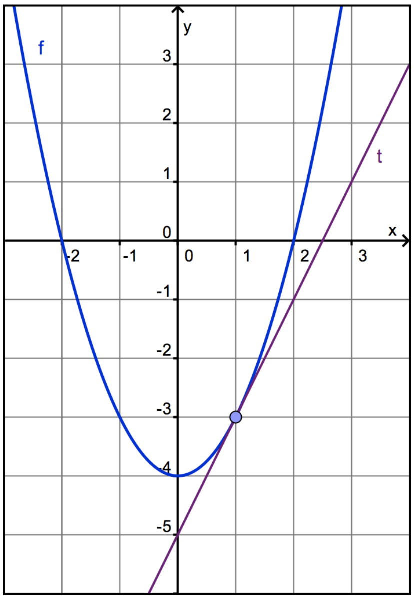
Solutions des exercices de la page 4

a) $f(x) = x^2 - 4$ et $a = 1$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4-(-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

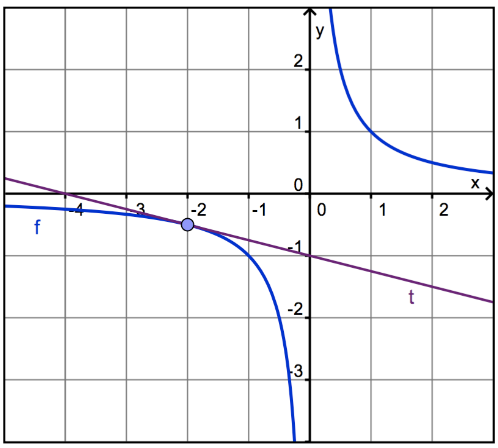
$$t \equiv y - f(1) = f'(1).(x-1) \to t \equiv y + 3 = 2.(x-1) \to t \equiv y = 2x - 5$$



b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -2$

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\frac{2+x}{2x}}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$t \equiv y - f(-2) = f'(-2).(x-(-2)) \to t \equiv y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.(x+2) \to t \equiv y = -\frac{1}{4}x - 1$$



c) $f(x) = \sin x$ et $a = \pi / 2$

$$f'\left(\pi/2\right) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x - 1}{x - \pi/2} = ?$$

Vous n'êtes pas encore capable de calculer cette limite (si vous voulez explorer ce sujet, voyez le chapitre sur les limites à partir de la page 40).

Pour le moment, vous pouvez évaluer cette limite en prenant une suite de valeurs de x tendant vers $\pi / 2 \approx 1{,}5707963$ … .
Il est possible de montrer que cette limite vaut 0 (par exemple $\dfrac{\sin(1{,}57)-1}{1{,}57-\pi/2} = 0{,}0003982$ ...).

Cela signifie que la tangente au graphique en son point d'abscisse $\pi / 2$ est horizontale.
Son équation est donc : $\boxed{t_1 \equiv y = 1}$.

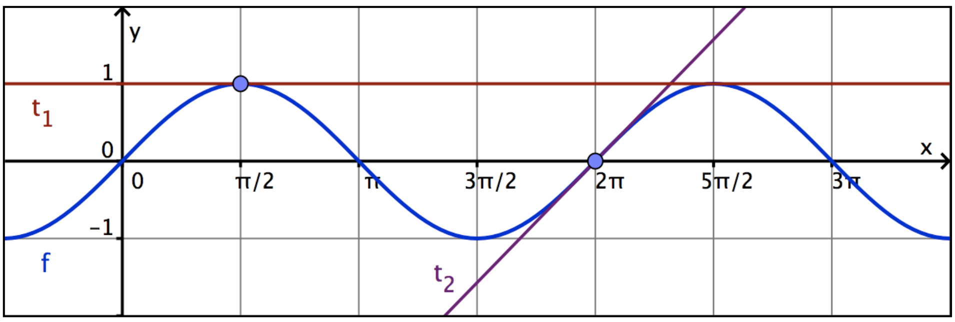
$f(x) = \sin x$ et $a = 2\pi$

$$f'\left(2\pi\right) = \lim_{x\to 2\pi} \frac{\sin x - \sin(2\pi)}{x - 2\pi} = \lim_{x\to 2\pi} \frac{\sin x}{x - 2\pi} = ?$$

Vous pouvez évaluer cette limite en prenant une suite de valeurs de x tendant vers $2\pi / 2 \approx 6{,}2831853$… … .
Il est possible de montrer que cette limite vaut 1 (par exemple $\dfrac{\sin(6{,}283)}{6{,}283-2\pi} = 0{,}9999955$ ...).

$$t_2 \equiv y - f(2\pi) = f'(2\pi).(x - 2\pi) \rightarrow t_2 \equiv y - 0 = 1.(x - 2\pi)$$

L'équation de la tangente au graphique en son point d'abscisse 2π est donc : $\boxed{t_2 \equiv y = x - 2\pi}$.

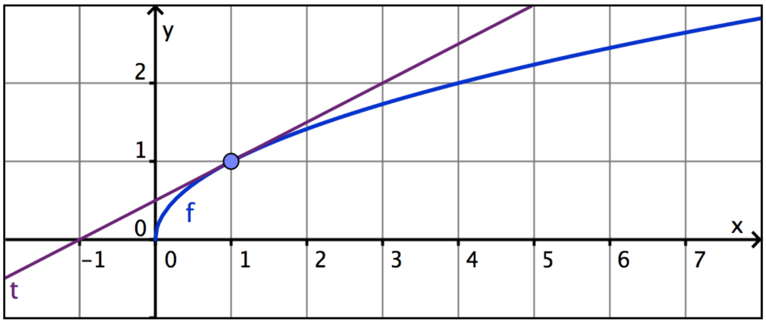


d) $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=1$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

$$t\equiv y-f(1)=f'(1).(x-1)\to t\equiv y-1=\frac{1}{2}.\left(x-1\right)\to t\equiv y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ .$$



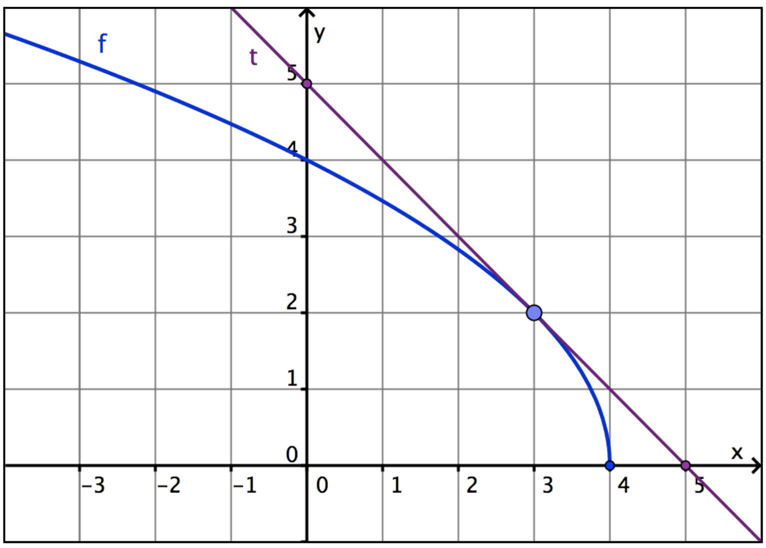
---

e) $f(x)=2\sqrt{4-x}$ et $a=3$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2\sqrt{4-x}-2}{x-3}=2.\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{4-x}-1\right)\left(\sqrt{4-x}+1\right)}{(x-3)\left(\sqrt{4-x}+1\right)}$$

$$=2.\lim_{x\to 3}\frac{4-x-1}{(x-3)\left(\sqrt{4-x}+1\right)}=2.\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(\sqrt{4-x}+1\right)}=2.\lim_{x\to 3}\frac{-1}{\sqrt{4-x}+1}=-1$$

$$t\equiv y-f(3)=f'(3).(x-3)\to t\equiv y-2=-1.\left(x-3\right)\to t\equiv y=-x+5\ .$$



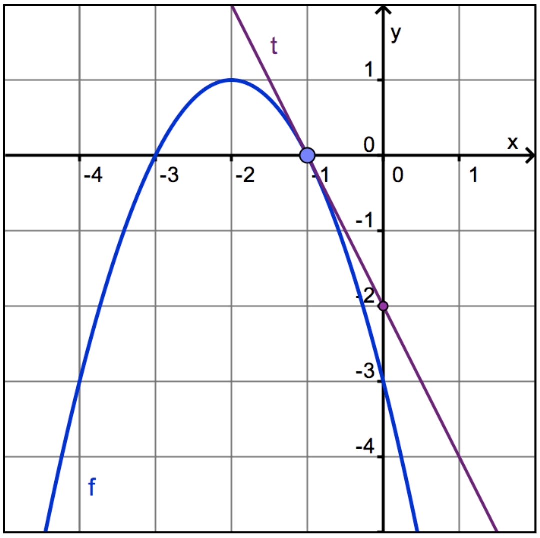
f) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ et $a = -1$

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(-x^2 - 4x - 3) - 0}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{-x^2 - 4x - 3}{x + 1}$$

Factorisons le numérateur (recherche des racines : $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$).

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{-(x+3)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} -(x+3) = -2$$

$t \equiv y - f(-1) = f'(-1).(x - (-1)) \to t \equiv y - 0 = -2.(x+1) \to t \equiv y = -2x - 2$.

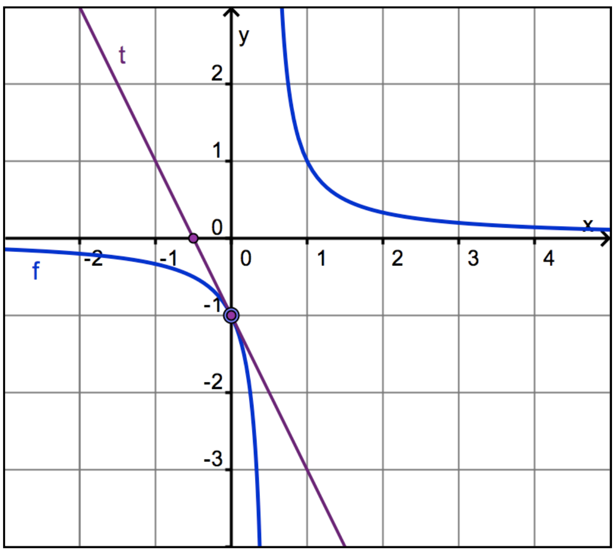


---

g) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$ et $a = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2x-1} - (-1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 + 2x - 1}{2x - 1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{(2x-1)x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{2x - 1} = -2$$

$t \equiv y - f(0) = f'(0).(x - 0) \to t \equiv y - (-1) = -2\,x \to t \equiv y = -2x - 1$.



h) $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2$ et $a=-1$

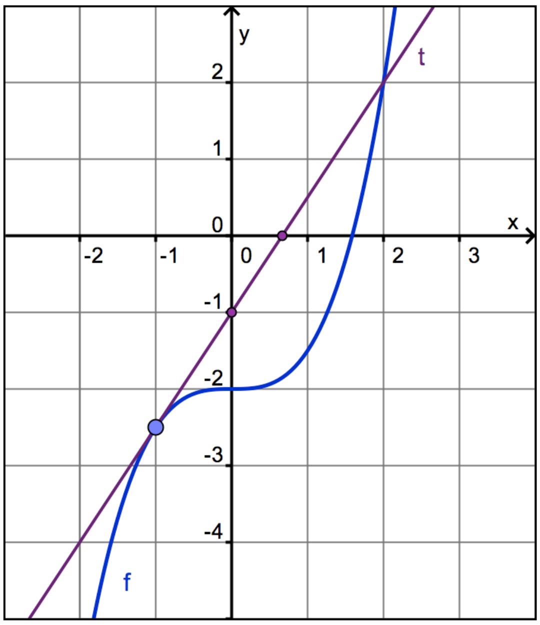
$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2}x^3-2-\left(-\frac{5}{2}\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)}{x+1}$$

Il est possible d'effectuer la division par $x+1$ (méthode de HORNER) mais il est aussi utile de connaître les formules suivantes pour factorise l'expression x^3+1 :

$$\boxed{a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)}$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{2}(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{2}\left(x^2-x+1\right)=\frac{3}{2}$$

$$t\equiv y-f(-1)=f'(-1).(x-(-1))\to t\equiv y-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}.(x+1)\to t\equiv y=\frac{3}{2}x-1\ .$$

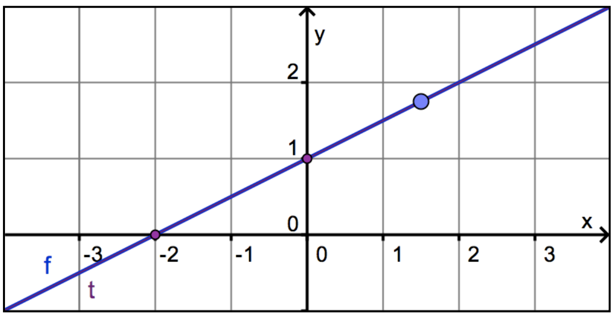


---

i) $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ et $a=3/2$

Comme il s'agit d'une fonction du premier degré dont la pente vaut ½ , le nombre dérivé de f est aussi égal à ½ , quelle que soit la valeur de a : $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

La « tangente » est confondue avec le graphique de f !



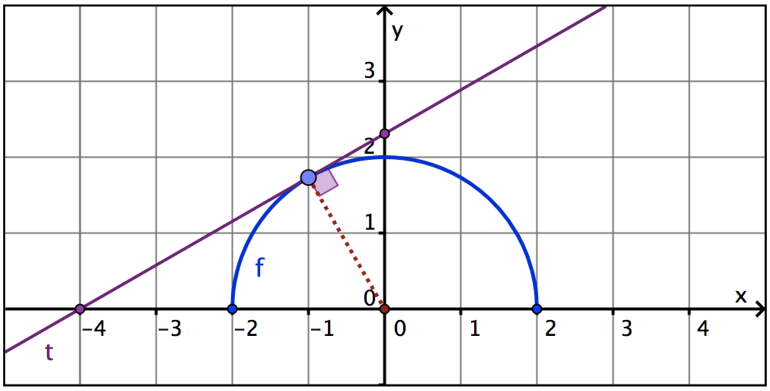
j) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ et $a = -1$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\right)}{(x+1)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{4-x^2-3}{(x+1)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)\left(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$t \equiv y-f(-1)=f'(-1).(x-(-1)) \rightarrow t \equiv y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.(x+1) \rightarrow t \equiv y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\ .$$



Il faut noter qu'un élève de 4e année aurait pu trouver les résultats dans ce cas-ci !

En effet, la fonction $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ peut s'écrire $y=\sqrt{4-x^2}$ avec $y \geq 0$.

Nous avons donc : $y^2=4-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

Nous reconnaissons là une équation cartésienne du cercle centré en (0,0) et de rayon 2 . Comme $y \geq 0$, le graphique de la fonction f est le demi-cercle centré en (0,0) et de rayon 2 et dont les points ont une ordonnée positive.

Maintenant, utilisons une propriété de géométrie : la tangente que nous cherchons au point $\left(-1,\sqrt{3}\right)$ est perpendiculaire au rayon du cercle comprenant les points $\left(-1,\sqrt{3}\right)$ et $(0,0)$.

La pente de ce rayon est $\dfrac{\sqrt{3}-0}{-1-0}=-\sqrt{3}$.

La pente de la tangente est donc l'inverse de l'opposé de la pente du rayon : $m_t=-\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Nous avons ainsi retrouvé le résultat $f'(-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et l'équation de la tangente suit de la même façon.