Exercice n°1 page 6

Déterminez des équations vectorielle, paramétriques et cartésienne du plan π déterminé par les points A(-3,1,2) , B(1,2,0) et C(4,-5,3).

Équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = \lambda.\overrightarrow{AB} + \mu.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}$.

Équations paramétriques

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu.\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \pi \equiv \begin{cases} x = 4\lambda + 7\mu - 3 & (1) \\ y = \lambda - 6\mu + 1 & (2) \\ z = -2\lambda + \mu + 2 & (3) \end{cases}$$

Équation cartésienne

Éliminons λ entre (1) et (2)

1 x (1)	$x = 4\lambda + 7\mu - 3$
- 4 x (2)	$-4y = -4\lambda + 24\mu - 4$
addition	$x - 4y = 31\mu - 7$ (4)

Éliminons λ entre (1) et (3)

1 x (1)	$x = 4\lambda + 7\mu - 3$
2 x (3)	$2z = -4\lambda + 2\mu + 4$
addition	$x + 2z = 9\mu + 1$ (5)

Éliminons μ entre (4) et (5)

9 x (4)	$9x - 36y = 279\mu - 63$
-31 x (5)	$-31x - 62z = -279\mu - 31$
addition	$-22x - 36y - 62z = -94$

Finalement, en divisant par - 2 , on obtient : $\pi \equiv 11x + 18y + 31z - 47 = 0$

Méthode du déterminant

$$\left|\begin{matrix} x+3 & 4 & 7 \\ y-1 & 1 & -6 \\ z-2 & -2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x+3 & 4 \\ y-1 & 1 \\ z-2 & -2 \end{matrix} = (x+3) - 24(z-2) - 14(y-1) - 7(z-2) - 12(x+3) - 4(y-1) = 0$$

$\Leftrightarrow \; x + 3 - 24z + 48 - 14y + 14 - 7z + 14 - 12x - 36 - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \; -11x - 18y - 31z + 47 = 0$ (équation équivalente à celle obtenue ci-dessus).

Exercice n°2 page 6

$xy \equiv z = 0$ (les points du plan horizontal déterminé par les axes Ox et Oy ont une cote, ou hauteur, nulle)

$xz \equiv y = 0$ (les points du plan vertical déterminé par les axes Ox et Oz ont une ordonnée nulle)

$yz \equiv x = 0$ (les points du plan vertical déterminé par les axes Oy et Oz ont une abscisse nulle)

Exercice n°3 page 6

$PQR \equiv z = 2$ (horizontal)

$PQV \equiv y = 5$ (vertical parallèle à Ox et Oz)

$PSU \equiv x = 3$ (vertical parallèle à Oy et Oz)

$ORU \equiv y = \frac{5}{3}x \Leftrightarrow ORU \equiv 5x - 3y = 0$

(vertical parallèle à Oz ; z peut donc être quelconque tandis que x et y sont liés par l'équation de la droite OU dans le plan xOy)

$QST \equiv y = -\frac{5}{3}x + 5 \Leftrightarrow QST \equiv 5x + 3y - 15 = 0$

(vertical parallèle à Oz ; z peut donc être quelconque tandis que x et y sont liés par l'équation de la droite TV dans le plan xOy)

Exercice n°4 page 6

a) L'observation des équations et la comparaison avec les formules de référence permet de trouver directement deux vecteurs directeurs : les coefficients de λ sont les composantes d'un premier, tandis que ceux de μ sont celles d'un second :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

b) Il faut résoudre le système $\begin{cases} 2 = 2\lambda + 3\mu - 1 & (1) \\ 1 = \lambda - 2\mu + 3 & (2) \\ 0 = \lambda + \mu - 4 & (3) \end{cases}$ afin de vérifier s'il existe des valeurs de λ et μ qui satisfont simultanément aux trois équations.

Travaillons par exemple sur (2) et (3) : en les soustrayant on trouve $1 = -3\mu + 7 \rightarrow \mu = 2$. Ensuite, en faisant (2) + 2 × (3) , on trouve : $1 = 3\lambda - 5 \rightarrow \lambda = 2$.

Il reste à vérifier dans (1) : $2 \overset{?}{=} 2.2 + 3.2 - 1$; la réponse est non, le point S n'appartient pas au plan π .

c) Remplaçons dans les équations paramétriques : $\begin{cases} -1 = 2\lambda + 3\mu - 1 & (1) \\ 6 = \lambda - 2\mu + 3 & (2) \\ z = \lambda + \mu - 4 & (3) \end{cases}$.

La résolution du système formé par les équations (1) et (2) permet de trouver $\lambda = \frac{9}{7}$ et $\mu = -\frac{6}{7}$. En remplaçant dans (3) , on obtient $z = -\frac{25}{7}$.

d) Le plus simple est d'utiliser la méthode du déterminant.
En effet, les équations paramétriques nous fournissent directement un point A(-1,3,-4) et deux vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\pi \equiv \left| \begin{matrix} x+1 & 2 & 3 \\ y-3 & 1 & -2 \\ z+4 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x+1 & 2 \\ y-3 & 1 \\ z+4 & 1 \end{matrix} = (x+1) - 4(z+4) + 3(y-3) - 3(z+4) + 2(x+1) - 2(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi \equiv x + 1 - 4z - 16 + 3y - 9 - 3z - 12 + 2x + 2 - 2y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi \equiv 3x + y - 7z - 28 = 0$$

Exercice n°5 page 6

a) L'observation des équations et la comparaison avec les formules de référence permet de trouver directement deux vecteurs directeurs, car les coefficients de λ sont les composantes d'un premier, tandis que ceux de μ sont celles d'un second :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Il faut résoudre le système $\begin{cases} 2 = \lambda - 2\mu + 1 & (1) \\ 1 = 3\lambda + \mu & (2) \\ 0 = -\lambda + 2\mu - 3 & (3) \end{cases}$

afin de vérifier s'il existe des valeurs de λ et μ qui satisfont simultanément aux trois équations.

L'équation (1) montre que $\lambda - 2\mu = 1$. Mais d'après l'équation (3) , $\lambda - 2\mu = -3$.

Ces résultats sont incompatibles et le point S n'appartient pas au plan.

c) Il faut résoudre le système $\begin{cases} -1 = \lambda - 2\mu + 1 & (1) \\ 6 = 3\lambda + \mu & (2) \\ z = -\lambda + 2\mu - 3 & (3) \end{cases}$.

En résolvant le système formé par les équations (1) et (2), nous trouvons $\lambda = \dfrac{10}{7}$ et $\mu = \dfrac{12}{7}$.

En remplaçant dans (3) : $z = -\dfrac{10}{7} + 2.\dfrac{12}{7} - 3 = -1$. Il s'agit donc du point P(-1,6,-1) .

d) Utilisons la méthode du déterminant :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y & 3 & 1 \\ z+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-1 & 1 \\ y & 3 \\ z+3 & -1 \end{matrix} = 6(x-1) + (z+3) + 2y + 6(z+3) + (x-1) - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi \equiv 6x - 6 + z + 3 + 2y + 6z + 18 + x - 1 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi \equiv 7x + 7z + 14 = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv x + z + 2 = 0$$

Exercice n°6 page 7

a) Prenons le point A et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 6x + 9y + 5z - 24 = 0$$

b) Prenons le point O et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & -3 & 4 \\ y & 1 & -5 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 13x + 17y + 11z = 0$$

a) Prenons le point A et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ y & 5 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 15x + 6y + 10z - 30 = 0$$

Exercice n°7 page 7

Prenons le point $A\ (a,0,0)$ et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$.

Utilisons la méthode du déterminant :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} \begin{matrix} x-a & -a \\ y & b \\ z & 0 \end{matrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv (x-a)bc + abz + acy = 0$$

$$\pi \equiv bcx + acy + abz = abc$$

En divisant membre à membre par abc, nous obtenons : $\pi \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Nous pouvons aussi passer par les équations paramétriques :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -\lambda a - \mu a + a & (1) \\ y = \lambda b & (2) \\ z = \mu c & (3) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) donnent $\lambda = \frac{y}{b}$ et $\mu = \frac{z}{c}$ que l'on remplace dans (1) :

$$x = -\frac{y}{b}a - \frac{z}{c}a + a \Leftrightarrow x + \frac{y}{b}a + \frac{z}{c}a = a \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (division par } a \text{ pour terminer)}$$

Pour vérifier l'exercice n°6 (c) avec $A(2,0,0)$, $B(0,5,0)$ et $C(0,0,3)$: $\pi \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1$.

Multiplions les deux membres de cette équation par 30 : $\pi \equiv 15x + 6y + 10z = 30$.

Exercice n°8 page 7

Les coordonnées du point P doivent être solutions de l'équation du plan :

$$5 + k.(-4) - 2.(-6) - 9 = 0 \to -4k + 8 = 0 \to k = 2 .$$

Exercice n°9 page 7

a) $2.0 - 5.3 + 6z - 15 = 0 \to z = 5$ $\quad A\ (0,3,5)$

b) $2.1 - 5y + 6.3 - 15 = 0 \to y = 1$ $\quad B\ (1,1,3)$

c) $2.2 - 5.(-1) + 6.1 - 15 \overset{?}{=} 0 \to oui$ $\quad C\ (2,\text{-}1,1)$

d) La façon dont la question est formulée incite à prendre comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}$, mais cela ne convient pas car $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AB}$ et deux vecteurs directeurs ne doivent pas être colinéaires.

Je n'aurais donc pas dû vous proposer le point C, car il est aligné avec A et B !

Voici un autre point du plan, obtenu en faisant $y = 0$ et $z = 0$: $D\left(\frac{15}{2},0,0\right)$.

Comme vecteurs directeurs nous pouvons maintenant prendre $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}15/2\\-3\\-5\end{pmatrix}$.

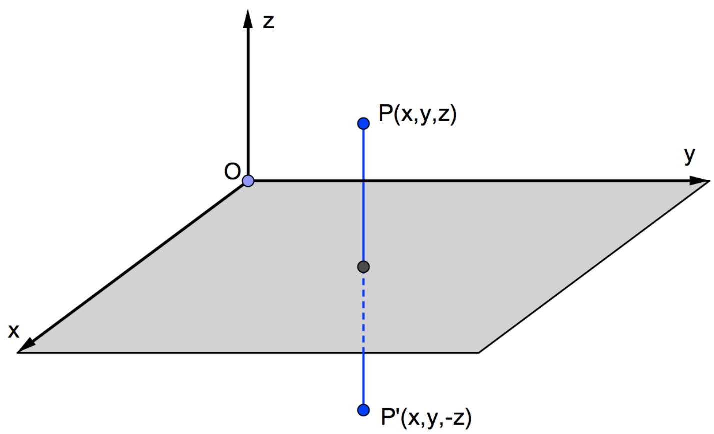
Tout va bien : ils ne sont pas multiples !

e) En prenant comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $2.\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}15\\-6\\-10\end{pmatrix}$,

voici des équations paramétriques du plan : $\beta \equiv \begin{cases} x = \lambda + 15\mu \\ y = -2\lambda - 6\mu + 3 \\ z = -2\lambda - 10\mu + 5 \end{cases}$.

Question des Olympiades Mathématiques Belges

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, le symétrique d'un point P(x,y,z) par rapport au plan $z = 0$ (le plan xOy) est le point P'(x,y,-z).



Donc, si P appartient à $\alpha \equiv 2x - 7y + 3z = 3$ alors le point P' appartient au plan symétrique de α et l'égalité $2x - 7y + 3(-z) = 3$ est vérifiée. La bonne réponse est D .

Fin des solutions des exercices des pages 6 et 7