5 B - C - D Mai 2014

MATHÉMATIQUE (6h)

Corrigé du test n°10 (évaluation formative) : dérivées et variations de fonctions

1. Soit la fonction $f(x)=x^2+3x$.
   À l'aide d'une limite, calculez le nombre dérivé de f en $a=2$.

Solution

Nous appliquons la définition du nombre dérivé d'une fonction :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+5)=7\ .$$

Ce résultat signifie qu'au point d'abscisse 2 du graphique de f (c'est-à-dire au point de coordonnées $(2,10)$) , la pente de la tangente est égale à 7 .

---

2. Calculez les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

	Fonctions	Réponses : fonctions dérivées
a)	$f(x)=3x^3+5x^2+x+1$	$f'(x)=9x^2+10x+1$
b)	$f(x)=\dfrac{3x-7}{6x+1}$	$f'(x)=\dfrac{3(6x+1)-(3x-7)6}{(6x+1)^2}=\dfrac{18x+3-18x+42}{(6x+1)^2}=\dfrac{45}{(6x+1)^2}$
c)	$f(x)=\left(8x^2-1\right)^3$	$f'(x)=3\cdot\left(8x^2-1\right)^2\cdot 16x=48x\cdot\left(8x^2-1\right)^2$
d)	$f(x)=\left(x^2+5\right)\cdot\left(x^3+x\right)$	$f'(x)=2x\cdot\left(x^3+x\right)+\left(x^2+5\right)\cdot\left(3x^2+1\right)=5x^4+18x^2+5$
e)	$f(x)=\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$	$f'(x)=-\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot 5=-5\cdot\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$
f)	$f(x)=\sqrt{3x+4}$	$f'(x)=\left[(3x+4)^{\frac{1}{2}}\right]'=\dfrac{1}{2}\cdot(3x+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

---

3. Soit la fonction $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

a) Étudiez les variations de cette fonction.

b) Étudiez la concavité de son graphique.

c) Déterminez l'équation de la tangente au point d'inflexion.

d) Tracez le graphique de f .

Solution

a) $f'(x)=x^2-4x+3$; les racines de f' sont 1 et 3 .

x		1		3	
f'	+	0	-	0	+
f	↗	MAX	↘	MIN	↗

$MAX\left(1,\frac{7}{3}\right)$ et $MIN(3,1)$

b) $f''(x)=2x-4$; la racine de f'' est 2 .

x		2	
f''	-	0	+
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

$PI\left(2,\frac{5}{3}\right)$

c) Tangente au point d'abscisse 2 ? On a : $f'(2)=-1\rightarrow t\equiv y=-x+p$.
De plus : $\left(2,\frac{5}{3}\right)\in t\rightarrow\frac{5}{3}=-2+p\rightarrow p=\frac{11}{3}$. Finalement : $t\equiv y=-x+\frac{11}{3}$.

d)