Préparation du contrôle de synthèse n°2
Solutions des exercices

Limites de fonctions et asymptotes

1. a) 2 ; AH $\equiv y = 2$
   b) - 1 ; AH $\equiv y = -1$
   c) - 3
   d) n'existe pas car $\operatorname{dom} f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[\setminus \{2\}$
   e) n'existe pas car $\operatorname{dom} f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[\setminus \{2\}$
   f) 1,5
   g) $-\infty$; AV $\equiv x = 2$
   h) $+\infty$; AV $\equiv x = 2$

---

2. a) $\frac{3}{2}$; « point rouge » de coordonnées $\left(-4,\frac{3}{2}\right)$
   b) $-\frac{1}{18}$; « point rouge » de coordonnées $\left(-1,-\frac{1}{18}\right)$
   c) - 2 ; AH $\equiv y = -2$
   d) 0 ; « point rouge » de coordonnées $(0,0)$
   e) - 4 ; AH $\equiv y = -4$
   f) $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite ; AV $\equiv x = 7$

---

3. $\operatorname{dom} f = \mathbf{R} \setminus \{0, ½\}$
   a) « Point rouge » en (0,0) car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
   b) AV $\equiv x = ½$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1/2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1/2 \\ >}} f(x) = +\infty$;
   c) AO $\equiv y = ½\, x + ¼$.

---

4. $AO_1 \equiv y = x$ pour x tendant vers $+\infty$, et $AO_2 \equiv y = -x$ pour x tendant vers $-\infty$.

Dérivées

1. a) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x+1} = 4$;

   b) $f'(5) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \dfrac{1}{6}$;

   c) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}}{x-1} = -\dfrac{1}{4}$.

2. Fonctions dérivées :

a) $f'(x)=\dfrac{3}{(1-4x)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{16x+3}{2\sqrt{8x^2+3x}}$

c) $f'(x)=-4\cdot(2x+1)^2\cdot(4x-7)$

d) $f'(x)=24\cdot(6x+1)^3$

e) $f'(x)=5\cdot\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

f) $f'(x)=3\cdot\cos\left(\dfrac{3x}{4}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{3x}{4}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

---

3. a) $t\equiv y=x-\dfrac{5}{3}$ b) $t\equiv y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$ c) $t\equiv y=-2x+\dfrac{5}{2}$

---

4. Variations : $f'(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+1$.

Racines approximatives de $f'(x)$ (déterminées via GEOGEBRA) : -2.08 , 0.46 et 3.12 .

x		-2.08		0.46		3.12	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	Min_1	↗	Max	↘	Min_2	↗

Min_1 (-2.08 , -2.35) ; Max (0.46 , 1.24) et Min_2 (3.12 , -2.78) .

Concavités : $f''(x)=x^2-x-2$; les racines de $f''(x)$ sont - 1 et 2 .

x		-1		2	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	PI_1	$\cap$	PI_2	$\cup$

PI_1 (-1 , - ¾) et PI_2 (2 , -1) .

---

5. Dérivée première :

$$f'(x)=2\cdot\cos x-2\cdot\sin 2x\overset{duplication}{=}\underline{2\cdot\cos x}-\underline{2}\cdot2\cdot\sin x\cdot\underline{\cos x}=\underline{2\cdot\cos x}\cdot(1-2\cdot\sin x)\ .$$

Racines de $f'(x)$: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ou $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\right)\vee\left(x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right)$.

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		$3\pi/2$		2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	↗	↗	Max_1	↘	Min_1	↗	Max_2	↘	Min_2	↗	↗

La fonction n'est pas strictement croissante dans $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, car elle décroît dans $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$.

Par contre, elle est bien croissante dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

Géométrie analytique de l'espace

1. a) $ABC \equiv \begin{vmatrix} x-5 & -5 & -2 \\ y+1 & 2 & 0 \\ z & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ABC \equiv 10x + 23y + 4z - 27 = 0$

   b) Par exemple :

   $AB \equiv \overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$; $AB \equiv \begin{cases} x = -5k+5 \\ y = 2k-1 \\ z = k \end{cases}$; $AB \equiv \dfrac{x-5}{-5} = \dfrac{y+1}{2} = z$ ou $AB \equiv \begin{cases} x + 5z = 5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$.

2. Cherchons deux points de d. S'ils appartiennent aussi à π, c'est que $d \subset \pi$.
   Si $x = 1$, on trouve $P(1,0,-1) \in d$. On vérifie que $P \in \pi$.
   Si $x = 0$, on trouve $Q(0,-2,-4) \in d$, mais on vérifie que $Q \notin \pi$. Donc $d \not\subset \pi$.

3. Première façon : $ABC \equiv \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ABC \equiv bcx + abz + acy - abc = 0$

   et il reste à diviser les deux membres par abc pour obtenir la formule.

   Deuxième façon : vérifier que les coordonnées de chaque point sont solutions de l'équation proposée. Comme trois points non alignés déterminent un plan, cette équation est bien celle du plan ABC.

4. À partir des équations $d \equiv \dfrac{x}{5} = y - 3 = 2z + 1$, on obtient par exemple $d \equiv \begin{cases} x - 5y + 15 = 0 \\ x - 10z - 5 = 0 \end{cases}$.

   Les deux équations de ce système étant celles de deux plans qui se coupent en d, ces plans contiennent forcément d.

5. a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b) Comme $Ox \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, les équations (3) et (2) donnent $\lambda = -1$ et $\mu = 5$.
   En remplaçant dans (1), on obtient $x = 11$, et donc : $\pi \cap Ox = \{(11,0,0)\}$.

   c) Il faut un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ simultanément orthogonal aux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   Exprimons que les deux produits scalaires sont nuls et donnons ensuite une valeur à une des inconnues :

$$\begin{cases} n_1 + 5n_2 + n_3 = 0 \\ 2n_1 + n_2 = 0 \end{cases}$$ et par exemple $n_1 = 1$.

Cela donne $n_2 = -2$ et $n_3 = 9$. Un vecteur normal de π est donc : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

d) Comme $d \perp \pi$, le vecteur $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de d : $d \equiv x - 2 = -\dfrac{y}{2} = \dfrac{z-16}{9}$.

6. Il s'agit de la distance entre Q et sa projection orthogonale I sur le plan α (faites un p'tit dessin !). Cherchons le point I , intersection entre le plan α et la droite d passant par Q et perpendiculaire à α .

   Le vecteur normal $\vec{n}_\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi vecteur directeur de d , donc : $d \equiv \begin{cases} x = k + 2 \\ y = -2k - 7 \\ z = k \end{cases}$.

   En résolvant le système formé par les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de α , on trouve $k = -\dfrac{5}{3}$, ce qui nous donne $I\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{11}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$.

   Finalement : $d(Q,\alpha) = d(Q,I) = \dfrac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4{,}0825$.

7. Vérifions l'orthogonalité de deux vecteurs directeurs respectifs : $\vec{v}_a\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \vec{v}_b\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$.

   Les droites a et b sont orthogonales.

8. a) $S \equiv x^2 - 8x + \underline{\underline{16}} + y^2 + 2y + \underline{\underline{1}} + z^2 + 8 = \underline{\underline{17}} \Leftrightarrow S \equiv (x-4)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$.
   Centre : $C(4,-1,0)$. Rayon : $r = 3$.

   b) On a $xOy \equiv z = 0$. Remplaçant dans l'équation de S , nous trouvons $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$.
   La sphère coupe donc le plan xOy suivant un cercle de centre $D(4,-1,0)$ et de rayon 3 .

   c) On a $yOz \equiv x = 0$. Remplaçant dans l'équation de S , nous trouvons $(y+1)^2 + z^2 = -7$.
   Cette équation n'a pas de solution car le premier membre est positif et le second <u>strictement</u> négatif. La sphère ne coupe donc pas le plan yOz .

Calcul matriciel, déterminants, systèmes d'équations du premier degré

1. a) $A^2 + B \cdot C = \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ -21 & 5 \end{pmatrix}$ b) $C \cdot B = (-26)$ c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 2/7 & 1 \end{pmatrix}$

---

2. $d\acute{e}t(M) = -3$ et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 & 5/3 \\ 4/3 & -1/3 & -4/3 \\ 5/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

---

3. $\begin{cases} x = 20 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ ou $S = \{(20,1,3)\}$.

---

4. Si l'on veut obtenir un système échelonné, on peut d'abord effectuer les transformations $E_2 \to E_2 - 2E_1$ et $E_3 \to E_3 - 3E_1$. On trouve ainsi :

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ -y + 3z = -9 \\ -2y + 6z = -18 \end{cases} .$$

Les deux dernières équations étant équivalentes, le système est indéterminé et il est équivalent à

$$\begin{cases} x + y - z = 5 & (1) \\ -y + 3z = -9 & (2) \end{cases} .$$

On peut poser $x = \lambda$, et additionner (1) et (2), ce qui donne $2z + \lambda = -4$ et donc $z = -2 - \frac{\lambda}{2}$.

En remplaçant z dans (2), on obtient $y = 3 - \frac{3\lambda}{2}$.

Finalement : $S = \left\{ \left(\lambda, 3 - \frac{3\lambda}{2}, -2 - \frac{\lambda}{2} \right) \right\}$ ($\lambda \in R$) .

Pour interpréter géométriquement, il faut retourner aux équations initiales pour constater qu'elles correspondent à des plans sécants deux à deux (en effet, aucune équation n'ayant ses coefficients multiples de ceux d'une autre, les plans ne peuvent être parallèles).
Comme le système admet une infinité de solutions, cela signifie que les plans ont une infinité de points communs, et donc une droite d'intersection commune.