Préparation du contrôle de synthèse n°1 : solutions des exercices

Fonctions

1. Il faut résoudre l'équation $\frac{5x+1}{x^2-4}=2$.
   Sous les conditions $x \neq \pm 2$, on obtient : $5x+1=2\left(x^2-4\right) \Leftrightarrow 2x^2-5x-9=0$.
   Après résolution de cette équation du second degré, on conclut que les points cherchés sont : $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{4} \quad , \quad 2\right) \approx (-1.21 \quad , \quad 2)$ et $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{4} \quad , \quad 2\right) \approx (3.71 \quad , \quad 2)$.

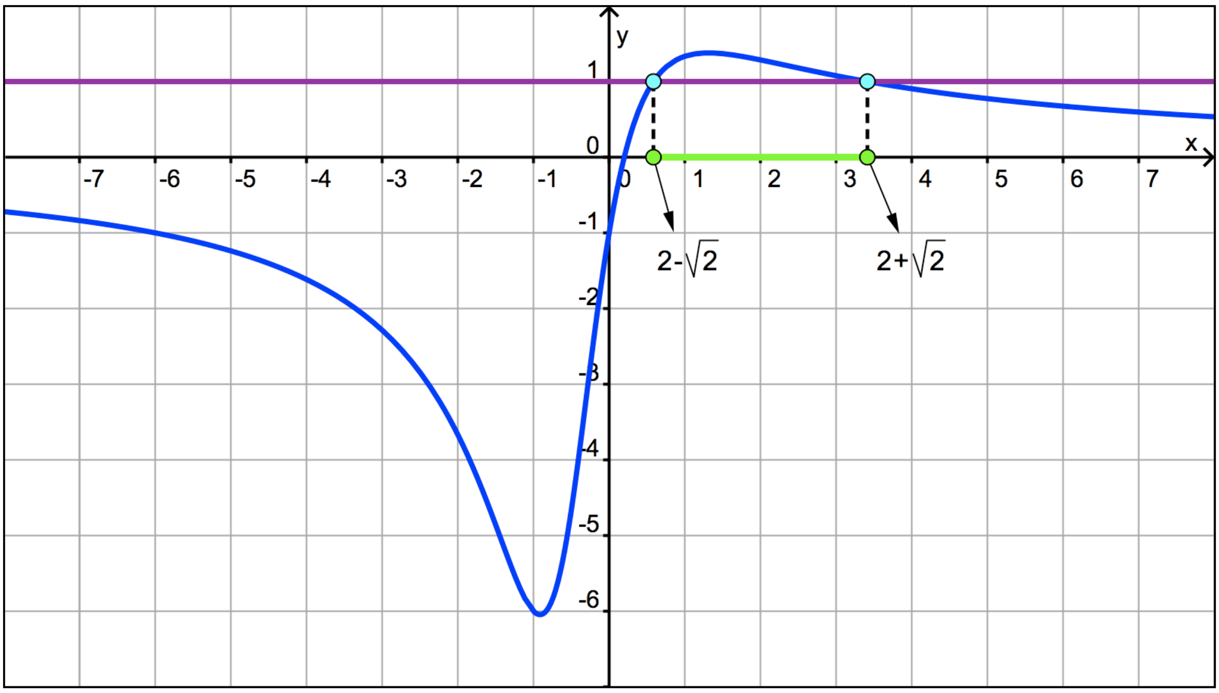
2. a) dom $f = \boldsymbol{R}$ car le dénominateur est toujours différent de 0 (en effet, le discriminant de x^2+x+1 vaut - 3).

   b) Pour résoudre l'inéquation $\frac{5x-1}{x^2+x+1} \geq 1$, profitons du fait que $x^2+x+1>0$ (en effet, un trinôme du second degré n'ayant aucune racine a toujours le signe du coefficient de x^2).
   Nous pouvons donc multiplier par x^2+x+1 les deux membres de l'inéquation sans changer le signe d'inégalité : $5x-1 \geq x^2+x+1 \Leftrightarrow -x^2+4x-2 \geq 0$.
   On résout cette inéquation comme d'habitude (racines, tableau de signes) :

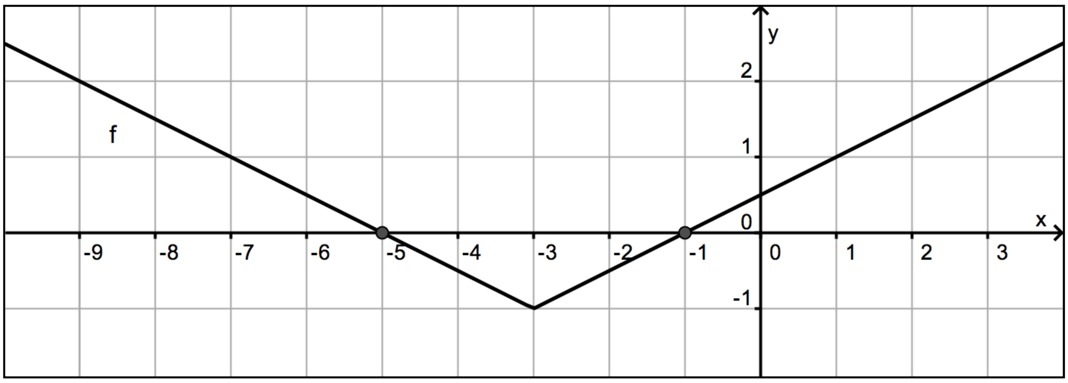
x		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	
$-x^2+4x-2$	-	0	+	0	-

   <u>Conclusion</u> : $S=\left[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right]$.

<u>Vérification graphique</u> : la partie du graphique de f située au-dessus de la droite $y = 1$ correspond aux abscisses comprise entre $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$.



3. a) Graphique de $f(x)=\frac{1}{2}|x+3|-1$.



b) La fonction prend des valeurs négatives lorsque son graphique est sous l'axe des abscisses. Donc : $f(x)<0 \Leftrightarrow -5<x<-1$ et $S=\left]-5,-1\right[$.

4. La fonction est obtenue en translatant une fonction du type $a\sqrt{x}$ de 4 unités vers la gauche et de 1 unité vers le bas. La fonction est donc de la forme $f(x)=a\sqrt{x+4}-1$. Il reste à trouver le coefficient a . Comme le graphique de f passe par le point $(0,5)$, nous avons $f(0)=5 \Leftrightarrow 2a-1=5 \Leftrightarrow a=3$. Conclusion : $f(x)=3\sqrt{x+4}-1$.

5. Il suffit de translater le graphique de $1/x$ de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut. Nous obtenons la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+4$.

6. C'est faux, car pour avoir $f(x)=6$, il faudrait $\dfrac{1}{2x+1}=0$. Ce n'est pas possible car le numérateur de cette fraction vaut 1 .

7. Si l'on effectue les transformations proposées, on obtient successivement les fonctions $y=\dfrac{5/2}{x}$, puis $y=\dfrac{5/2}{x-3/2}$ et enfin $y=\dfrac{5/2}{x-3/2}+8$.
Transformons : $y=\dfrac{5}{2(x-3/2)}+8=\dfrac{5}{2x-3}+8=\dfrac{5+8(2x-3)}{2x-3}=\dfrac{16x-19}{2x-3}=f(x)$!
C'est donc vrai.

8. a) $(f\circ f)(x)=f\left[\left(f(x)\right)\right]=f\left(3x^2\right)=3\cdot\left(3x^2\right)^2=27x^4$;

b) $(f\circ f\circ f)(x)=f\left[(f\circ f)(x)\right]=f\left(27x^4\right)=3\cdot\left(27x^4\right)^2=2187x^8$.

9. $(g\circ f)(x)=g\left[\left(f(x)\right)\right]=g\left(\sqrt{x-1}\right)=\left(\sqrt{x-1}\right)^2=x-1$ (pour $x \geq 1$). Le domaine de définition de $g\circ f$ est $[\ 1\ ,+\infty\ [$, car la condition $x\geq 1$ est requise pour la fonction f.

10. Les fonctions sont $g(x)=2x$, $h(x)=\sin x$ et $i(x)=\sqrt{x}$. De cette façon, la composée *« g suivie de h , puis suivie de i »* est égale à la fonction $f(x)=\sqrt{\sin(2x)}$.

11. La fonction f est

- strictement décroissante dans $]-\infty, 1]$;
- constante dans $[1, 3]$;
- strictement croissante dans $[3, 5]$;
- strictement décroissante dans $[5, +\infty[$.

Son expression analytique est : $f(x) = \begin{cases} -x+3 & si \quad x \leq 1 \\ 2 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 & si \quad 3 \leq x \leq 5 \\ -2x+14 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$.

12. La proposition signifie que la fonction est décroissante dans l'intervalle $[1, 3]$. C'est vrai pour la fonction ① et aussi pour les fonctions ③ et ④, car il n'est pas demandé que la fonction soit <u>strictement</u> décroissante, et une fonction constante convient aussi ! Par contre, la fonction ② ne convient pas car elle est croissante dans $[2.7, 3]$.

13. a) Condition d'existence : $(x-2)^2(1-x) \geq 0$.
D'après le tableau ci-dessous, dom $f =]-\infty,1] \cup \{2\}$.
Cette fonction est un peu particulière car elle a un point isolé en $(2,0)$.

x		1		2	
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+
$1-x$	+	0	-	-	-
$(x-2)^2(1-x)$	+	0	-	0	-

b) Conditions d'existence : $x-2 \neq 0$ et $1 - \dfrac{1}{x-2} \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 3$.
Donc, dom $f = \mathbf{R} \setminus \{2, 3\}$.

14. Ce domaine de définition est l'ensemble des réels x tels que $x < -3$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$. La première condition peut s'écrire $x + 3 < 0$ ou encore $-x - 3 > 0$. C'est donc $-x - 3$ que nous mettrons sous une racine carrée, et au dénominateur vu que l'inégalité est stricte. Une fonction qui convient est : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x-3}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

En voici une autre : $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)\sqrt{-x-3}}$.

15.