

Préparation du contrôle de synthèse n°1 : solutions des exercices

Fonctions

1. Il faut résoudre l'équation $\frac{5x+1}{x^2-4} = 2$.

Sous les conditions $x \neq \pm 2$, on obtient : $5x+1 = 2(x^2-4) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 9 = 0$.

Après résolution de cette équation du second degré, on conclut que les points cherchés sont : $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{4}, 2\right) \approx (-1.21, 2)$ et $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{4}, 2\right) \approx (3.71, 2)$.

2. a) $\text{dom } f = \mathbf{R}$ car le dénominateur est toujours différent de 0 (en effet, le discriminant de x^2+x+1 vaut -3).

b) Pour résoudre l'inéquation $\frac{5x-1}{x^2+x+1} \geq 1$, profitons du fait que $x^2+x+1 > 0$ (en effet, un trinôme du second degré n'ayant aucune racine a toujours le signe du coefficient de x^2).

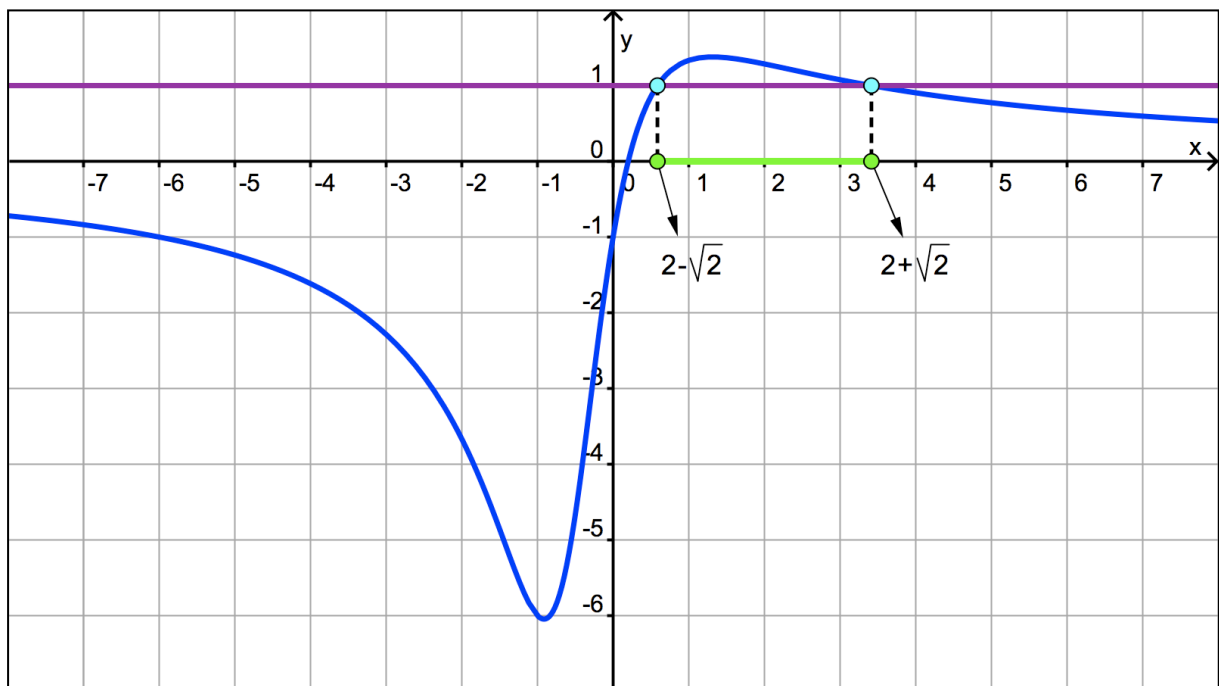
Nous pouvons donc multiplier par x^2+x+1 les deux membres de l'inéquation sans changer le signe d'inégalité : $5x-1 \geq x^2+x+1 \Leftrightarrow -x^2+4x-2 \geq 0$.

On résout cette inéquation comme d'habitude (racines, tableau de signes) :

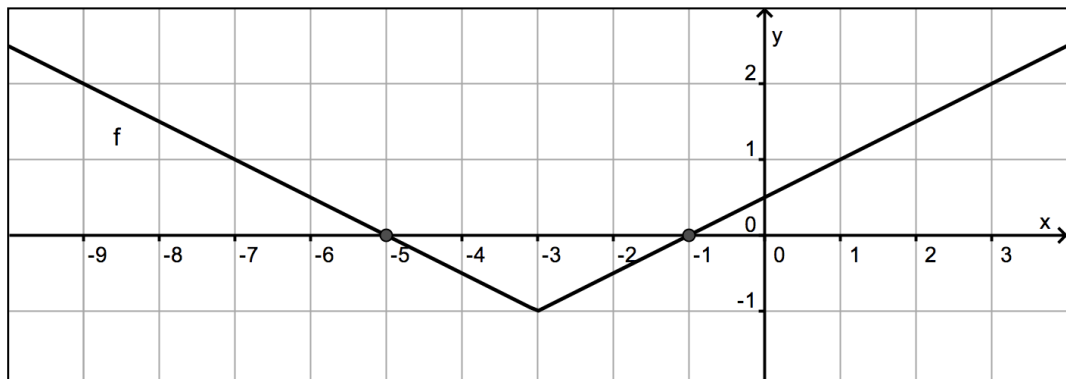
x		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	
$-x^2+4x-2$	-	0	+	0	-

Conclusion : $S = [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$.

Vérification graphique : la partie du graphique de f située au-dessus de la droite $y = 1$ correspond aux abscisses comprise entre $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$.



3. a) Graphique de $f(x) = \frac{1}{2}|x+3|-1$.



- b) La fonction prend des valeurs négatives lorsque son graphique est sous l'axe des abscisses. Donc : $f(x) < 0 \Leftrightarrow -5 < x < -1$ et $S =]-5, -1[$.
4. La fonction est obtenue en tradant une fonction du type $a\sqrt{x}$ de 4 unités vers la gauche et de 1 unité vers le bas. La fonction est donc de la forme $f(x) = a\sqrt{x+4} - 1$. Il reste à trouver le coefficient a . Comme le graphique de f passe par le point $(0, 5)$, nous avons $f(0) = 5 \Leftrightarrow 2a - 1 = 5 \Leftrightarrow a = 3$. Conclusion : $f(x) = 3\sqrt{x+4} - 1$.
5. Il suffit de tradater le graphique de $1/x$ de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut. Nous obtenons la fonction $f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$.
6. C'est faux, car pour avoir $f(x) = 6$, il faudrait $\frac{1}{2x+1} = 0$. Ce n'est pas possible car le numérateur de cette fraction vaut 1.
7. Si l'on effectue les transformations proposées, on obtient successivement les fonctions $y = \frac{5/2}{x}$, puis $y = \frac{5/2}{x-3/2}$ et enfin $y = \frac{5/2}{x-3/2} + 8$.
Transformons : $y = \frac{5}{2(x-3/2)} + 8 = \frac{5}{2x-3} + 8 = \frac{5+8(2x-3)}{2x-3} = \frac{16x-19}{2x-3} = f(x)$!
C'est donc vrai.
8. a) $(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f(3x^2) = 3 \cdot (3x^2)^2 = 27x^4$;
b) $(f \circ f \circ f)(x) = f[(f \circ f)(x)] = f(27x^4) = 3 \cdot (27x^4)^2 = 2187x^8$.
9. $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x-1$ (pour $x \geq 1$). Le domaine de définition de $g \circ f$ est $[1, +\infty[$, car la condition $x \geq 1$ est requise pour la fonction f .
10. Les fonctions sont $g(x) = 2x$, $h(x) = \sin x$ et $i(x) = \sqrt{x}$. De cette façon, la composée « g suivie de h , puis suivie de i » est égale à la fonction $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$.

11. La fonction f est
- strictement décroissante dans $] -\infty, 1]$;
 - constante dans $[1, 3]$;
 - strictement croissante dans $[3, 5]$;
 - strictement décroissante dans $[5, +\infty [$.

Son expression analytique est :
$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ -2x + 14 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

12. La proposition signifie que la fonction est décroissante dans l'intervalle $[1, 3]$. C'est vrai pour la fonction ① et aussi pour les fonctions ③ et ④ , car il n'est pas demandé que la fonction soit strictement décroissante, et une fonction constante convient aussi ! Par contre, la fonction ② ne convient pas car elle est croissante dans $[2.7, 3]$.

13. a) Condition d'existence : $(x - 2)^2(1 - x) \geq 0$.
 D'après le tableau ci-dessous, $\text{dom } f =]-\infty, 1] \cup \{2\}$.
 Cette fonction est un peu particulière car elle a un point isolé en $(2, 0)$.

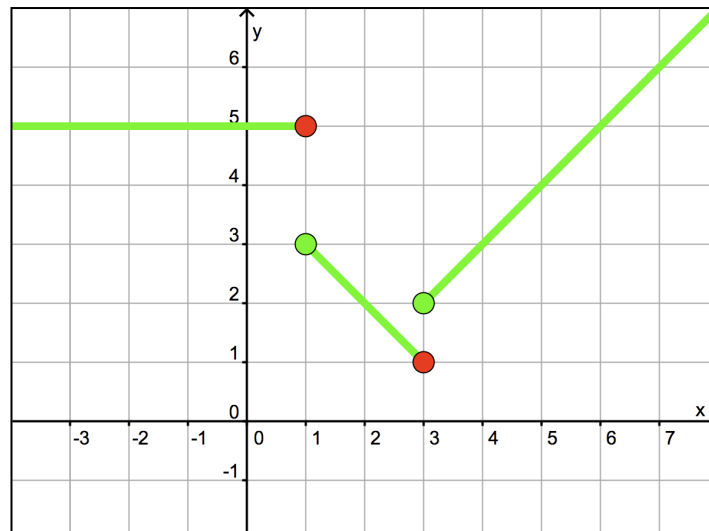
x		1		2	
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+
$1-x$	+	0	-	-	-
$(x-2)^2(1-x)$	+	0	-	0	-

- b) Conditions d'existence : $x - 2 \neq 0$ et $1 - \frac{1}{x-2} \neq 0 \Leftrightarrow x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 3$.
 Donc, $\text{dom } f = \mathbf{R} \setminus \{ 2, 3 \}$.

14. Ce domaine de définition est l'ensemble des réels x tels que $x < -3$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$. La première condition peut s'écrire $x + 3 < 0$ ou encore $-x - 3 > 0$. C'est donc $-x - 3$ que nous mettrons sous une racine carrée, et au dénominateur vu que l'inégalité est stricte. Une fonction qui convient est : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x-3}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

En voici une autre : $f(x) = \frac{1}{x(x-1)\sqrt{-x-3}}$.

15.



Vecteurs de l'espace et produit scalaire

1. a) Le point inconnu D a pour coordonnées $(24, y_D, z_D)$. Pour que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} soient parallèles, il faut que $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, où k est un nombre réel.

$$\text{Il faut donc que } \begin{pmatrix} 21 \\ y_D - 5 \\ z_D \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et donc que } k = 7.$$

Il suit $y_D - 5 = 7 \times 0 \rightarrow y_D = 5$ et $z_D = 7 \times (-1) \rightarrow z_D = -7$, et donc : $D(24, 5, -7)$.

- b) Calculons d'abord le cosinus de l'angle :

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{86}} = \frac{12}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{86}} \approx 0,4092. \text{ Ensuite, } \theta \approx 68,85^\circ.$$

2. a) Il suffit de montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} sont parallèles.

$$\text{C'est bien le cas, car } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}.$$

- b) Il suffit de montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CH} sont perpendiculaires.

$$\text{C'est bien le cas, car } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -20 \end{pmatrix} = 15 \times 8 + 6 \times (-20) = 0.$$

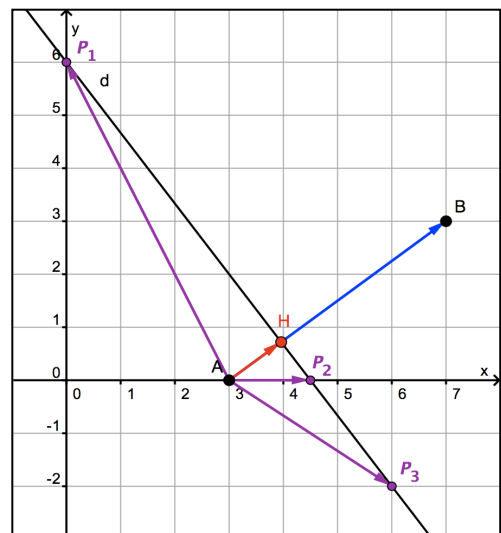
- c) L'aire du triangle est égale à :

$$\frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CH}\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225 + 36} \cdot \sqrt{64 + 400} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{261} \cdot \sqrt{464} = 174(\text{ua}).$$

3. Représentons la droite $4x + 3y - 18 = 0$ en calculant deux points : si $x = 0$, alors $y = 6$ (P_1) ; si $y = 0$, alors $x = 9/2$ (P_2).

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ pour différents points P de d :

- pour $P_1(0, 6)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 6$;
- pour $P_2\left(\frac{9}{2}, 0\right)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$;
- pour $P_3(6, -2)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \dots$



Explications : $d \perp [AB]$ car $m_{AB} = \frac{3}{4}$ et $m_d = -\frac{4}{3}$.

Dès lors, tout point P de d aura la même projection orthogonale H sur $[AB]$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ sera toujours égal à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Comme nous avons calculé ce produit scalaire dans des cas particuliers, nous savons que sa valeur constante est égale à 6.

4. Il faut que $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} \begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = 0$,

c'est-à-dire $m(m-1) + 3 \cdot 0 + 6m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow (m=0) \vee (m=-5)$.

5. Utilisons la première définition du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$.

Nous obtenons : $33 = \sqrt{100 + 5 + 16} \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow 33 = 11 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \frac{1}{2}$ et donc $\|\vec{v}\| = 6$.

Trigonométrie

1. D'abord : $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ($\sin a > 0$ car $\frac{\pi}{2} < a < \pi$).

a) $\sin(2a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{8}$;

b) $\tan(2a) = \frac{\sin(2a)}{\cos(2a)} = \frac{\sin(2a)}{2\cos^2 a - 1} = \frac{-\sqrt{15}/8}{-7/8} = \frac{\sqrt{15}}{7}$.

2. Nous pouvons utiliser la formule de SIMPSON relative à la somme de deux tangentes :

$$\tan(3x) + \tan(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(4x)}{\cos(3x) \cdot \cos(x)} = 0 \Leftrightarrow (\sin(4x) = 0) \wedge (\cos(3x) \cdot \cos(x) \neq 0).$$

L'équation $\sin(4x) = 0$ donne les solutions

$$4x = k\pi \Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

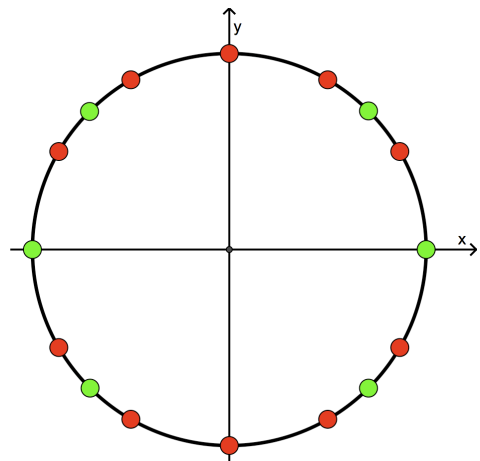
Mais attention : la condition $\cos(x) \neq 0$ élimine

les solutions $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ et la condition

$\cos(3x) \neq 0$ élimine les solutions $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$

(points rouges).

Finalement, il reste les solutions figurées par les points en vert ci-contre.



Autre méthode : $\tan(3x) + \tan(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(3x) = -\tan(x) \Leftrightarrow \tan(3x) = \tan(-x)$ (en effet, revoyez les angles associés : $-\tan(x) = \tan(-x)$).

Et lorsque les tangentes de deux réels sont égales, ceux-ci sont « égaux à $k \cdot \pi$ près ».

Donc : $3x = -x + k\pi \Leftrightarrow 4x = k\pi$ et $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$, sous les mêmes conditions que ci-dessus.

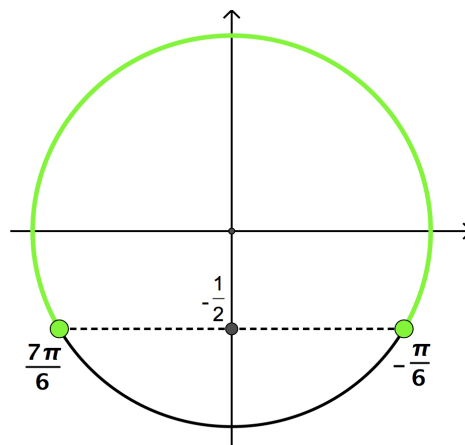
3. L'inéquation est équivalente à $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

L'arc de cercle représenté en vert correspond aux réels dont le sinus est supérieur ou égal à $-\frac{1}{2}$.

Un premier intervalle de solutions de l'inéquation est donc $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$. En ajoutant 2π , un autre

intervalle de solutions est $\left[\frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right]$.

Et ainsi de suite ...



L'ensemble des solutions de l'inéquation est la réunion d'une infinité d'intervalles de ce

type : $S = \dots \cup \left[-\frac{13\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{6}, \frac{31\pi}{6}\right] \cup \dots$

Sous une forme plus « compacte » : $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right]$.

4. Nous savons que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, donc $\sin(a) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)$.

Nous savons aussi que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ (« Carnot »), donc $\cos(a) = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1$.

En tenant compte de ces deux résultats : $\frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{1 + 2\cos^2\frac{a}{2} - 1} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \tan\frac{a}{2}$.

5. $\sin 3x + \sin 4x - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{-x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$ (« Simpson »)

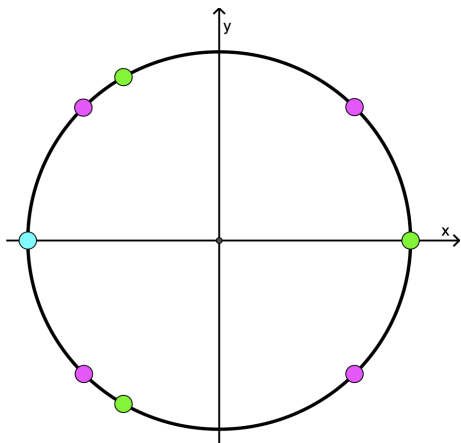
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0 \quad (\text{mise en évidence})$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{3x}{2}\cos 2x\right) = 0 \quad (\text{encore « Simpson »})$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\frac{3x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{2} = k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{k2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



Les solutions sont représentées ci-contre, avec une couleur par « famille de solutions » (respectivement, bleu, rose et vert).