5 B - C - D	**MATHÉMATIQUE (6h)**	**Juin 2014**

Réponses aux questions de préparation au contrôle de synthèse n°2

LIMITES DE FONCTIONS ET ASYMPTOTES, DÉRIVÉES, COMPLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE, CALCUL MATRICIEL, DÉTERMINANTS, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

LIMITES DE FONCTIONS ET ASYMPTOTES

1. a) 2 ; AH $\equiv y = 2$
   b) - 1 ; AH $\equiv y = -1$
   c) - 3
   d) n'existe pas car dom $f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[\setminus \{2\}$
   e) n'existe pas car dom $f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[\setminus \{2\}$
   f) 1,5
   g) $-\infty$; AV $\equiv x = 2$
   h) $+\infty$; AV $\equiv x = 2$

---

2. a) $\dfrac{3}{2}$; « point rouge » de coordonnées $\left(-4,\dfrac{3}{2}\right)$
   b) $-\dfrac{1}{18}$; « point rouge » de coordonnées $\left(-1,-\dfrac{1}{18}\right)$
   c) - 2 ; AH $\equiv y = -2$
   d) 0 ; « point rouge » de coordonnées $(0,0)$
   e) - 4 ; AH $\equiv y = -4$
   f) $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite ; AV $\equiv x = 7$

---

3. dom $f = \mathbf{R} \setminus \{0, ½\}$
   a) « Point rouge » en (0,0) car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
   b) AV $\equiv x = ½$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1/2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1/2 \\ >}} f(x) = +\infty$;
   c) AO $\equiv y = ½\,x + ¼$.

---

4. $AO_1 \equiv y = x$ pour x tendant vers $+\infty$, et $AO_2 \equiv y = -x$ pour x tendant vers $-\infty$.

DÉRIVÉES

1. a) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x+1} = 4$;

   b) $f'(5) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \dfrac{1}{6}$;

   c) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{2}}{x-1} = -\dfrac{1}{4}$.

2. Calculez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f'(x) = \dfrac{3}{(1-4x)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{16x+3}{2\sqrt{8x^2+3x}}$

c) $f'(x) = -4\cdot(2x+1)^2\cdot(4x-7)$

d) $f'(x) = 24\cdot(6x+1)^3$

e) $f'(x) = 5\cdot\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

f) $f'(x) = 3\cdot\cos\left(\dfrac{3x}{4}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{3x}{4}\right) = \dfrac{3}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

---

3. a) $t \equiv y = x - \dfrac{5}{3}$ b) $t \equiv y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$ c) $t \equiv y = -2x + \dfrac{5}{2}$

---

4. Variations : $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$.

Racines approximatives de $f'(x)$ (déterminées via GEOGEBRA) : -2.08 , 0.46 et 3.12 .

x		-2.08		0.46		3.12	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	Min_1	↗	Max	↘	Min_2	↗

Min_1 (-2.08 , -2.35) ; Max (0.46 , 1.24) et Min_2 (3.12 , -2.78) .

Concavités : $f''(x) = x^2 - x - 2$; les racines de $f''(x)$ sont - 1 et 2 .

x		-1		2	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	PI_1	$\cap$	PI_2	$\cup$

PI_1 (-1 , - ¾) et PI_2 (2 , -1) .

---

5. Dérivée première :

$$f'(x) = 2\cdot\cos x - 2\cdot\sin 2x \overset{duplication}{=} \underline{2\cdot\cos x} - \underline{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\underline{\cos x} = \underline{2\cdot\cos x}\cdot(1-2\cdot\sin x) .$$

Racines de $f'(x)$: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right)$.

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		$3\pi/2$		2π
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	↗	↗	Max_1	↘	Min_1	↗	Max_2	↘	Min_2	↗	↗

La fonction n'est pas strictement croissante dans $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, car elle décroît dans $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$.

Par contre, elle est bien croissante dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

COMPLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE

1. D'abord : $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\dfrac{4}{5}$ et $\sin b = -\sqrt{1-\cos^2 b} = -\dfrac{3}{5}$.

   a) $\sin 2a = -\dfrac{24}{25}$

   b) $\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{\sin 2a}{2\cdot\cos^2 a - 1} = \dfrac{-24/25}{7/25} = -\dfrac{24}{7}$

   c) $\cos 3a = \cos(2a+a) = \cos 2a\cdot\cos a - \sin 2a\cdot\sin a = \dfrac{44}{125}$

   d) $\cos 2b = 2\cdot\cos^2 b - 1 = \dfrac{7}{25}$

   e) $\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \sin b\cdot\cos a = 0$

   f) D'abord : $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = -\dfrac{3}{4}$ et $\tan b = \dfrac{\sin b}{\cos b} = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \tan 2b = \dfrac{2\cdot\tan b}{1-\tan^2 b} = -\dfrac{24}{7}$.

   Ensuite : $\tan(2b-a) = \dfrac{\tan 2b - \tan a}{1+\tan 2b\cdot\tan a} = -\dfrac{3}{4}$.

---

2. a) $(\cos a + \sin a)^2 = \underline{\cos^2 a} + 2\cdot\sin a\cdot\cos a + \underline{\sin^2 a} = \underline{1} + 2\cdot\sin a\cdot\cos a = 1 + \sin 2a$.

   b) $$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = -2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}+x}{2} \quad \text{(Simpson)}$$

   $$= -2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x = -\sqrt{2}\cdot\sin x$$

   c) $1+\tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

   d) $$\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-2a\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2a + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2a\right)$$

   $$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2a + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 2a\right)$$

   $$= \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos 2a + \sin 2a)$$

   $$= \cos 2a + \sin 2a$$

3. a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\right)$.

b) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi\right) \vee \left(2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi\right)$

$\Leftrightarrow \left(x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi\right) \vee \left(x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi\right)$.

c) $\tan 2x = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 2x \approx 0{,}9273 + k\pi \Leftrightarrow x \approx 0{,}4636 + k\dfrac{\pi}{2}$.

d) Posons $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et prenons $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

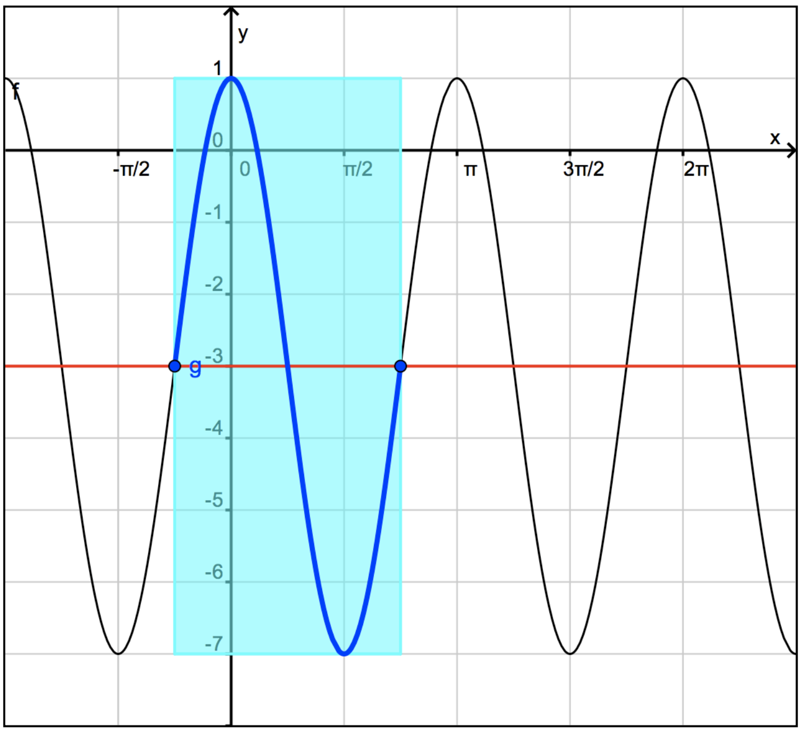
L'équation est équivalente à : $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Solutions : $\left(x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right) \vee \left(x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right) \Leftrightarrow \left(x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right) \vee \left(x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\right)$.

e) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x + \dfrac{\pi}{4} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow 3x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

---

4. Valeur moyenne : - 3 . Valeur maximale : 1 . Valeur minimale : - 7 . Amplitude : 4 .
Période : π .
Fenêtre (tenir compte de la période et de la translation de $\pi / 4$ vers la gauche) :
$\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right] \times [-7{,}1]$. Maximum en (0 , 1) et minimum en ($\pi / 2$, - 7) .



5. $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

---

6. $\cos 3x+\cos x=0 \overset{Simpson}{\Leftrightarrow} 2\cdot\cos 2x\cdot\cos x=0$

$$\Leftrightarrow\left(2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\vee\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

Abscisses respectives de A , B , C et D : $-\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{5\pi}{4}$.

CALCUL MATRICIEL, DÉTERMINANTS, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

1. a) $A^2+B\cdot C=\begin{pmatrix}19 & 24\\ -21 & 5\end{pmatrix}$

b) $C\cdot B=(-26)$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/7 & 0\\ 2/7 & 1\end{pmatrix}$

---

2. $dét(M)=-3$ et $M^{-1}=\begin{pmatrix}-5/3 & 2/3 & 5/3\\ 4/3 & -1/3 & -4/3\\ 5/3 & -2/3 & -2/3\end{pmatrix}$.

---

3. $\begin{cases}x=20\\ y=1\\ z=3\end{cases}$ ou $S=\{(20,1,3)\}$.
